Statica (WB) college 14
Center of gravity Ch. 9.1 – 9.2

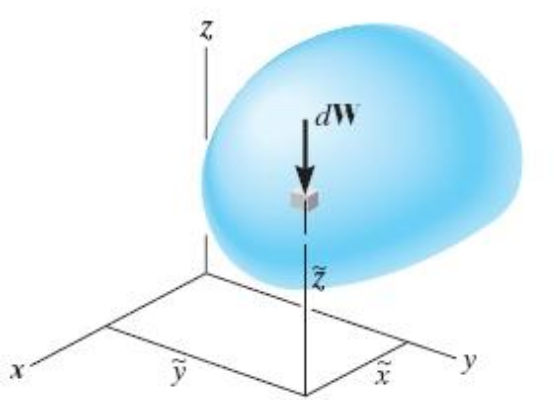
Guido Janssen
G.c.a.m.jansse@tudelft.nl

Zwaartepunt

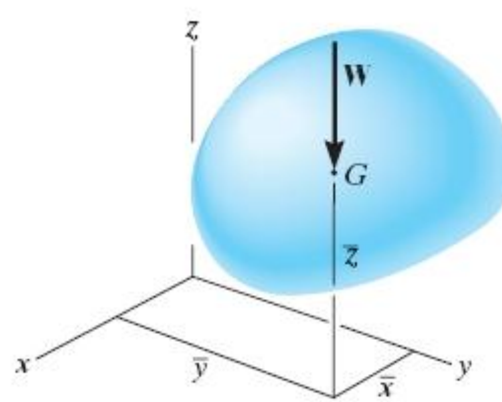
Center of mass = center of gravity = zwaartepunt.

Center of gravity is belangrijk als je wilt weten waar de zwaartekracht aangrijpt op een lichaam.

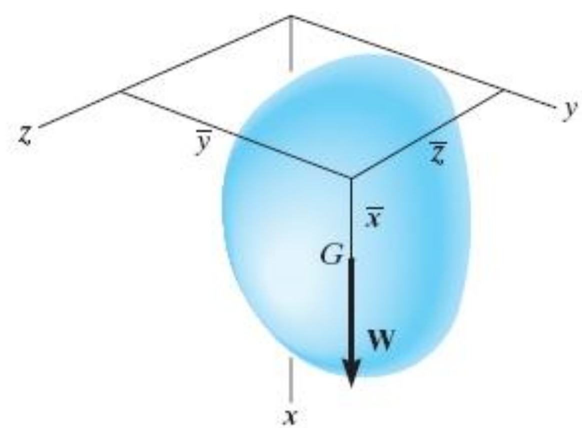
Center of mass is belangrijk als je dynamica bedrijft.



(a)



(b)



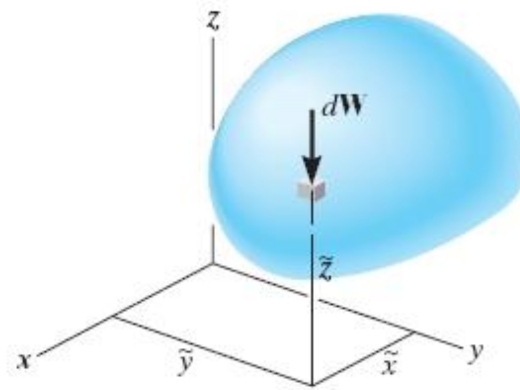
(c)

Ligging van het zwaartepunt, center of gravity

$$W = \int_V dW$$

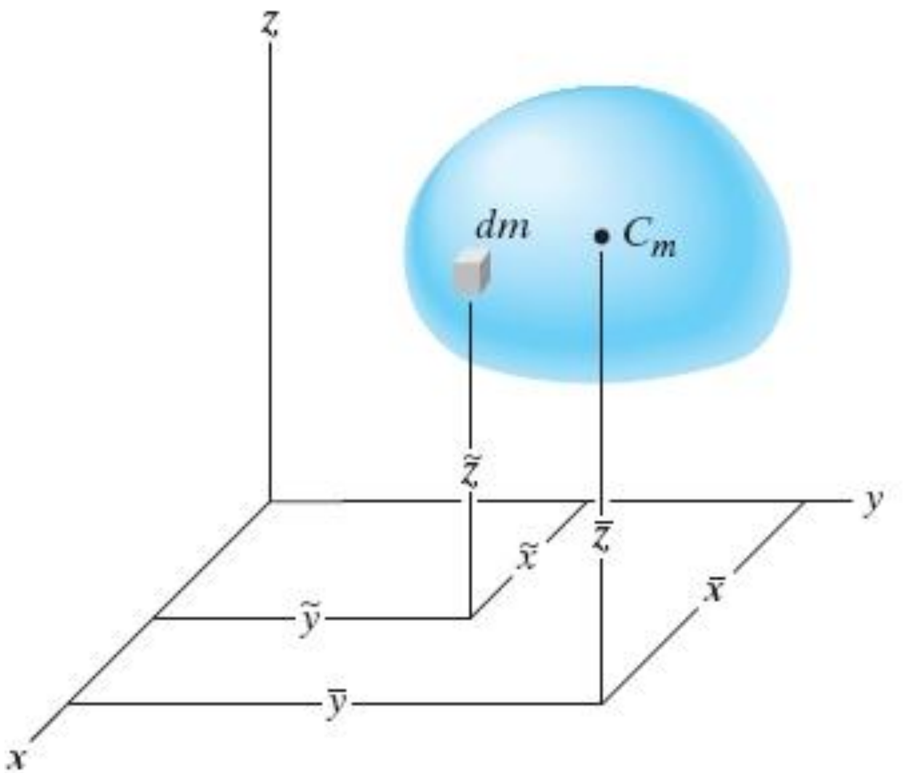
$$(M_R)_y = \sum M_y$$

$$\bar{x}W = \int_V \tilde{x}\, dW$$



$$\bar{x} = \frac{\int_V \tilde{x}\, dW}{\int_V dW} \qquad \bar{y} = \frac{\int_V \tilde{y}\, dW}{\int_V dW} \qquad \bar{z} = \frac{\int_V \tilde{z}\, dW}{\int_V dW}$$

Ligging van het zwaartepunt, center of mass



$$dW = g\,dm$$

$$\bar{x} = \frac{\int_V \tilde{x}\, dm}{\int_V dm}$$

Zo ook voor y en z.

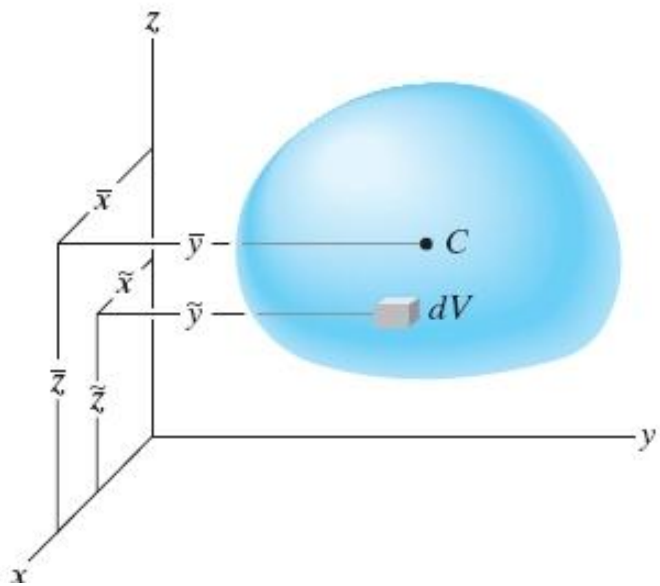
Volumetrisch middelpunt, centroid of volume

Als nu het volume dat we beschouwen vervaardigd is van een homogeen materiaal (soortelijk gewicht is overal het zelfde) dan kunnen we ook naar het volume kijken i.p.v. naar de massaverdeling of de infinitissimale bijdragen van de zwaartekracht.

Een tweede reden om naar het volumetrisch middelpunt te kijken is de opwaardse druk: Een lichaam, geheel of gedeeltelijk ondergedompeld in een vloeistof verliest zoveel aan gewicht als de verplaatste vloeistof weegt. (Archimedes 212-287 vC)

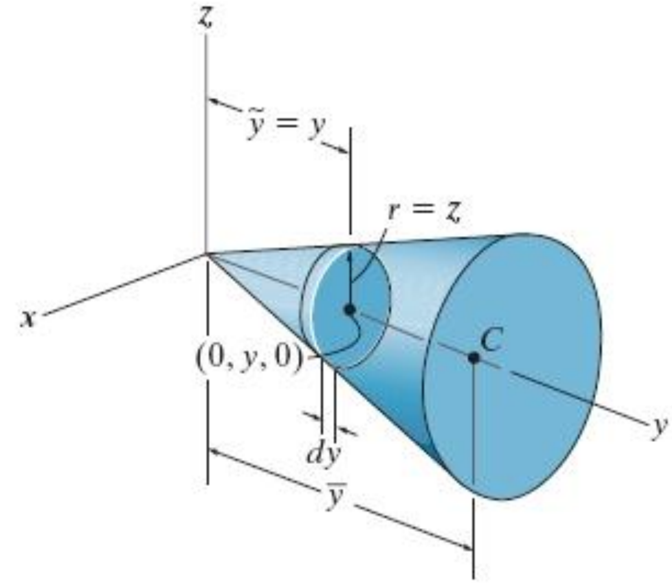
De opwaardse druk grijpt aan in het volumetrisch middelpunt van het deel van het lichaam onder de waterspiegel.

Volumetrisch middelpunt 2



$$\bar{x} = \frac{\int_V \tilde{x}\, dV}{\int_V dV} \qquad \bar{y} = \frac{\int_V \tilde{y}\, dV}{\int_V dV} \qquad \bar{z} = \frac{\int_V \tilde{z}\, dV}{\int_V dV}$$

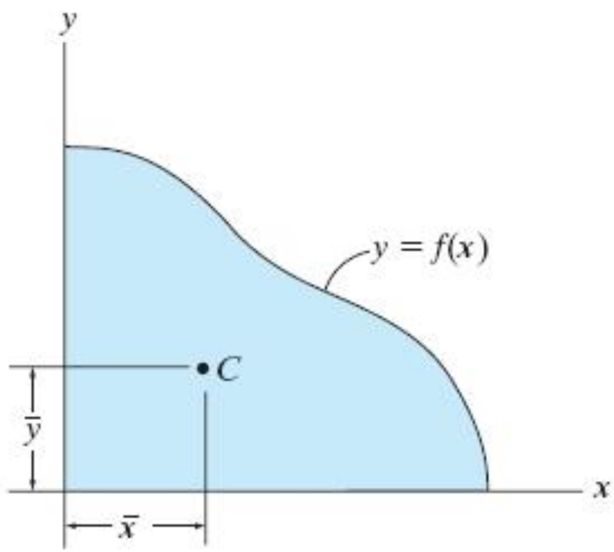
Symmetrie



De kegel bezit rotatie-symmetrie om de y-as.
Het volumetrisch middelpunt, C, moet dientengevolge op de y-as liggen.

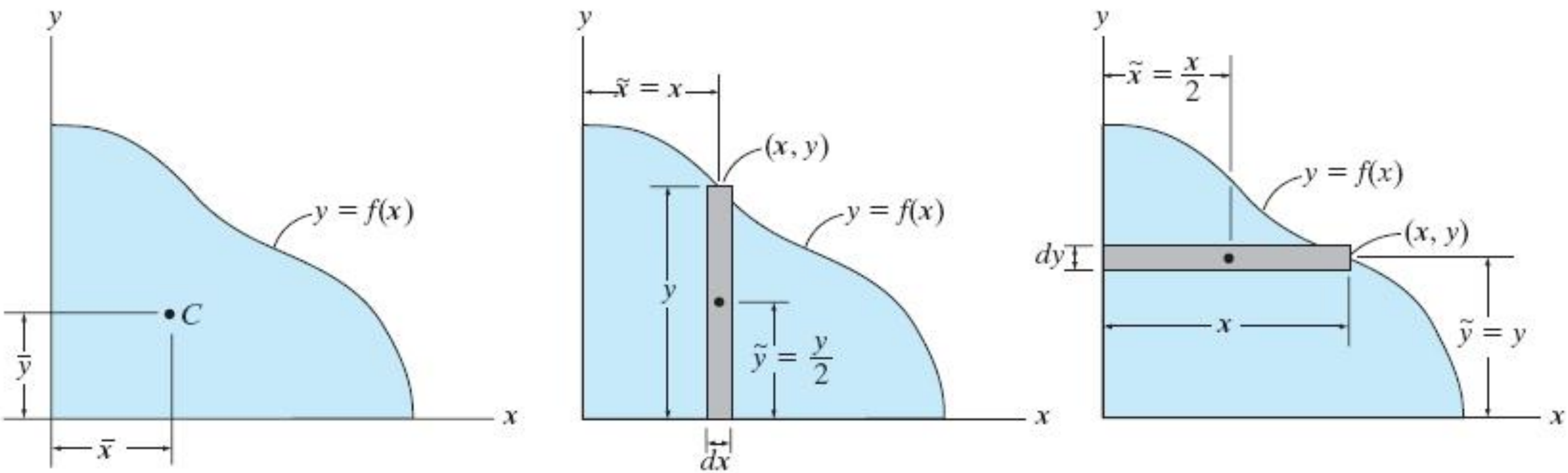
Mee eens?

“Volumetrisch middelpunt” van een vlak, centroid of an area



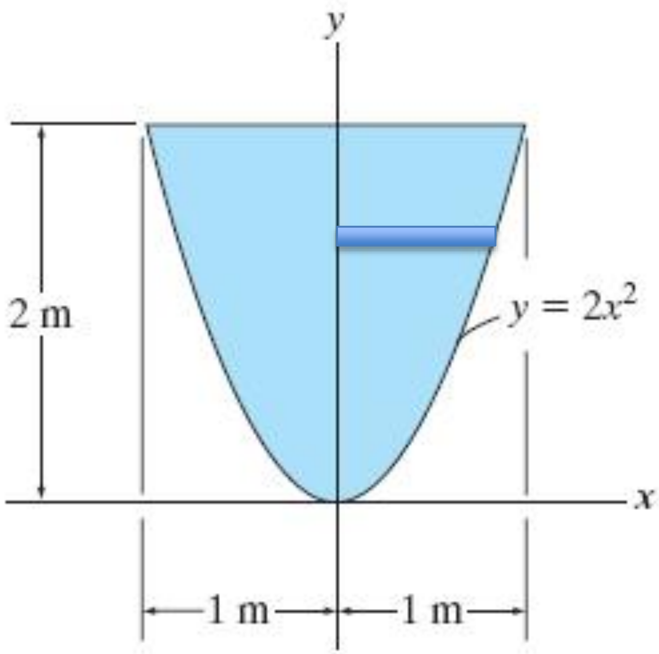
$$\bar{x} = \frac{\int_A \tilde{x}\, dA}{\int_A dA} \qquad \bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y}\, dA}{\int_A dA}$$

“Volumetrisch middelpunt” van een vlak 2



(a) (b) (c)

Fundamental problem F9.3

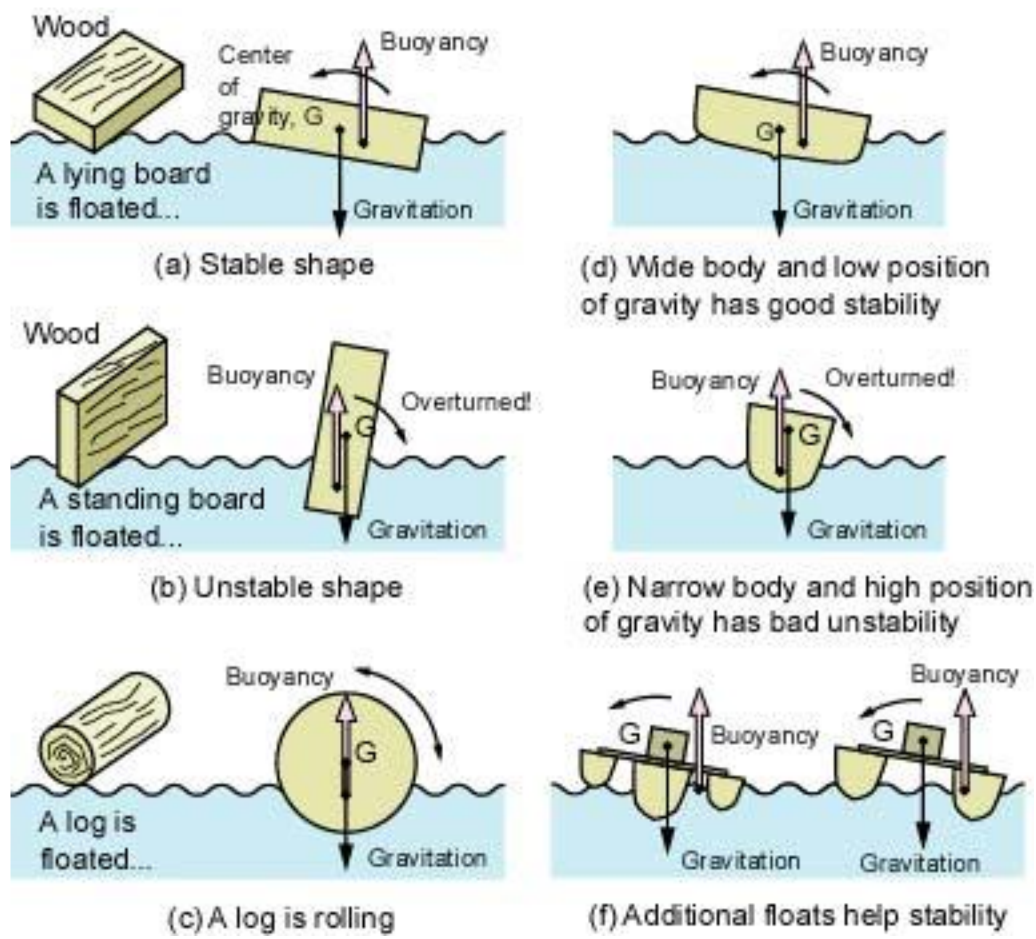


Waar ligt het zwaartepunt van de homogene blauwe plaat?

Op de y-as

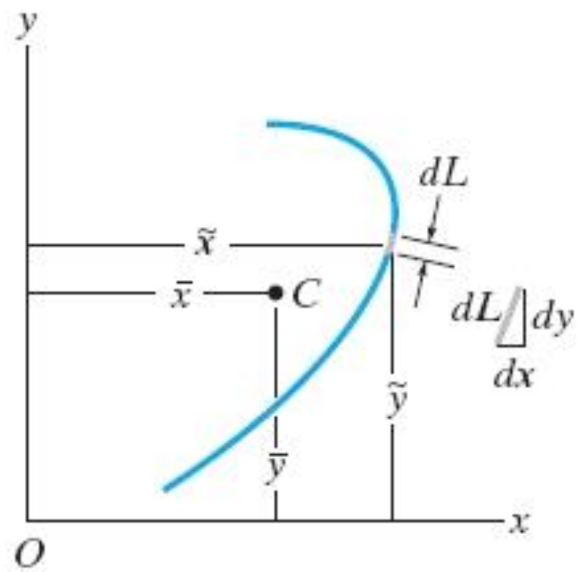
$$\bar{y} = \frac{2\int_0^2 \tilde{y}\sqrt{\frac{\tilde{y}}{2}}\,d\tilde{y}}{2\int_0^2 \sqrt{\frac{\tilde{y}}{2}}\,d\tilde{y}} = \frac{\sqrt{2}\int_0^2 y^{3/2}\,dy}{\sqrt{2}\int_0^2 y^{1/2}\,dy} = \frac{\frac{2}{5}\left(y^{5/2}\Big|_0^2\right)}{\frac{2}{3}\left(y^{3/2}\Big|_0^2\right)} = \frac{\frac{2}{5}2^{5/2}}{\frac{2}{3}2^{3/2}} = \frac{3}{5}2^{2/2} = \frac{6}{5} = 1.2m$$

Buoyancy


Wood
Center
of
gravity, G
Buoyancy
A lying board
is floated...
Gravitation
(a) Stable shape
Buoyancy
G
Gravitation
(d) Wide body and low position
of gravity has good stability
Wood
Buoyancy
Overturned!
G
A standing board
is floated...
Gravitation
(b) Unstable shape
Buoyancy
Overturned!
G
Gravitation
(e) Narrow body and high position
of gravity has bad unstability
Buoyancy
G
A log is
floated...
Gravitation
(c) A log is rolling
G
Buoyancy
G
Buoyancy
Gravitation
Gravitation
(f) Additional floats help stability

Volumetrisch middelpunt van een lijn, centroid of a line

C kan buiten de lijn liggen.

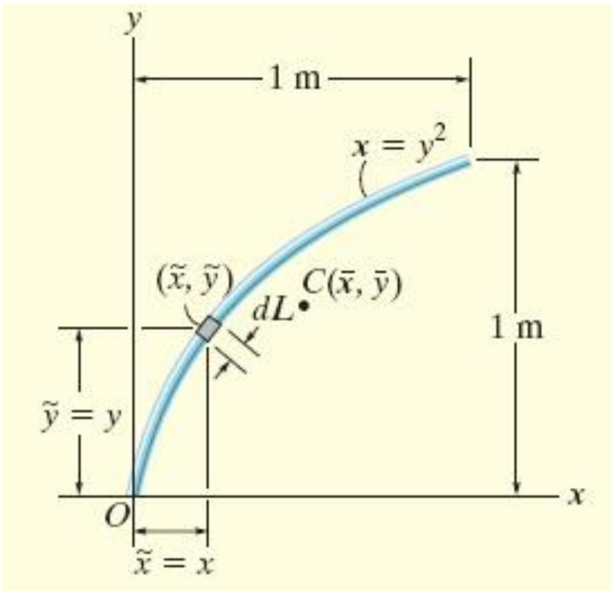


$$\bar{x} = \frac{\int_L \tilde{x}\, dL}{\int_L dL} \qquad \bar{y} = \frac{\int_L \tilde{y}\, dL}{\int_L dL}$$

$$dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

$$dL = \sqrt{\left(\frac{dx}{dx}\right)^2 dx^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx^2} = \left(\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right) dx = \left(\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}\right) dy$$

Example 9.1



Waar ligt het massamiddelpunt, C, van de homogene staaf?

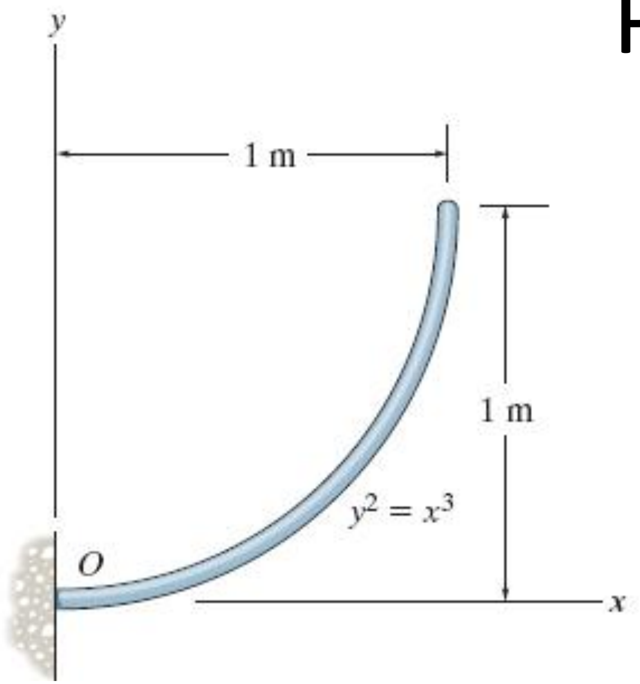
Eerste stap: dL uitdrukken in dy.

$$dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \left(\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}\right) dy = \left(\sqrt{4y^2+1}\right) dy$$

$$\bar{x} = \frac{\int_L \tilde{x}\, dL}{\int_L dL} = \frac{\int_0^1 \left(x\sqrt{4y^2+1}\right) dy}{\int_0^1 \left(\sqrt{4y^2+1}\right) dy} = \frac{\int_0^1 \left(y^2\sqrt{4y^2+1}\right) dy}{\int_0^1 \left(\sqrt{4y^2+1}\right) dy} = \frac{0.6063}{1.479} = 0.410m$$

$\bar{y}$ gaat net zo, zie boek pag.457.

Problem 9.3a



De staaf heeft een massa van 0.5 kg/m.

a: Bepaal de lengte van de staaf.

b: Bepaal de horizontale afstand vanaf de oorsprong tot het zwaartepunt.

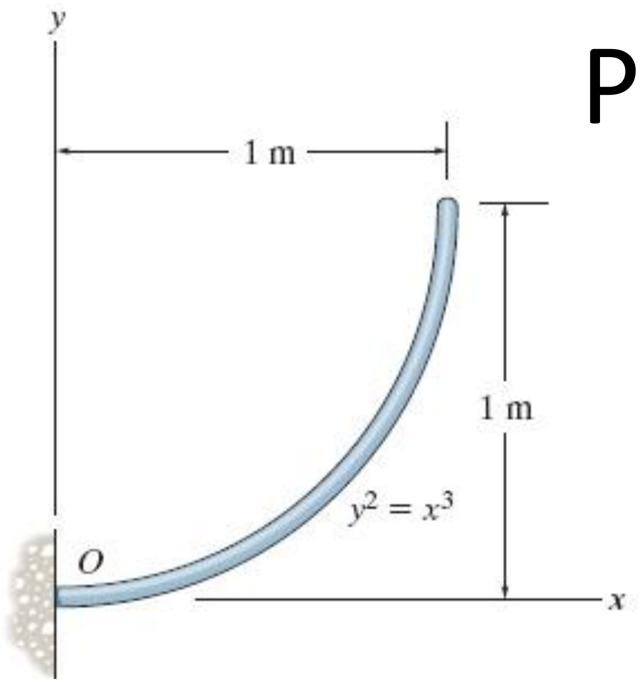
c: Bepaal de reacties in de oorsprong.

$$dL = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \left(\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right) dx$$

$$y = x^{3/2}$$

$$L = \int_L dL = \int_0^1 \left(\sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\right) dx = 1.440 m$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^{1/2}$$



Problem 9.3b

De staaf heeft een massa van 0.5 kg/m.

a: Bepaal de lengte van de staaf.

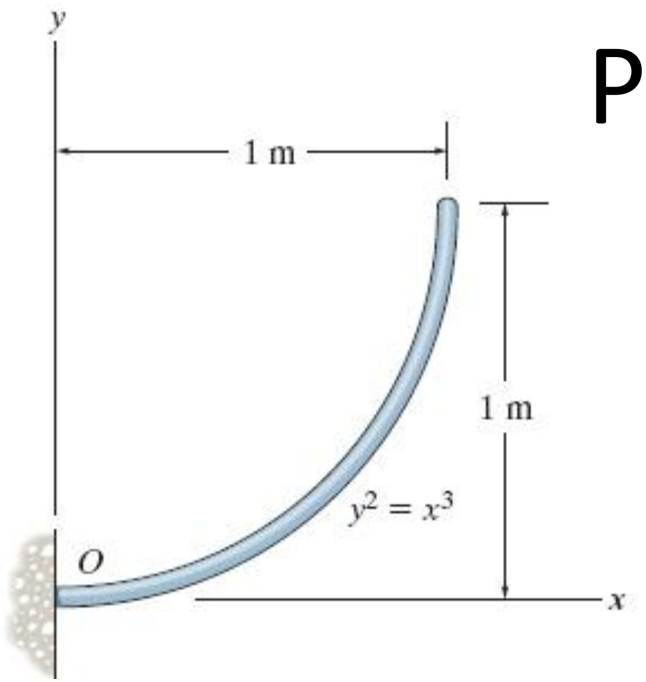
b: Bepaal de horizontale afstand vanaf de oorsprong tot het zwaartepunt.

c: Bepaal de reacties in de oorsprong.

$$\int_L \tilde{x}\, dL = \int_0^1 x\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\, dx = 0.786$$

$$\bar{x} = \frac{\int_L \tilde{x}\, dL}{\int_L dL} = \frac{0.786}{1.440} = 0.546m$$

Problem 9.3c



De staaf heeft een massa van 0.5 kg/m.

a: Bepaal de lengte van de staaf.

b: Bepaal de horizontale afstand vanaf de oorsprong tot het zwaartepunt.

c: Bepaal de reacties in de oorsprong.

$$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \qquad O_x = 0N$$

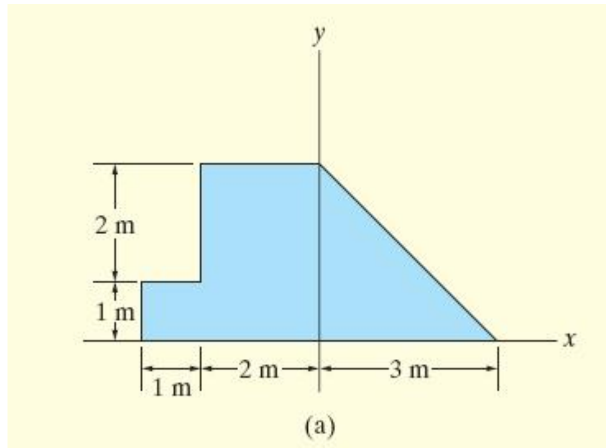
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \qquad O_y - (0.5)(9.81)(1.440) = 0$$

$$O_y = 7.06N$$

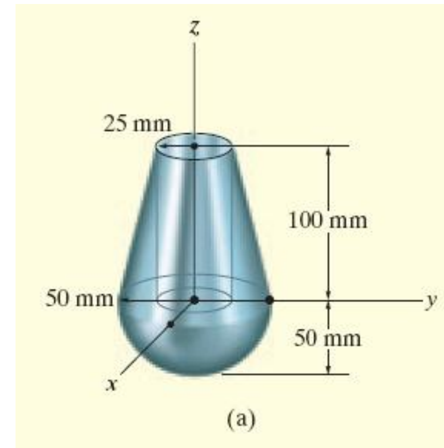
$$linksom - pos. \sum M_O = 0 \qquad M_O - (0.5)(9.81)(1.440)(0.546) = 0$$

$$M_O = 3.85N.m$$

Samengestelde lichamen



(a)

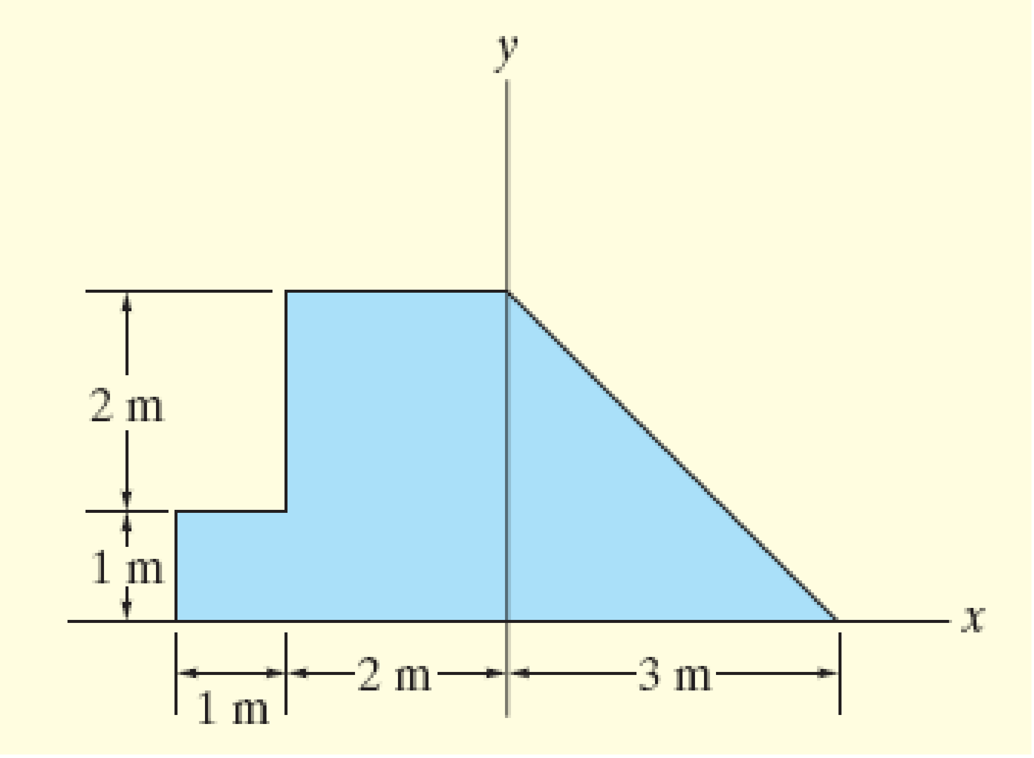


(a)

$$\bar{x} = \frac{\sum_i \tilde{x}_i W_i}{\sum_i W_i} \qquad \bar{y} = \frac{\sum_i \tilde{y}_i W_i}{\sum_i W_i} \qquad \bar{z} = \frac{\sum_i \tilde{z}_i W_i}{\sum_i W_i}$$

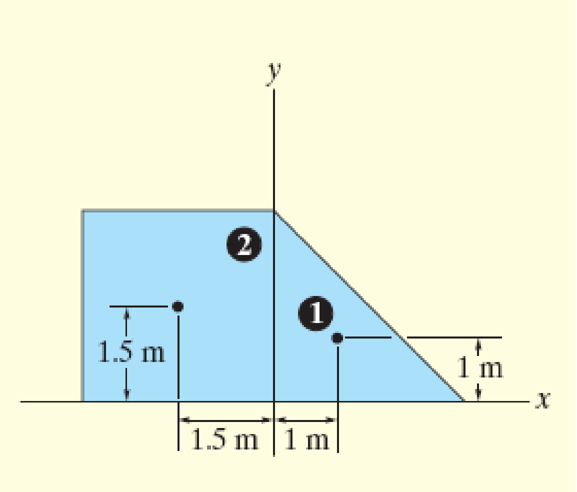
Example 9.10 a

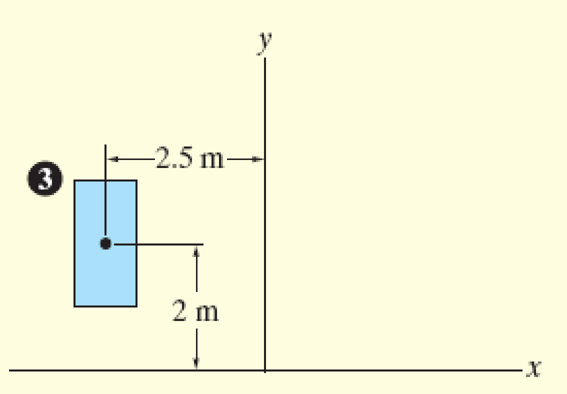
Bepaal het zwaartepunt van de homogene plaat.



Example 9.10 b

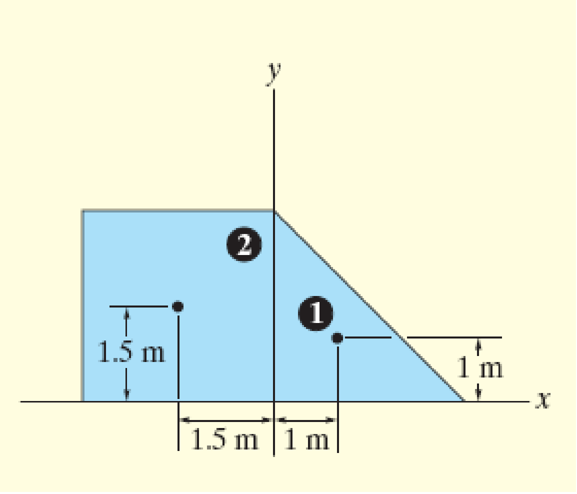
Verdeel de plaat in drie delen. De kleine rechthoek wordt negatief gerekend.
Bepaal van elk deel de massa (oppervlak) en het zwaartepunt.
Daarna gewogen optellen.

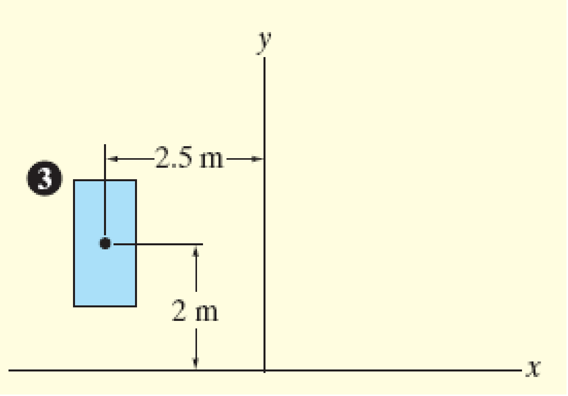




Example 9.10 c

Segment	$A\ (\mathrm{m}^2)$	$\tilde{x}\ (\mathrm{m})$	$\tilde{y}\ (\mathrm{m})$	$\tilde{x}A\ (\mathrm{m}^3)$	$\tilde{y}A\ (\mathrm{m}^3)$
1	$\frac{1}{2}(3)(3) = 4.5$	1	1	4.5	4.5
2	$(3)(3) = 9$	-1.5	1.5	-13.5	13.5
3	$-(2)(1) = -2$	-2.5	2	5	-4
	$\Sigma A = 11.5$			$\Sigma \tilde{x}A = -4$	$\Sigma \tilde{y}A = 14$



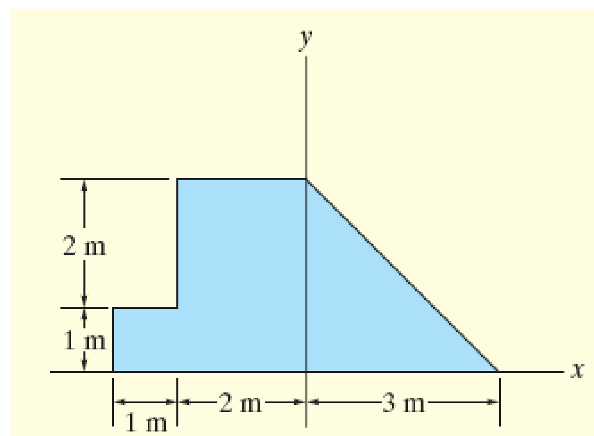


Example 9.10 d

Segment	$A\,(m^2)$	$\tilde{x}\,(m)$	$\tilde{y}\,(m)$	$\tilde{x}A\,(m^3)$	$\tilde{y}A\,(m^3)$
1	$\frac{1}{2}(3)(3) = 4.5$	1	1	4.5	4.5
2	$(3)(3) = 9$	-1.5	1.5	-13.5	13.5
3	$-(2)(1) = -2$	-2.5	2	5	-4
	$\Sigma A = 11.5$			$\Sigma \tilde{x}A = -4$	$\Sigma \tilde{y}A = 14$

$$\bar{x} = \frac{\sum \tilde{x}A}{\sum A} = \frac{-4}{11.5} = -0.348m$$

$$\bar{y} = \frac{\sum \tilde{y}A}{\sum A} = \frac{14}{11.5} = 1.22m$$



Huiswerk

Kennis nemen van Toets 14:	0.5 uur
Terugkijken op paragraaf 9.1 en 9.2:	0.5 uur
Toets 14 maken*:	4.5 uur
Voorbereiden paragrafen 9.3 en 9.4	1.0 uur
	______ +
Totaal:	6.5 uur

* Als je niet uit de sommen van Toets 11 komt, of geen toegang hebt, begin dan met de “fundamental problems” uit het boek en doe vervolgens wat gewone opgaven of de sommen op “Mastering Engineering”(zie announcement Bb). Ook in schrift, ook meenemen naar werkcollege.