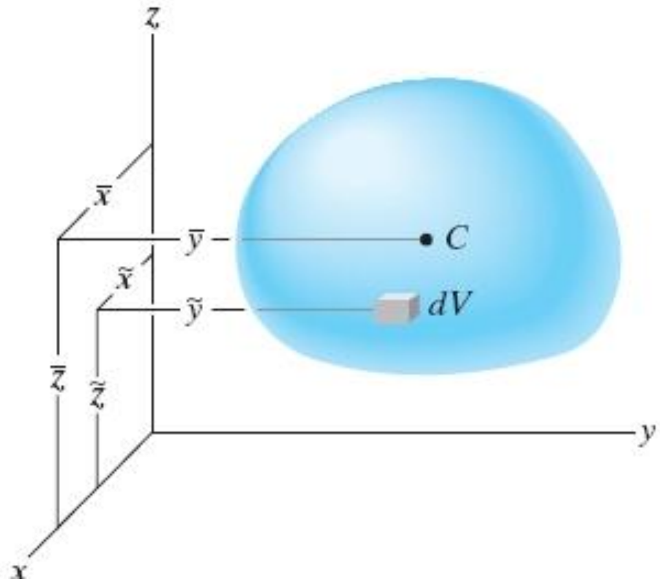
Statica (WB) college 15
Distributed load Ch. 9.3 - 9.5

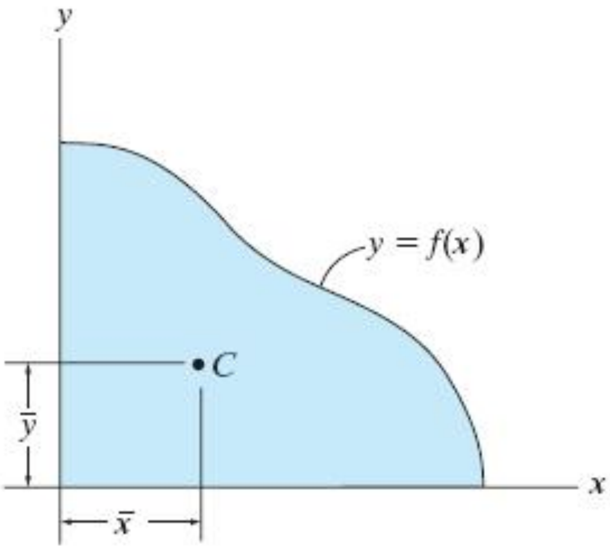
Guido Janssen
G.c.a.m.janssen@tudelft.nl

Vorige keer: Centroid, centroide, volumetrisch middelpunt, vaak zwaartepunt



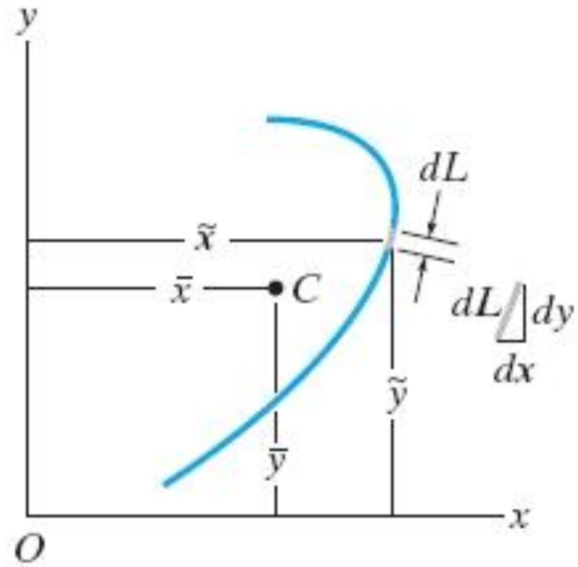
$$\bar{x} = \frac{\int_V \tilde{x}\, dV}{\int_V dV} \qquad \bar{y} = \frac{\int_V \tilde{y}\, dV}{\int_V dV} \qquad \bar{z} = \frac{\int_V \tilde{z}\, dV}{\int_V dV}$$

Vorige keer: Centroïde van een vlak



$$\bar{x} = \frac{\int_A \tilde{x}\, dA}{\int_A dA} \qquad \bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y}\, dA}{\int_A dA}$$

Vorige keer: Centroïde van een lijn



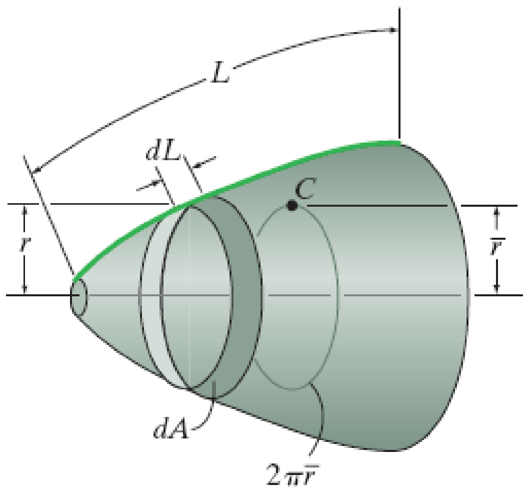
C kan buiten de lijn liggen.

$$\bar{x} = \frac{\int_L \tilde{x}\, dL}{\int_L dL} \qquad \bar{y} = \frac{\int_L \tilde{y}\, dL}{\int_L dL}$$

$$dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

$$dL = \sqrt{\left(\frac{dx}{dx}\right)^2 dx^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx^2} = \left(\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right) dx = \left(\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}\right) dy$$

Theorema’s van Pappus en Guldinus



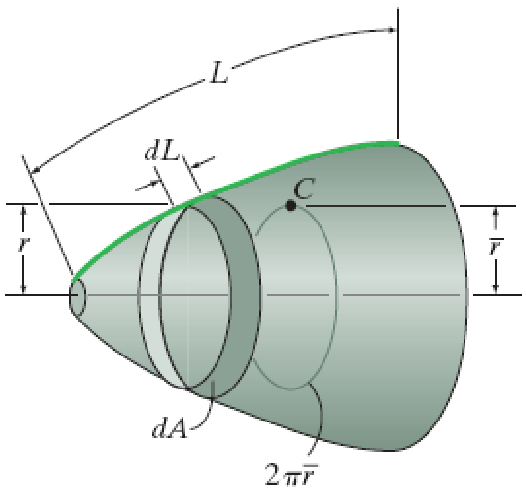
Cylindersymmetrie komt veel voor.

Het is nodig om voor cylindersymmetrische objecten het oppervlak en het volume uit te kunnen rekenen.

Pappus: 4^e eeuw voor Christus
Guldinus: 1577 - 1643

p.488, 1e theorema:
Het oppervlak van een omwentelingslichaam is gelijk aan het produkt van de lengte van het lijnstuk dat rondgedraaid wordt en en de afstand die de “gemiddelde afstand tot de as” aflegt om het omwentelingslichaam te maken.

Omwentelingsoppervlak



$$dA = 2\pi r\, dL$$

$$A = 2\pi \int r\, dL$$

We wisten al, vorige keer, eq. 9.5:

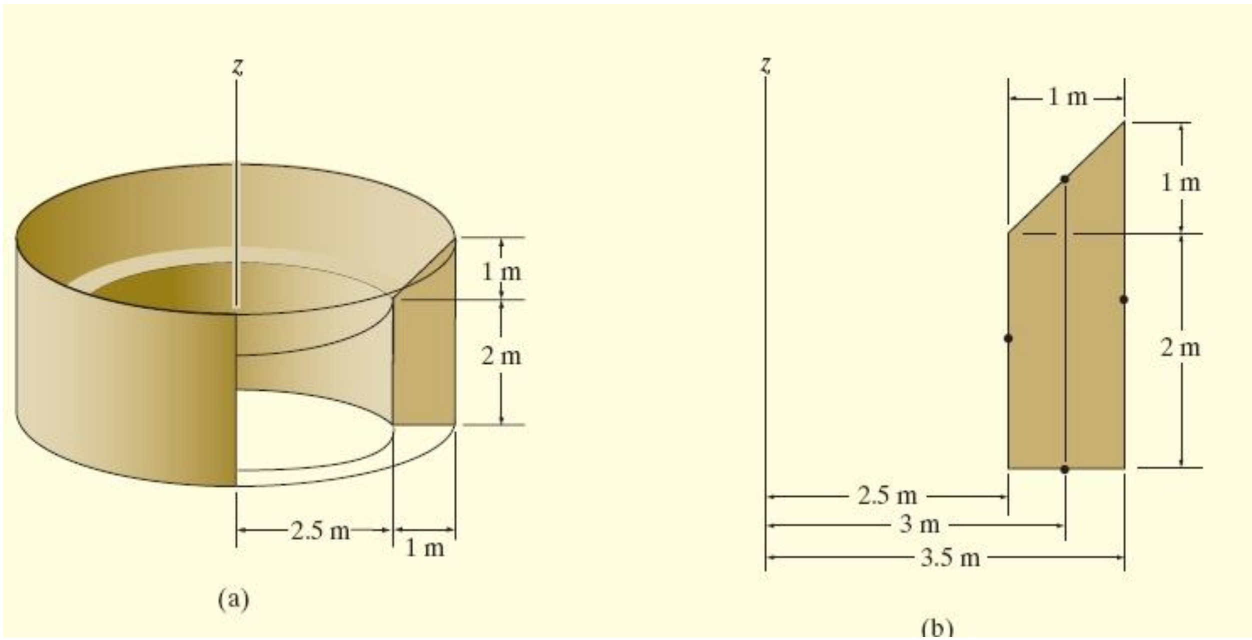
$$\int r\, dL = \bar{r}L$$

Dus: $$A = 2\pi\bar{r}L$$

Als je niet de hele buitenkant (2π ofwel 360°) beschouwd maar slechts een deel: θ radialen, dan

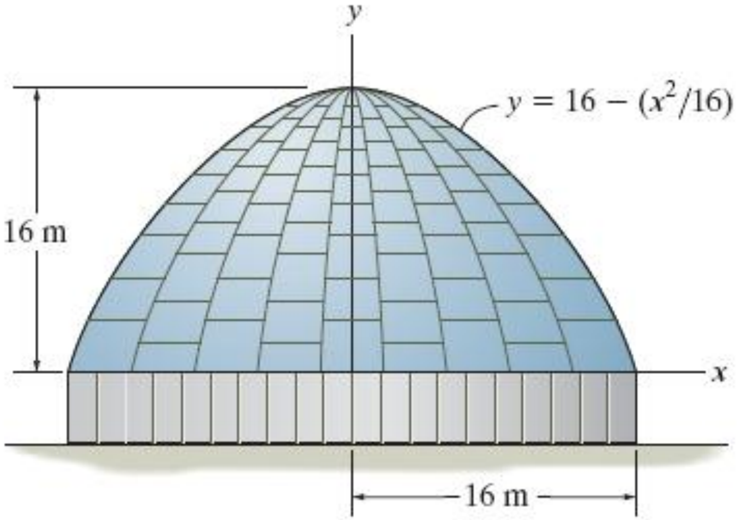
$$A = \theta\bar{r}L$$

Example 9.13 - oppervlak



$$A = 2\pi\left[(2.5m)(2m) + (3m)\left(\sqrt{(1m)^2 + (1m)^2}\right) + (3.5m)(3m) + (3m)(1m)\right] = 143m^2$$

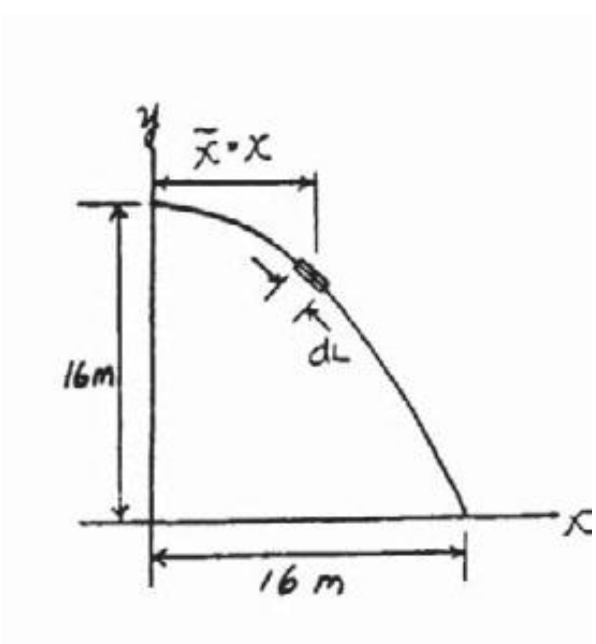
Problem 9-114 a



Bepaal het oppervlak van het dak. De vorm van het dak is een omwentelingsparabool om de y-as.

Druk *dL* uit in of *dx* of *dy*:

$$dL = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \left(\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right)dx = \left(\sqrt{1+\left(-\frac{x}{8}\right)^2}\right)dx$$

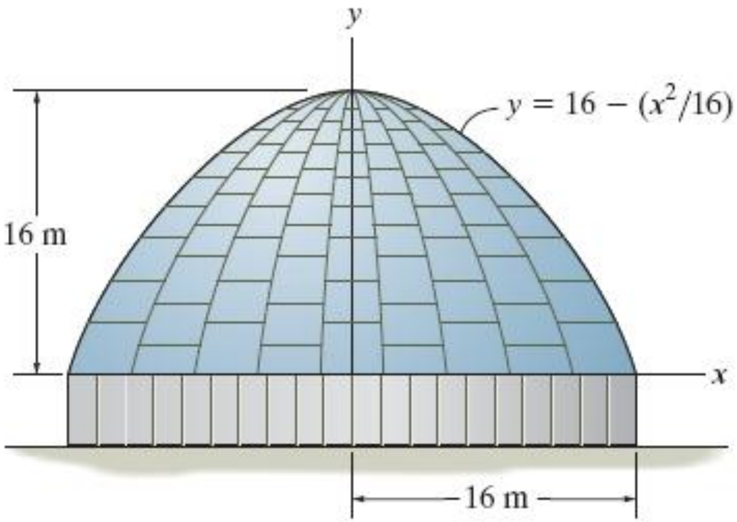


Bereken nu eerst de lengte van *L*:

$$L = \int_0^{16} dL = \int_0^{16} \left(\sqrt{1+\frac{x^2}{64}}\right)dx = 23.633m$$

Hoe nu verder?

Problem 9-114 b

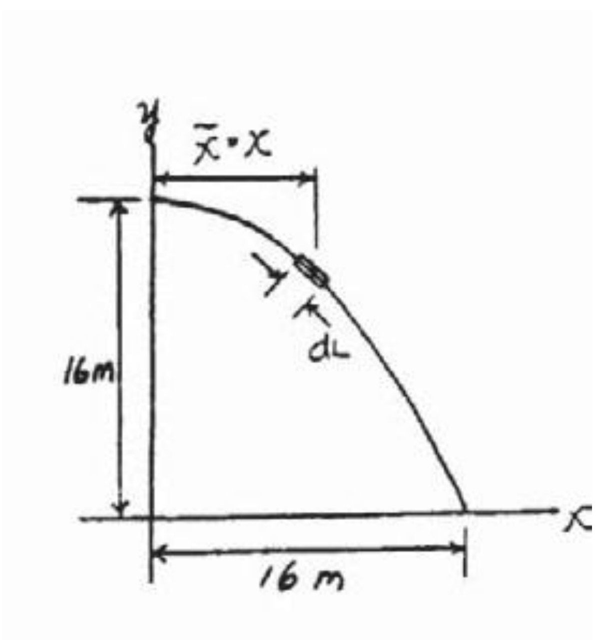


Bereken nu $\bar{x}$:

$$\bar{x} = \frac{\int_L \tilde{x}\, dL}{\int_L dL}$$

De noemer hebben we al.

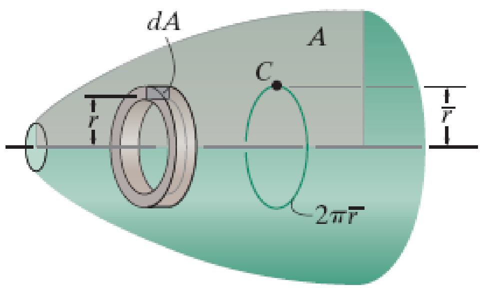
Teller: $$\int_L \tilde{x}\, dL = \int_0^{16} x\left(\sqrt{1+\frac{x^2}{64}}\right)dx = 217.181 m^2$$



$$\bar{x} = \frac{\int_L \tilde{x}\, dL}{\int_L dL} = \frac{217.181}{23.663} = 9.178 m$$

$$A = 2\pi(9.178)(23.663) = 1365 m^2$$

Volume van een omwentelingslichaam



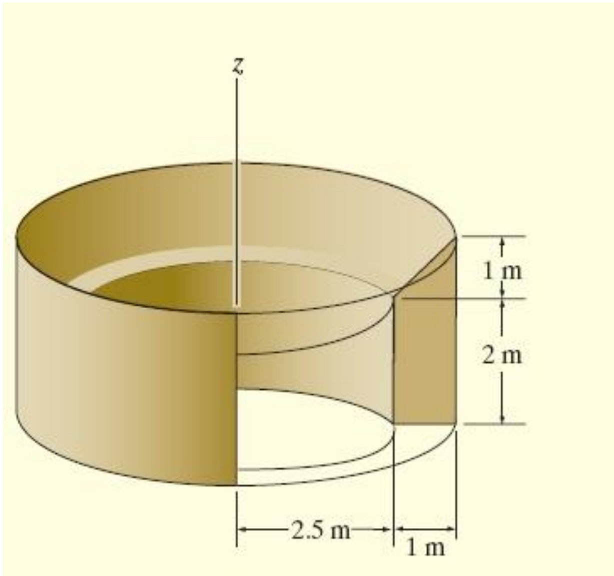
Je krijgt het groene volume door het grijze vlak A om de horizontale as te draaien.
Denk V opgebouwd uit ringetjes met volume dV:

$$dV = 2\pi \tilde{r}\, dA \qquad V = 2\pi \int \tilde{r}\, dA$$

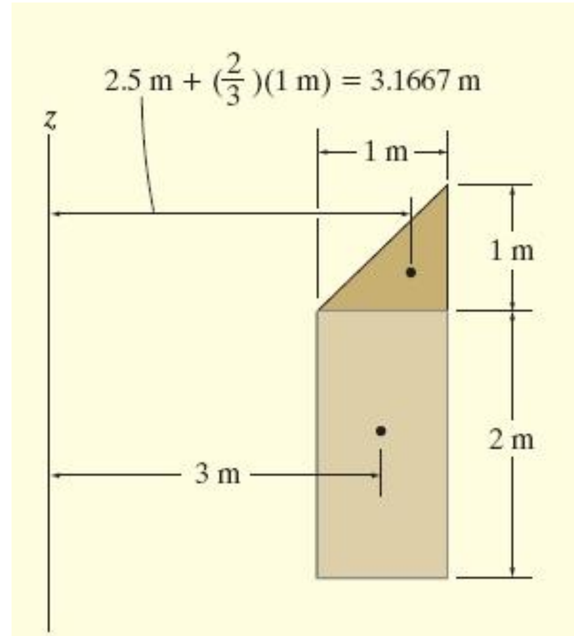
We maken nu gebruik van : $\int \tilde{r}\, dA = \bar{r}A$, zodat $V = 2\pi \bar{r} A$

p.489, 2e theorema:
Het volume van een omwentelingslichaam is het produkt van het vlak dat geroteerd wordt en de afstand die de “gemiddelde afstand tot de hartlijn” aflegt.

Example 9.13 - volume



(a)



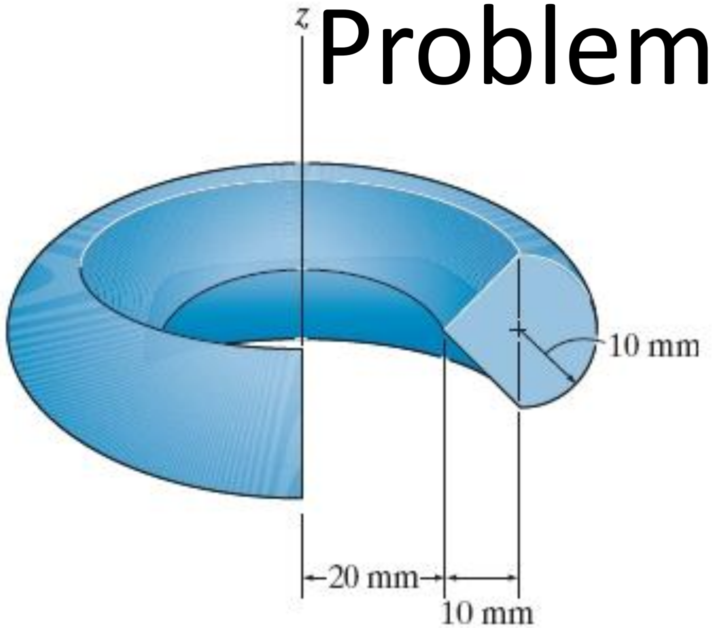
Waar ligt $\bar{x}, \bar{r}$ van de donkerbruine driehoek?

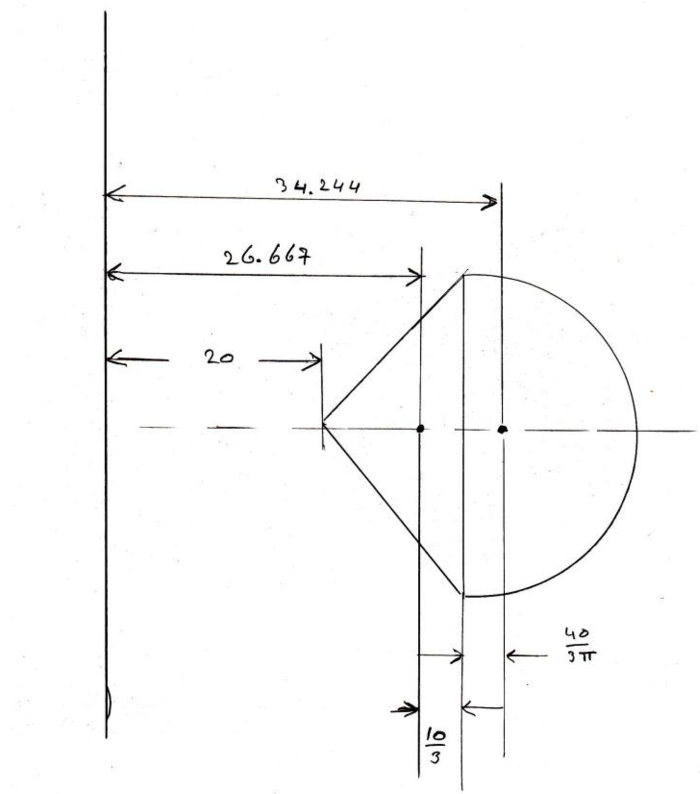
$$\bar{x} = \frac{\int_0^1 x^2\,dx}{\int_0^1 x\,dx} = \frac{\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1}{\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

Bereken nu het volume V van het omwentelingslichaam:

$$V = 2\pi \sum \bar{r}A = 2\pi\left\{(3.1667m)\left[\frac{1}{2}(1m)(1m)\right] + (3m)\left[(2m)(1m)\right]\right\} = 47.6m^3$$

Problem 9-90, 12th ed.





Bepaal het volume van de blauwe ring.

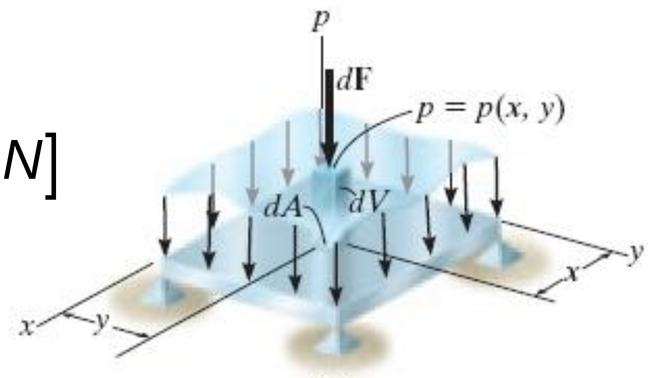
Bepaal eerst de centroide of het zwaartepunt van de twee delen van de doorsnede.

$$V = 2\pi \sum \bar{r} A = 2\pi \left[(26.667)\left(\frac{1}{2}(20)(10)\right) + (34.244)\left(\frac{\pi\left(10^2\right)}{2}\right) \right] = 2\pi(8045.7) = 50552.6\,mm^3$$

Resultante van een verdeelde belasting

Ch 9.4

$$dF = \left(p(x,y)\left[N/m^2\right]\right)\left(dA\left[m^2\right]\right) = \left(p(x,y)\,dA\right)[N]$$

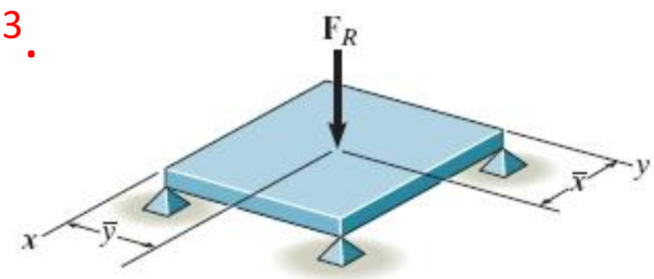


(a)

Hibbeler stelt nu: *(p(x,y))dA=dV*

Dit is geen volume in de normale betekenis.

De eenheid van *dV* en *V* is: N en niet m^3.



(b)

$$F_R = \int_A p(x,y)\,dA = \boxed{\int_V dV = V}$$

$$\bar{x} = \frac{\int_A x\,p(x,y)\,dA}{\int_A p(x,y)\,dA} = \boxed{\frac{\int_V x\,dV}{\int_V dV}}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_A y\,p(x,y)\,dA}{\int_A p(x,y)\,dA} = \boxed{\frac{\int_V y\,dV}{\int_V dV}}$$

Hydrostatische druk – Ch 9.5

$$p = \rho g z$$

$$p\left[N/m^2\right] = \rho\left[kg/m^3\right] g\left[N/kg\right] z\left[m\right]$$

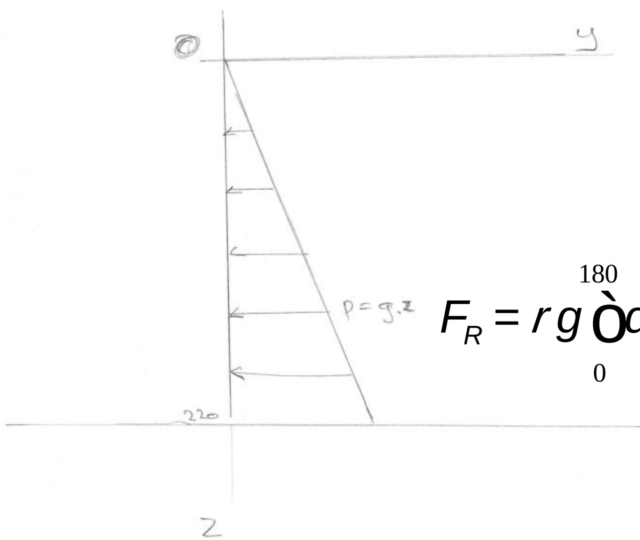
Hydrostatische druk is in alle richtingen hetzelfde.
De vergelijking geldt alleen voor incompressibele vloeistoffen.

Hoover dam

Benadering van Hoover dam

Vlakke plaat: hoogte 220 m
breedte 180 m

Hoe groot is de kracht die het water op de dam uitoefent en waar grijpt de resultante aan?



$$dF = p(z)\,dx\,dz = \rho g z\,dx\,dz$$

$$F_R = \rho g \int_0^{180} dx \int_0^{220} z\,dz = \rho g \left(x\Big|_0^{180} \right) \left(\frac{1}{2} z^2 \Big|_0^{220} \right) = 9810(180)(24200) = 42.7 \times 10^9\ N$$

$$\bar{z} = \frac{\int_0^{220} z(\rho g z)\,dz}{F_R}$$

De resultante grijpt aan op 1/3 vanaf de onderkant.

Huiswerk

Kennis nemen van Toets 15:	0.5 uur
Terugkijken op paragraaf 9.3 en 9.4:	0.5 uur
Toets 15 maken*:	4.5 uur
Voorbereiden paragraafen 9.5	1.0 uur
	_______ +
Totaal:	6.5 uur

Begin ook alvast met het herhalen van de eerdere stof, maak b.v. de tussentoets nog een keer, zieBb.

* Als je niet uit de sommen van Toets 15 komt, of geen toegang hebt, begin dan met de “fundamental problems” uit het boek en doe vervolgens wat gewone opgaven. Ook in schrift, ook meenemen naar werkcollege.