# Statica (WB) college 17
# Virtual work Ch. 11.1 – 11.3

Guido Janssen
G.c.a.m.janssen@tudelft.nl

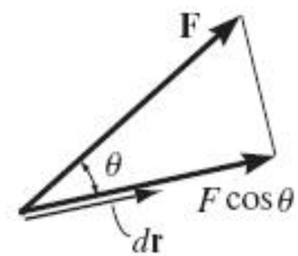
# Arbeid

Arbeid wordt vaak aangeduid met de letter *W* (work), hier in Hibbeler met de letter *U* (de *W* is al vergeven aan weight).

Arbeid is een scalaire grootheid.

Arbeid wordt verricht door een kracht. Te simpel: U=Fs.

Houd rekening met richting van kracht en verplaatsing, dan:

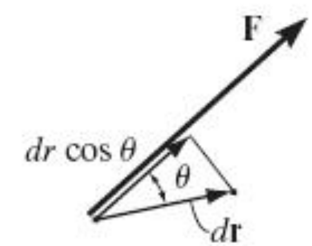



(a)

$$dU = F\,dr\cos\theta$$

$$dU = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

$$U = \int_r \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$



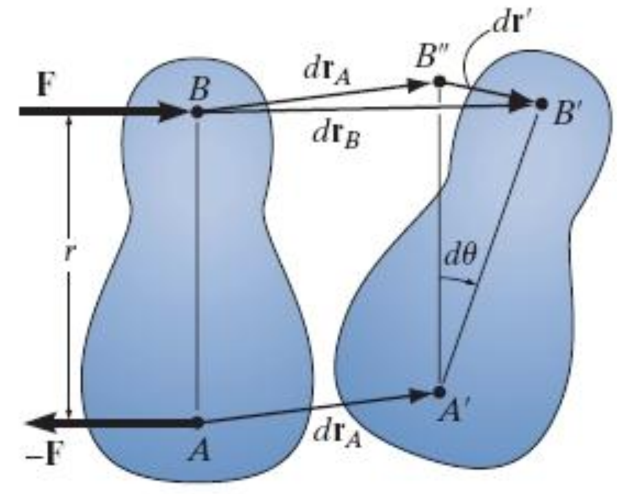

(b)

# Arbeid verricht door een koppel

Het koppel **F** en –**F** verricht arbeid door het lichaam van de posities A en B te verplaatsen naar de posities A’ en B’.

Doe de verplaatsing in twee stappen: Eerst A naar A’ en B naar B”. Dit is een zuivere translatie. **F** en –**F** verrichten samen precies géén arbeid.

De rotatie om A’ die B” verplaatst naar B’ wordt veroorzaakt door de kracht **F** die aangrijpt in B”




$$dU = \mathbf{F} \times d\mathbf{r}' = |\mathbf{F}||\mathbf{r}|\,dq = Fr\,dq$$

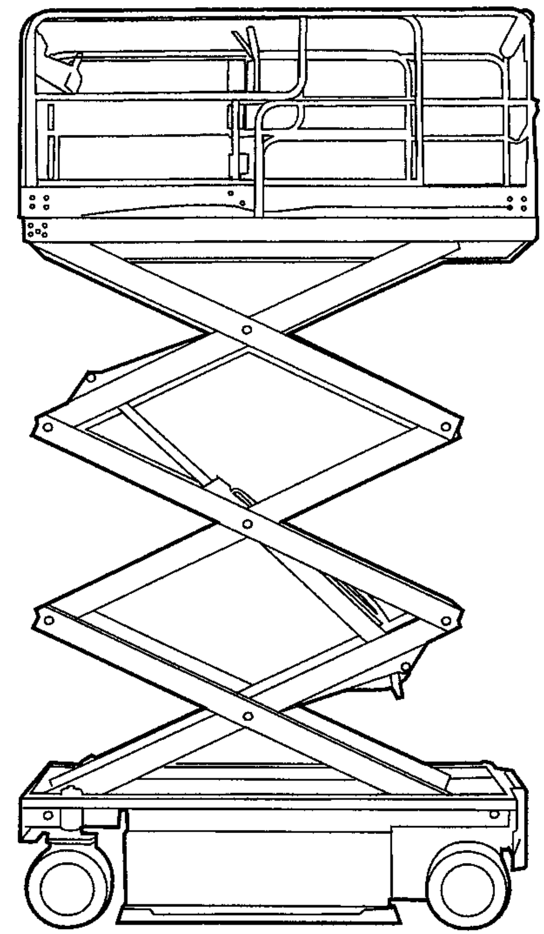
$$M = Fr$$

$$dU = M\,dq$$

# Virtuele arbeid, virtual work

In evenwicht transleert of roteert een gekozen “Free Body” niet.
Tot nu toe rekenden we dan het krachten- en momenten-evenwicht uit.

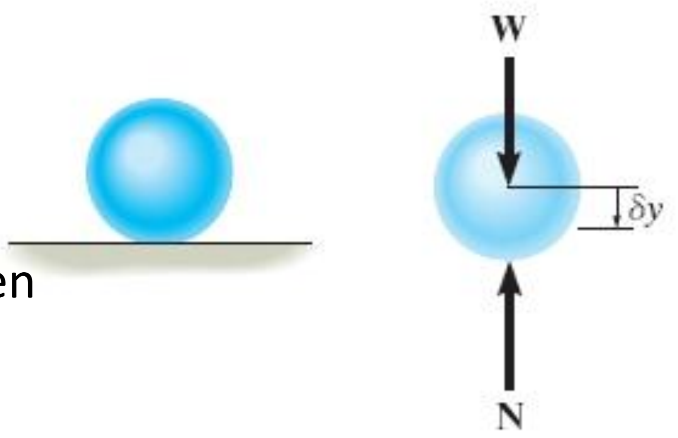
Nu zeggen we: Stel dat het toch een klein beetje beweegt. Dan verrichten de krachten en momenten die bij die beweging horen arbeid.
We berekenen die arbeid.
We stellen die arbeid gelijk aan nul.
En vinden zo de gezochte relatie tussen de krachten en momenten.



We gebruiken de symbolen: $dU, dr, dq$

$$dU = F\cos q\,dr \qquad\qquad dU = M\,dq$$

# Virtuele arbeid, voorbeeld 1




Op de blauwe kogel werken twee krachten:
Het gewicht **W** en de normaalkracht **N**.

I.p.v. krachtenevenwicht zeggen we nu:
Laten we de kogel eens een stukje δ*y* verplaatsen evenwijdig aan de krachten. (pos. y-as naar beneden)
Vervolgens rekenen we de verrichte arbeid uit.
Die stellen we nul en zo vinden we het verband tussen de krachten.

$$\delta U = W\delta y - N\delta y = (W - N)\delta y$$

Als dit moet gelden voor een willekeurige δ*y*≠0,
dan volgt *W*=*N*.

# Virtuele arbeid, voorbeeld 2

Voorbeeld van Feynman uit:
"Lectures on Physics":
Hoe groot moet het gewicht W zijn voor evenwicht?

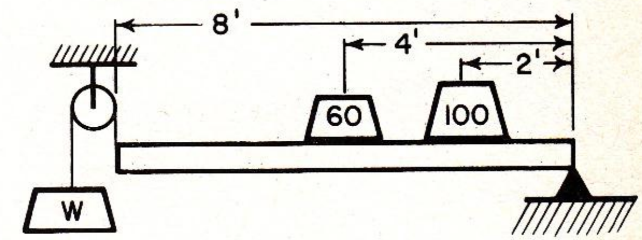


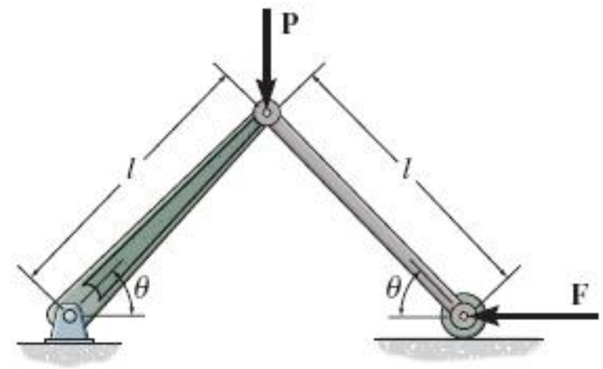
Fig. 4–6. Weighted rod supported on one end.

Zeg dat het gewicht W over een afstand van 4" zakt, dan (pos. y-as naar beneden):

$$4W - (2)(60) - (1)(100) = 0$$
$$W = 55 lbs.$$

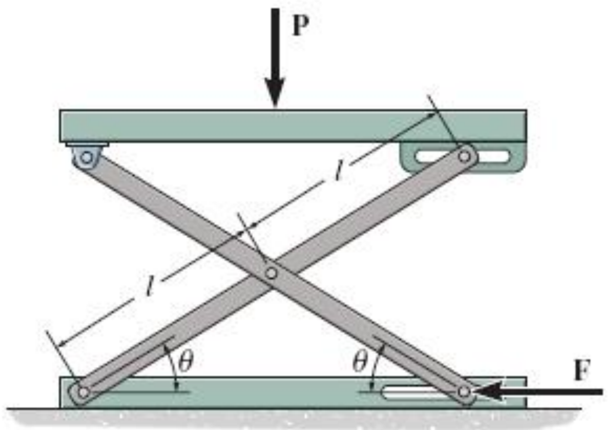
# Virtuele arbeid voor verbonden lichamen

In de vorige voorbeelden bood virtuele arbeid geen echt voordeel. Hier wel.




Met slechts één parameter, θ, is de positie van elk punt van de samenstelling bepaald.

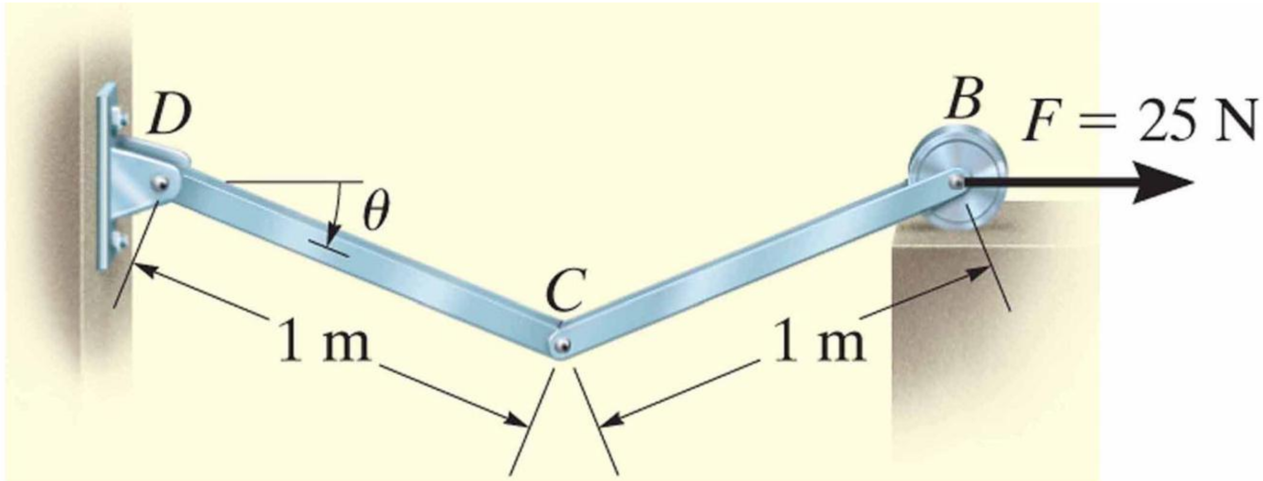
Een verandering van θ, met een bedrag δθ leidt tot verplaatsingen in de richting van de krachten en dus tot virtuele arbeid.




Bij twee krachten, één keer een verplaatsing in de richting van de kracht en één keer er tegenin.

Lees even mee met de “Procedure for Analysis, pag.572

# Example 11.1a




Beide staven hebben een massa van 10kg en een lengte van 1m.
Bepaal de hoek θ waarbij de constructie in evenwicht is.

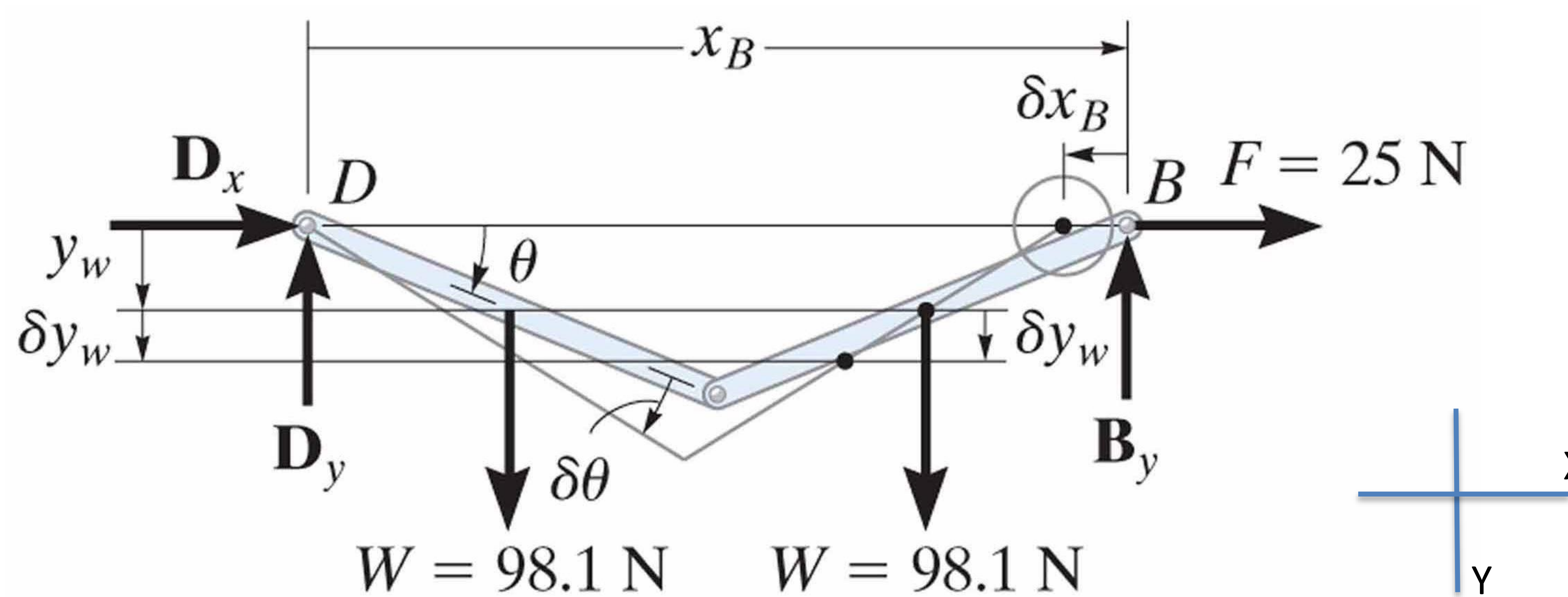
Bepaal de horizontale positie van B als functie van θ.
Bepaal de verticale posities van de zwaartepunten van de staven als functie van θ.

Bepaal de variatie in de positie van B, $\delta x_B$.
Bepaal de variatie in de posites van de zwaartepunten, $\delta y_W$.

Bepaal de virtuele arbeid t.g.v. van een verandering van θ met δθ.

Realiseer je dat in evenwicht er geen arbeid verricht wordt bij een verandering δθ.

# Example 11.1 b




Neem oorsprong bij D, positieve x as naar rechts, positieve y-as naar beneden.
Het tekenen van pijltjes voor de δ's is verwarrend.

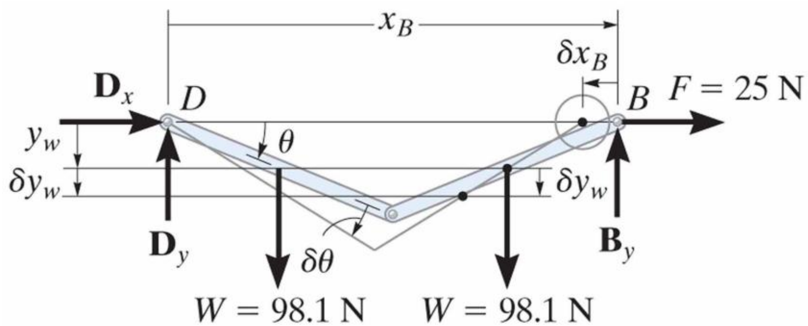
$$x_B = 2\left(1\cos q\right)m$$

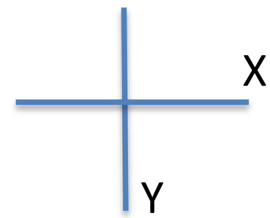
$$dx_B = -\,2\sin q dq m$$

$$y_w = \frac{1}{2}\left(1\sin q\right)m$$

$$dy_w = \frac{1}{2}\cos q dq m$$

# Example 11.1c




$$\delta x_B = -2\sin\theta\,\delta\theta\,m$$

$$\delta y_w = \frac{1}{2}\cos\theta\,\delta\theta\,m$$

$$W\delta y_w + W\delta y_w + F\delta x_B = 0$$

$$98.1(0.5\cos\theta\,\delta\theta) + 98.1(0.5\cos\theta\,\delta\theta) + 25(-2\sin\theta\,\delta\theta) = 0$$

$$(98.1\cos\theta - 50\sin\theta)\,\delta\theta = 0$$

$$\tan\theta = \frac{98.1}{50}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{98.1}{50}\right) = 63.0°$$

# Example 11.2a

Bereken de grootte van de kracht P, nodig om de hoek θ op 60° te houden.
De veerconstante bedraagt 5 kN/m. De veer is ongerekt bij θ=30°.

Neem de oorsprong bij A, X-as positief naar rechts.

$$F_s = ks = 5000\,N/m\left[(0.3m)\sin\theta - (0.3m)\sin 30°\right]$$

$$F_s = (1500\sin\theta - 750)\,N$$

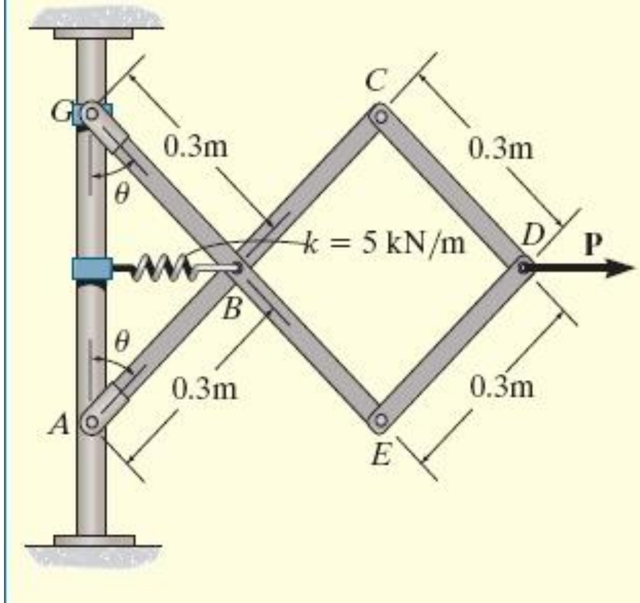
Virtuele verplaatsing van B en D uitgedrukt in θ.

$$x_B = (0.3m)\sin\theta$$

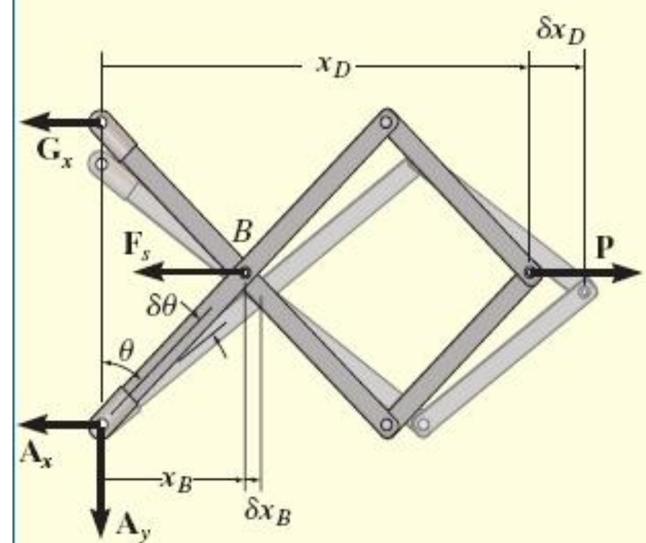
$$x_D = 3\left[(0.3m)\sin\theta\right] = (0.9m)\sin\theta$$

$$\delta x_B = 0.3\cos\theta\,\delta\theta$$

$$\delta x_D = 0.9\cos\theta\,\delta\theta$$




(a)




(b)

# Example 11.2b

Virtuele arbeid:

$$dU = - F_s dx_B + P dx_D = 0$$

$F_s$ staat naar links, vandaar het min-teken. $\delta_{B:}$ kijk niet naar het pijltje maar naar het al dan niet voorkomen van een minteken in de uitdrukking.

$$dU = - F_s\left(0.3\cos q dq\right) + P\left(0.9\cos q dq\right) = 0$$

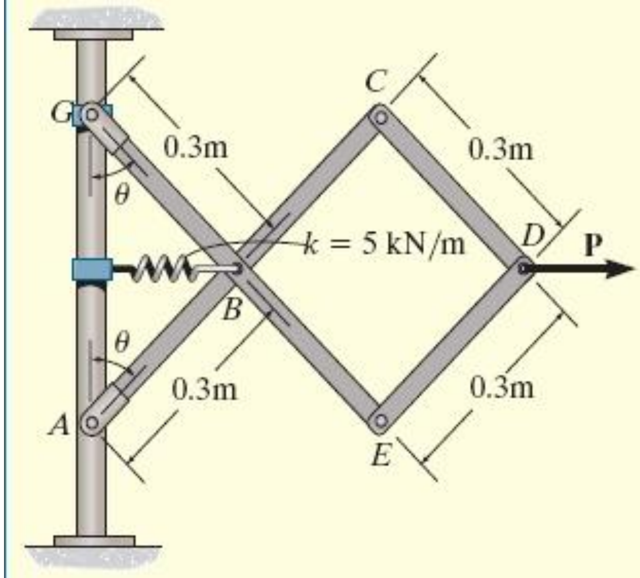
$$\left(- 0.3F_s + 0.9P\right)\cos q dq = 0$$

$$F_s = \left(1500\sin q - 750\right)N$$

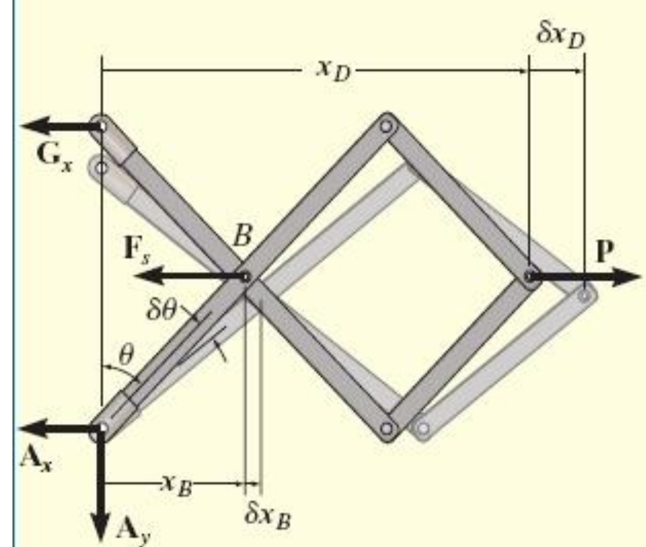
$$P = 500\sin q - 250$$

$$q = 60°$$

$$P = 183N$$

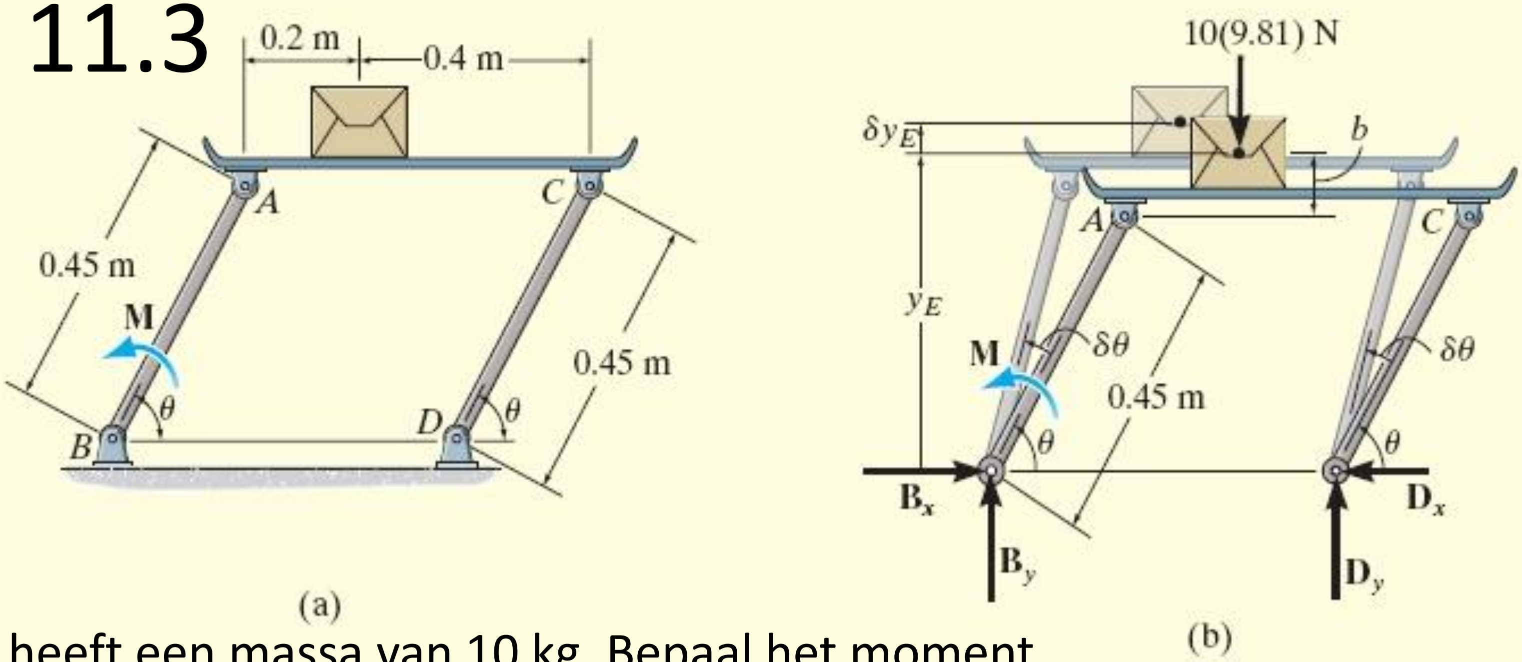



(a)




(b)

# Example 11.3




De doos heeft een massa van 10 kg. Bepaal het moment $M_B$ dat nodig is om evenwicht te genereren bij θ=60°. Neem de oorsprong in B en de positieve Y-as naar boven.

Hier is theta linksom positief genomen, i.t.t. Example 11.1, δθ is de toename van θ.

$$y_E = (0.45)\sin\theta + b$$

$$\delta y_E = 0.45\cos\theta\,\delta\theta$$

Virtuele arbeid vergelijking:

$$M\delta\theta - \left[10(9.81)\,N\right]\delta y_E = 0$$

Invullen van $\delta y_E$ en δθ buiten haakjes halen:

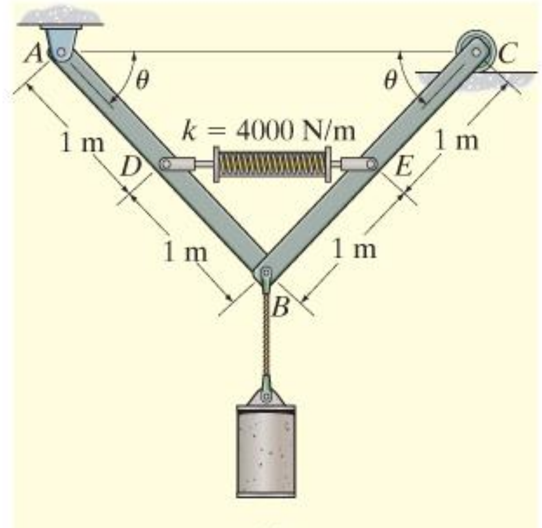
$$(M - 44.145\cos\theta)\,\delta\theta = 0$$

$$\theta = 60^\circ$$

$$M_B = 44.145\cos 60^\circ = 22.1\,Nm$$

# Example 11.4

Het mechanisme houdt de 1000N cylinder omhoog. Bepaal de evenwichtshoek θ, als de veerconstant 4000N/m is en de ongespannen lengte van de veer 2m bedraagt.

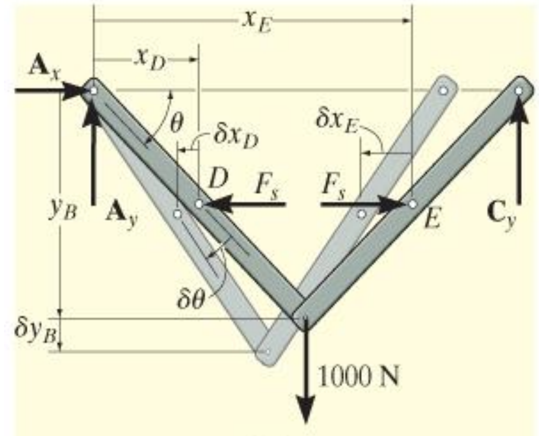


(a)

$$F_s = ks = (4000\,N/m)(2m - 2m\cos q) = (8000 - 8000\cos q)\,N$$

Oorsprong in A, pos. X-as naar rechts, pos. Y-as naar beneden.

Posities en virtuele verplaatsingen (pijltjes in δ’s zijn verwarrend):



(b)

$$x_D = (1m)\cos q \qquad dx_D = -1\sin q\,dq$$

$$x_E = (3m)\cos q \qquad dx_E = -3\sin q\,dq$$

$$y_B = (2m)\sin q \qquad dy_B = 2\cos q\,dq$$

$$dU = F_s dx_E + 1000\,dy_B - F_s dx_D = 0$$

$$(8000 - 8000\cos q)(-3\sin q\,dq) + 1000(2\cos q\,dq) - (8000 - 8000\cos q)(-1\sin q\,dq) = 0$$

Oplossen door proberen of Maple: $q = 34.9°$

# Huiswerk

| | |
|---|---|
| Kennis nemen van Toets 17: | 0.5 uur |
| Terugkijken op paragraaf 11.1 t/m 11.3: | 0.5 uur |
| Toets 16 maken*: | 4.5 uur |
| Voorbereiden paragrafen 11.4 en 11.5 | 1.0 uur |
| | _______ + |
| Totaal: | 6.5 uur |

Begin ook alvast met het herhalen van de eerdere stof, maak b.v. de tussentoets nog een keer en ook het oefententamen, zieBb.

* Als je niet uit de sommen van Toets 17 komt, of geen toegang hebt, begin dan met de “fundamental problems” uit het boek en doe vervolgens wat gewone opgaven. Ook in schrift, ook meenemen naar werkcollege.