Statica (WB/MT) college 2 Krachtvectoren

Guido Janssen
G.c.a.m.janssen@tudelft.nl

Scalairen en vectoren

De wiskunde die wij nodig hebbben voor Statica maakt gebruik van twee soorten grootheden:

Scalairen: hebben alleen een grootte, b.v. massa.

Vectoren: hebben een grootte en een richting, b.v. kracht.

Bij wiskunde leren jullie hoe je met deze grootheden mag rekenen. Dat is essentieel om goed te worden in Statica. Vandaag krijgen jullie in vogelvlucht een voorproefje van die wiskunde.

Vectoren

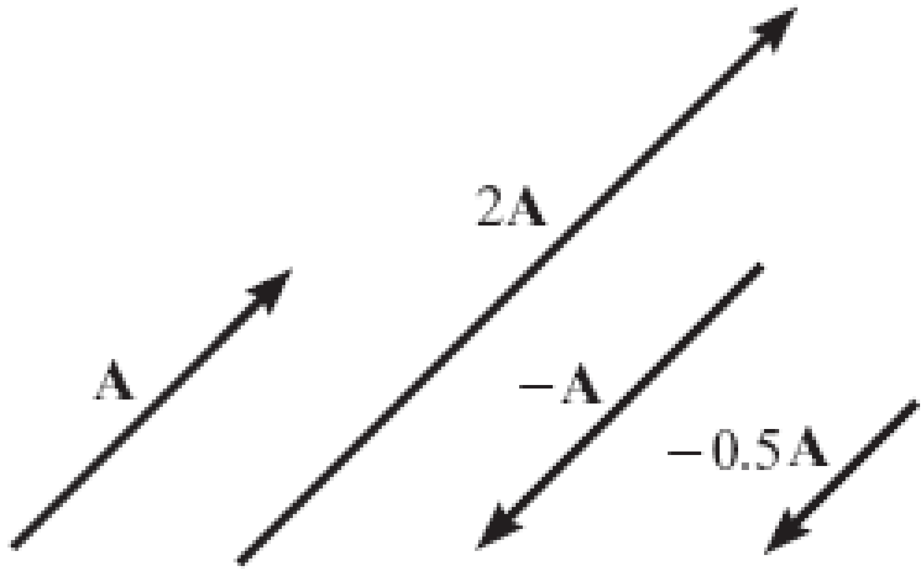
Vectoren worden op verschillende manieren aangeduid:

$$\mathbf{F}, \vec{F}, \underline{F}$$

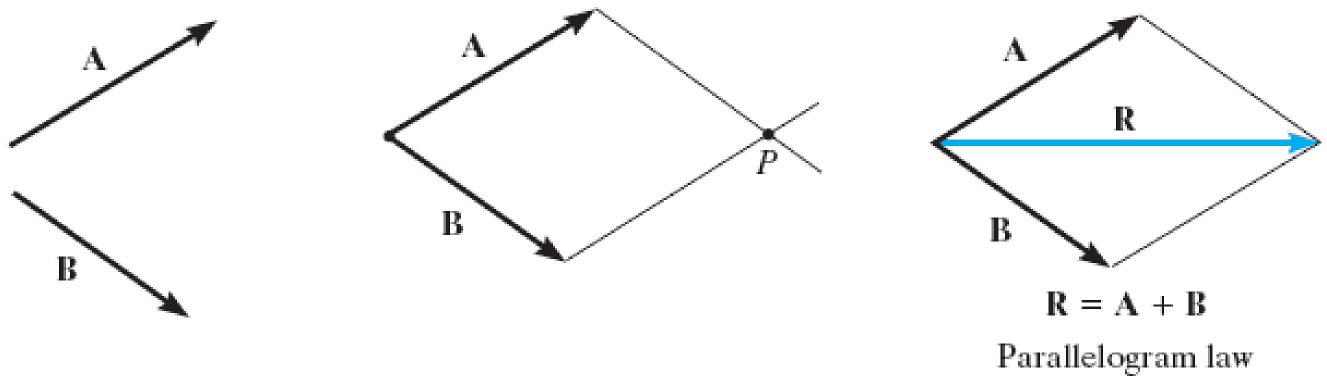
De grootte van een vector wordt als volgt aangegeven:

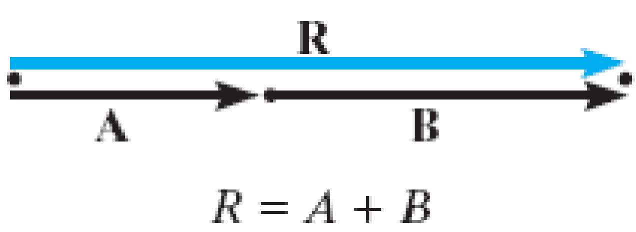
$$|\mathbf{F}|, |\vec{F}|, |\underline{F}|$$

Product van vector en scalar



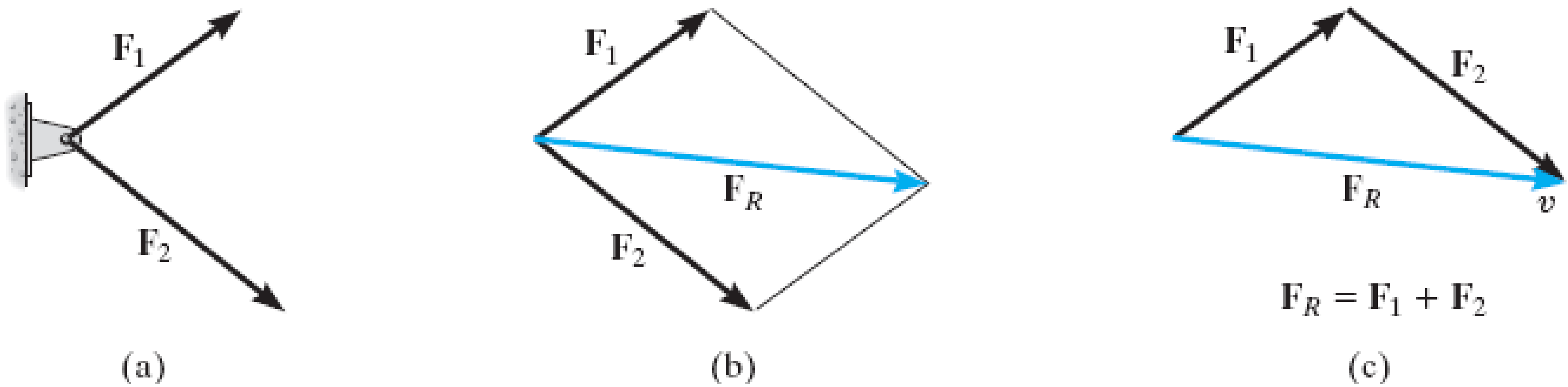
Optellen van vectoren





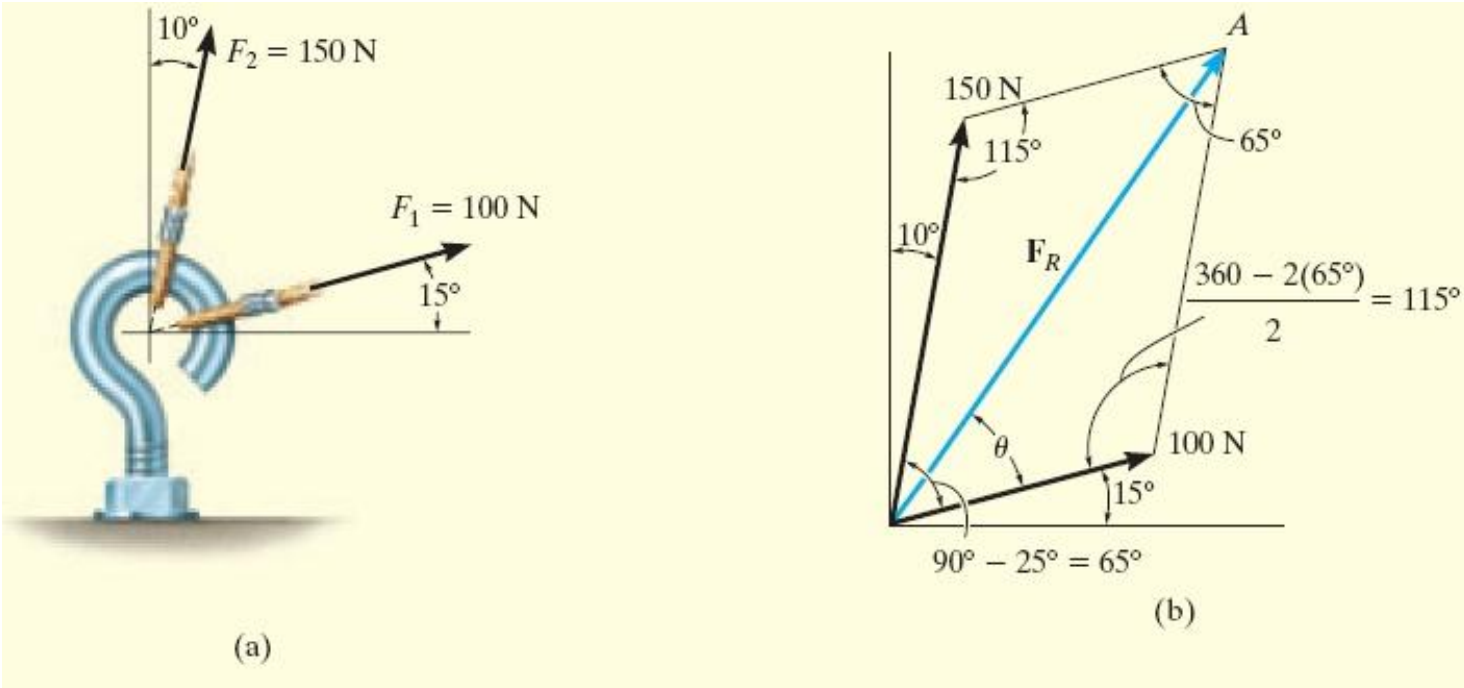
Optellen van evenwijdige vectoren

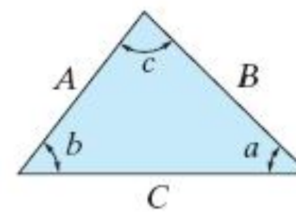
Vinden van de resulterende kracht



$$\mathbf{F}_R = (\ \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2\ )$$

Example 2.1





Cosine law:

$$C = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos c}$$

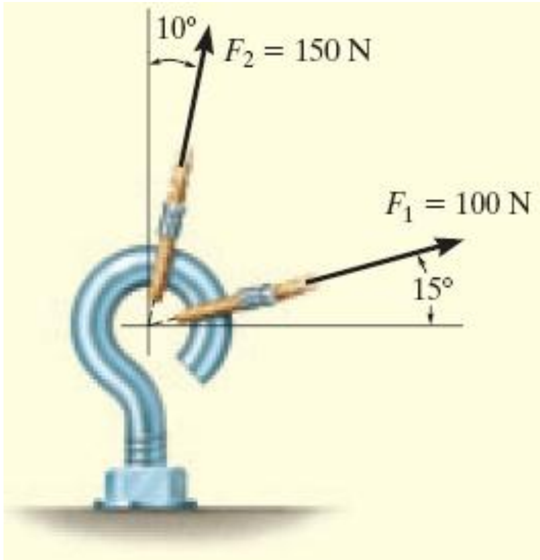
Sine law:

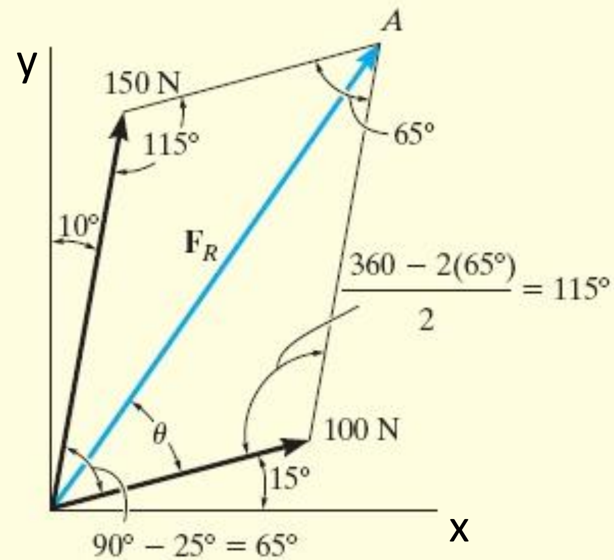
$$\frac{A}{\sin a} = \frac{B}{\sin b} = \frac{C}{\sin c}$$

Bereken de grootte van de resulterende kracht:
Zie boek voor gonio oplossing, gebruik makend van:
Dit kan soms handig zijn.

Wij doen het met vectoroptelling.

Example 2.1 vectoroptelling





$$\mathbf{F_1} = \left(\mathbf{i}\cos(15°) + \mathbf{j}\sin(15°)\right)100N$$

$$\mathbf{F}_2 = \left(\mathbf{i}\cos(80°) + \mathbf{j}\sin(80°)\right)150N$$

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$$

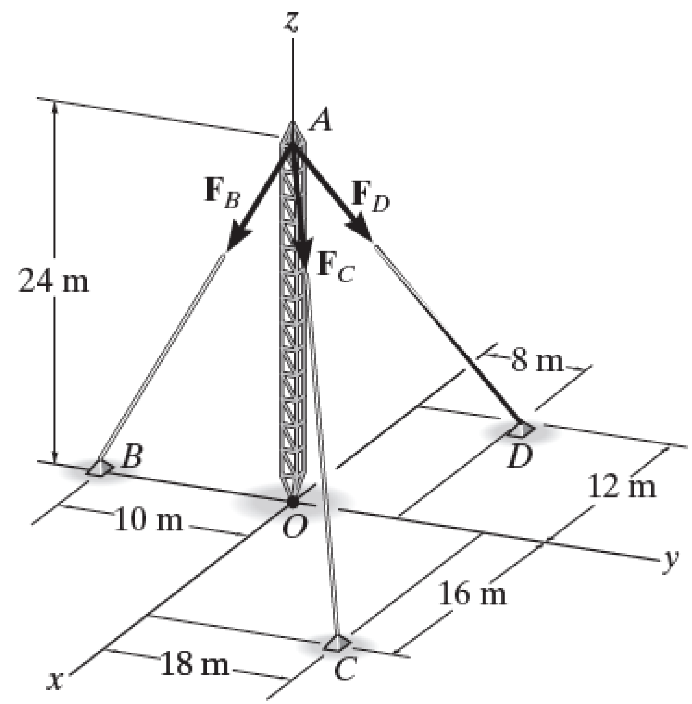
$$\mathbf{F}_R = \left(\mathbf{i}\left(100\cos(15°) + 150\cos(80°)\right) + \mathbf{j}\left(100\sin(15°) + 150\sin(80°)\right)\right)N$$

$$\mathbf{F}_R = 122.640\mathbf{i} + 173.603\mathbf{j}$$

$$\left|\mathbf{F}_R\right| = \sqrt{122.640^2 + 173.603^2} = 213N$$

Assenstelsel

Vector vraagstukken kunnen handig geformuleerd worden als de ruimte wordt opgespannen in een handig gekozen coordinatenstelsel.



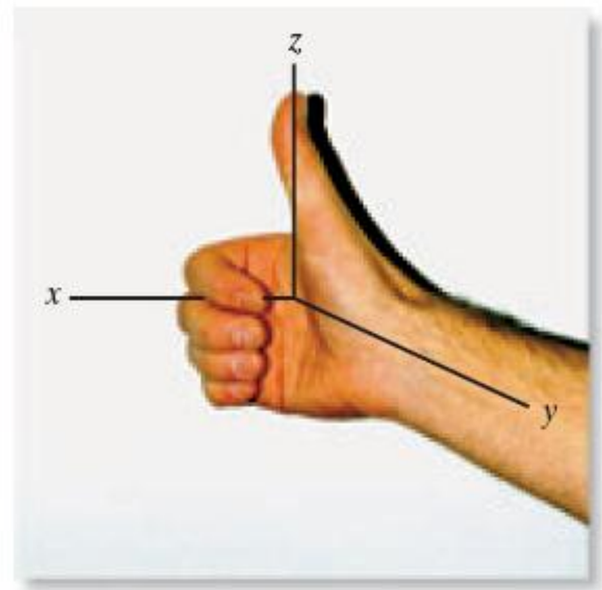
Let op: de vectoren bestaan onafhankelijk van dit assenstelsel. Het assenstelsel wordt door ons gekozen als een middel om het rekenen makkelijker te maken.

Opgave 2-104 (12^{th}) 2-105 (13^{th}): Bereken de resulterende kracht op de zendmast, t.g.v. van de krachten in de tui-draden.

Rechtshandig assenstelsel

Altijd doen:

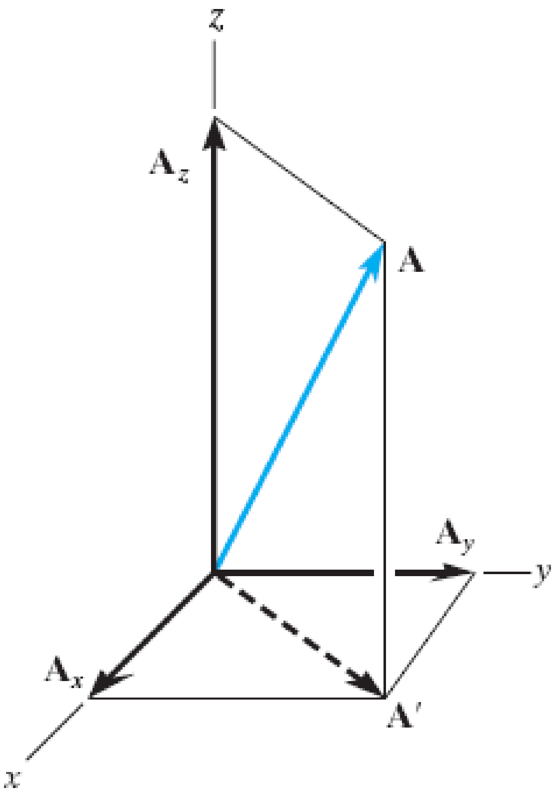
Als je de x-as naar de y-as draait, dan beweegt een rechtshandige schroef zich in de richting van de positieve z-as.
Ook wel rechterhandregel, zie figuur hiernaast.



Kies je assenstelsel handig, maar altijd rechtshandig!

Componenten van vectoren

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_x + \mathbf{A}_y + \mathbf{A}_z$$



Eenheidsvectoren

De grootte van een vector **A** wordt gegeven door |**A**|.

De richting van **A** wordt gegeven door de eenheidsvector (unit vector) $\mathbf{u}_A$.

$$\mathbf{u}_{\mathbf{A}} = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}$$

$$|\mathbf{u}_A| = ?$$

$$|\mathbf{u}_A| = 1$$

Eenheidsvectoren **i**,**j**,**k**, langs de assen

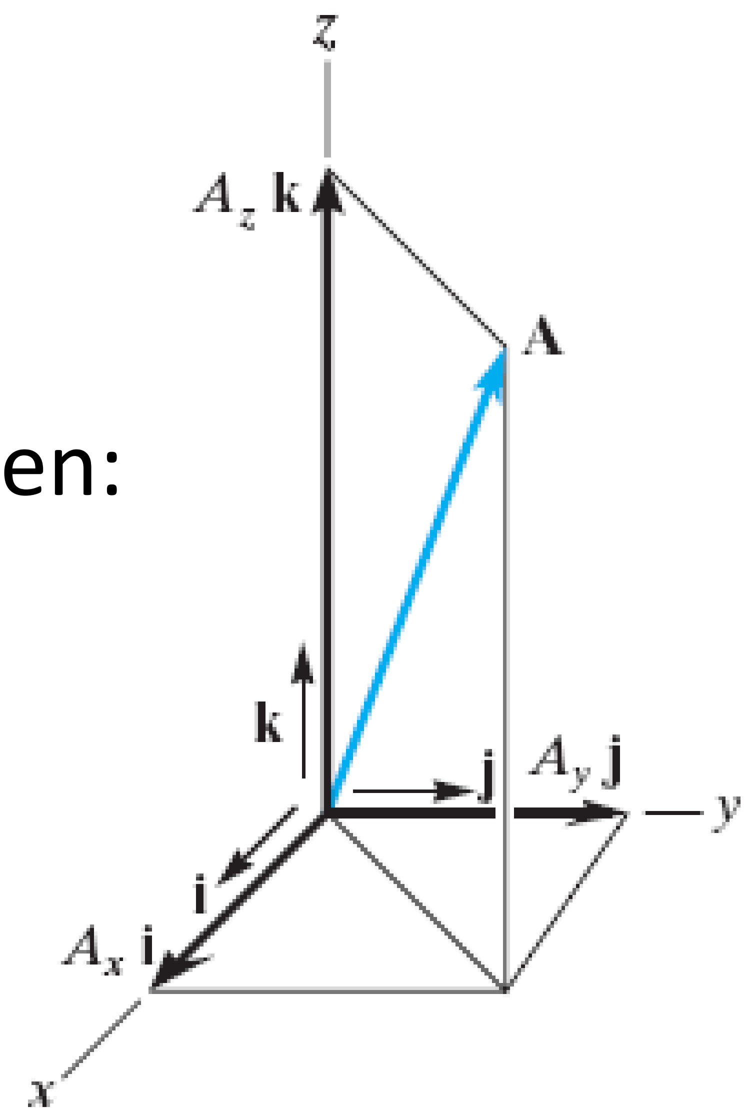
We hadden al:

$\mathbf{A} = \mathbf{A_x} + \mathbf{A_y} + \mathbf{A_z}$

Nu kunnen we ook schrijven:

$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$

$$A = |\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$



Vectoren

Een vector heeft groote en richting.
Een kracht is een vector.

Om met een kracht te kunnen rekenen hebben we niet alleen grootte en richting nodig, maar ook een aangrijpingspunt.

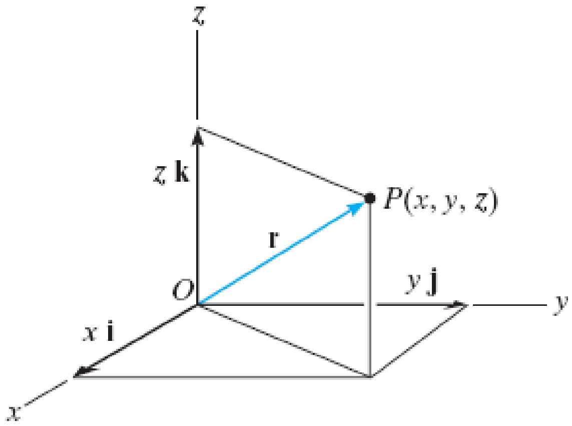
Anders geformuleerd: Om met een kracht te kunnen rekenen hebben we grootte, richting en werklijn nodig.

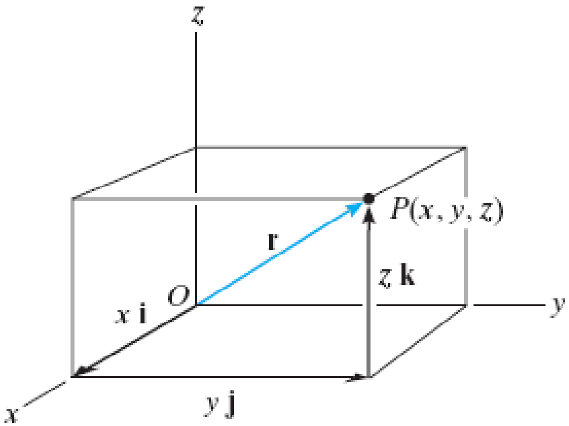
(Een vector die evenwijdig verschoven wordt is dezelfde vector. Een kracht die evenwijdig verschoven wordt heeft een ander effect.)

Werklijnen hangen we op aan positievectoren

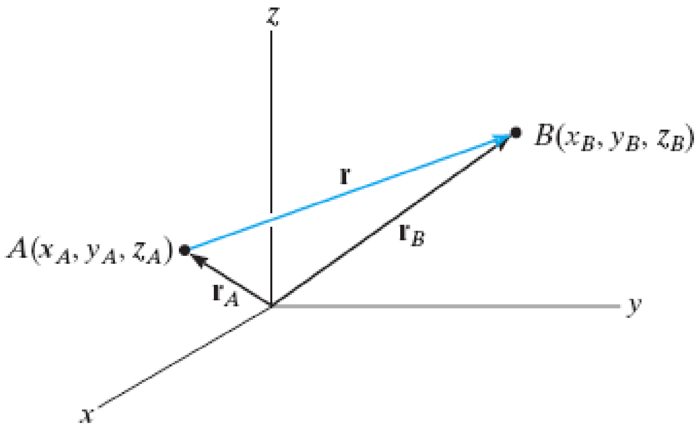
Positievector **r** beschrijft een punt P(x,y,z) in de ruimte t.o.v. ons coördinatenstelsel: **r** = x**i** + y**j** +k**z**.

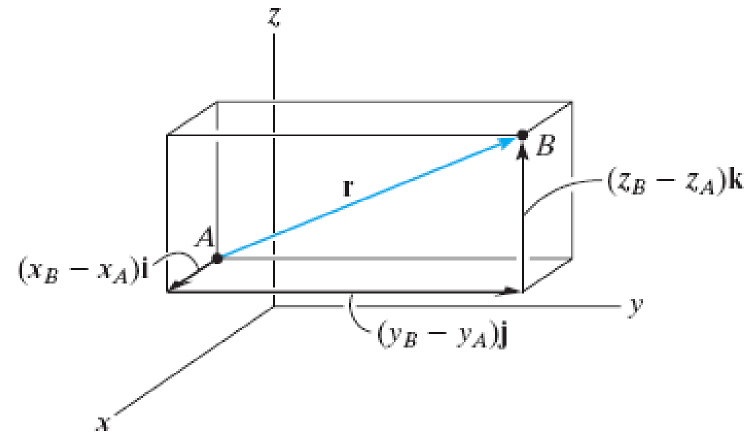
Twee positievectoren $\mathbf{r_A}$ **en** $\mathbf{r_B}$ bepalen samen een werklijn.





Richting van de werklijn





Bepaal de richting van de werklijn van A naar B:

Bepaal eerst de vector **r.**

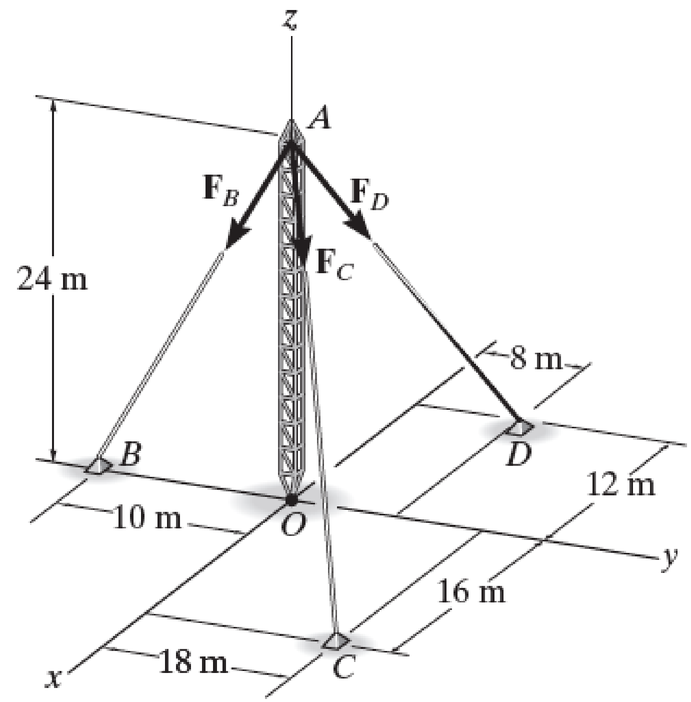
Bepaal vervolgens $\mathbf{u}_r$.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A = (x_B - x_A)\mathbf{i} + (y_B - y_A)\mathbf{j} + (z_B - z_A)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{u}_r = \frac{(x_B - x_A)\mathbf{i} + (y_B - y_A)\mathbf{j} + (z_B - z_A)\mathbf{k}}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}$$

Probleem 2-104 (12^{th})

Gegeven dat |**F_D**| = 560 N,
Bereken de **F_D** in cartesische coordinaten.



Vector **r_{AD}** = (-12 – 0)**i** + (8 - 0)**j** +(0 – 24)**k**

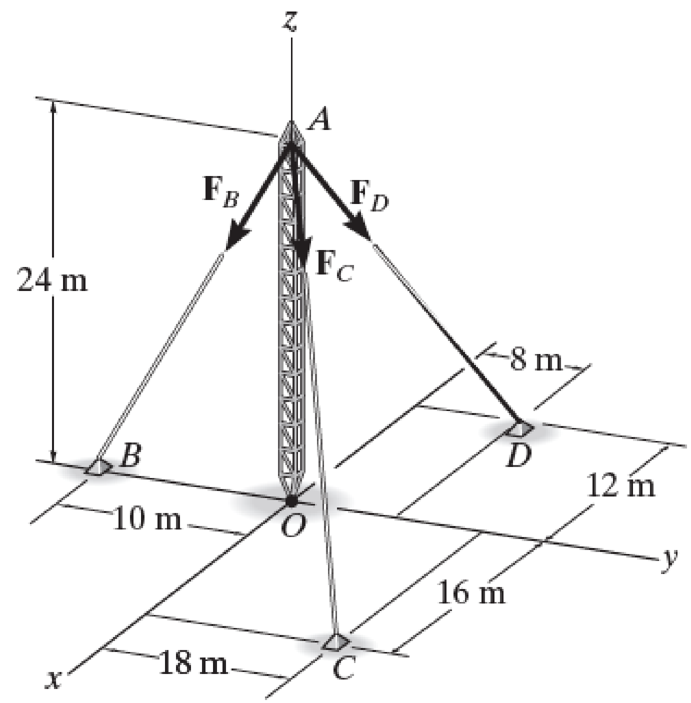
Bereken nu de eenheidsvector **u_{AD}**:

$$\mathbf{u}_{AD} = \frac{-12\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 24\mathbf{k}}{\sqrt{12^2 + 8^2 + 24^2}} = -\frac{12}{28}\mathbf{i} + \frac{8}{28}\mathbf{j} - \frac{24}{28}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}_D = -\frac{12 \times 560}{28}\mathbf{i} + \frac{8 \times 560}{28}\mathbf{j} - \frac{24 \times 560}{28}\mathbf{k} = \{-240\mathbf{i} + 160\mathbf{j} - 480\mathbf{k}\}\ N$$

Probleem 2-104 vervolg

$|\mathbf{F_B}|$=520N, $|\mathbf{F_C}|$=680N.
Bereken de resulterende kracht $\mathbf{F_R}$ die de drie tuidraden in punt A op de zendmast uitoefenen.



$$\mathbf{F}_B = -200\mathbf{j} - 480\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}_C = 320\mathbf{i} + 360\mathbf{j} - 480\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}_D = -240\mathbf{i} + 160\mathbf{j} - 480\mathbf{k}$$

optellen

$$\mathbf{F}_R = \{80\mathbf{i} + 320\mathbf{j} - 1440\mathbf{k}\}\ N$$

Is dit goed ontworpen?

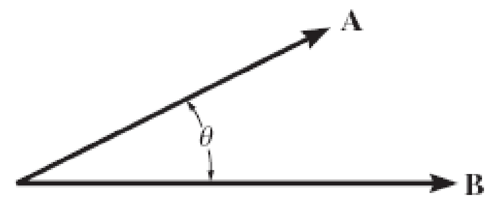
Inprodukt (dot product)

Het inprodukt van twee vectoren (**A** in **B**) is een scalar.

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \equiv A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

Ook geldt:

A·B = *AB* cosθ where 0° ≤ θ ≤180°



Dat kun je gebruiken om de hoek tussen twee vectoren uit te rekenen:

$$\cos(q) = \frac{\mathbf{A} \times \mathbf{B}}{|A||B|} = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}}$$

Inprodukt van cartesische eenheidsvectoren

Via componenten:

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = (1 \times 1) + (0 \times 0) + (0 \times 0) = 1$$

Het kan ook door naar de hoek te kijken:

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = (1)(1)\cos(0°) = 1$$

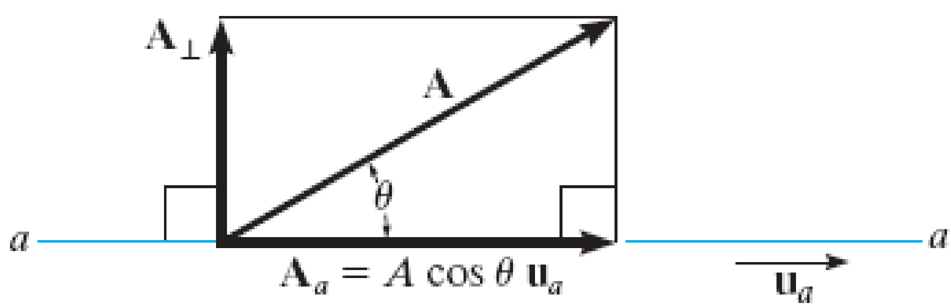
$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 1$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{i} \times \mathbf{k} = \mathbf{j} \times \mathbf{k} = 0$$

Component van een vector in een bepaalde richting

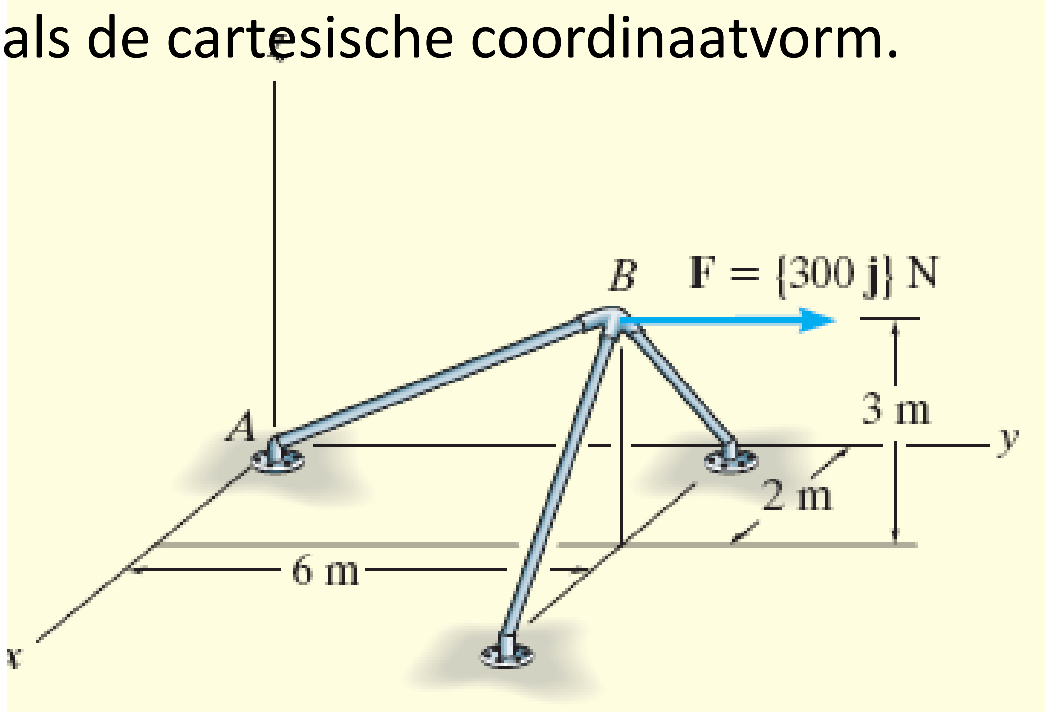
De component A_a van een vector **A** in de richting **a** wordt gegeven door:

$$A_a = \mathbf{A} \times \mathbf{u}_a = |\mathbf{A}|\cos(q)$$

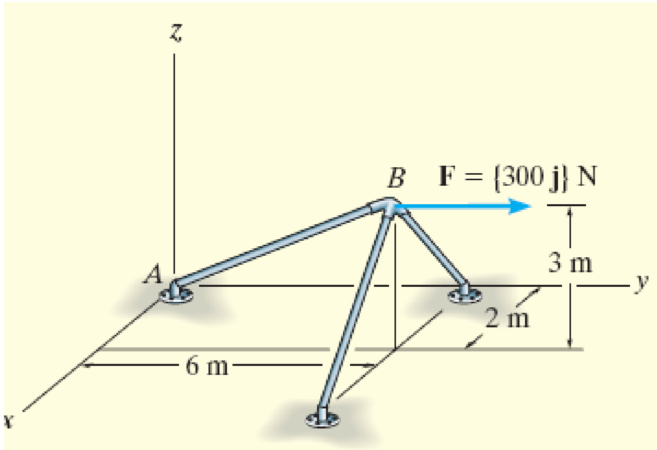


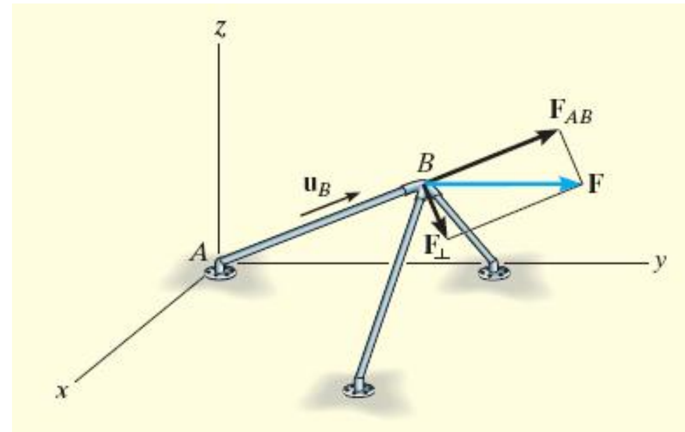
Toepassing van het inprodukt

Het frame wordt belast met een horizontale kracht **F** = {300**j**}N. Bepaal van de component van **F** in de richting AB zowel de grootte als de cartesische coordinaatvorm.



Oplossing





$$\mathbf{u}_{AB} = \frac{\mathbf{r}_{AB}}{\left|\mathbf{r}_{AB}\right|} = \frac{2\mathbf{i}+6\mathbf{j}+3\mathbf{k}}{\sqrt{2^2+6^2+3^2}} = \frac{2}{7}\mathbf{i}+\frac{6}{7}\mathbf{j}+\frac{3}{7}\mathbf{k}$$

$$\left|F_{AB}\right| = \mathbf{F}\cdot\mathbf{u}_{AB} = (300\mathbf{j})\cdot\left(\frac{2}{7}\mathbf{i}+\frac{6}{7}\mathbf{j}+\frac{3}{7}\mathbf{k}\right) = \frac{1800}{7} = 257.1N$$

$$\mathbf{F}_{AB} = \left|\mathbf{F}_{AB}\right|\mathbf{u}_{AB} = (257.1N)\left(\frac{2}{7}\mathbf{i}+\frac{6}{7}\mathbf{j}+\frac{3}{7}\mathbf{k}\right) = \{73.5\mathbf{i}+220\mathbf{j}+110\mathbf{k}\}\ N$$

Huiswerk

Reflecteer op de stof van hoofdstuk 2.

Maak Toets 2 op Blackboard.

Kijk naar de review problems van hoofdstuk 2, probeer daarvan het meest uitdagende probleem. Bespreek dat probleem met je medestudenten.

Lees hoofdstuk 3.