



CTB1420 Transport & Planning

Verkeerstroomtheorie en Verkeersmanagement

Hans van Lint & Prof Serge Hoogendoorn Transport & Planning
06-06-17

Resume vorige keer

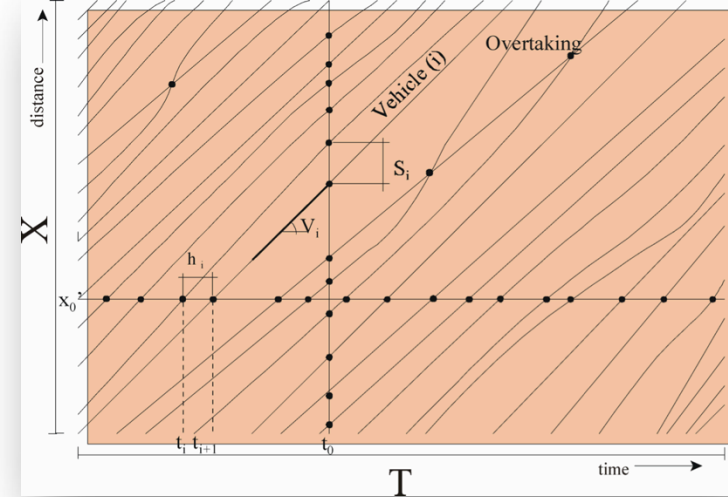
De variabelen

Lokaal (dus op een locatie $x=x_0$)

- Volgtijd h = aantal seconden tussen twee passerende voertuigen
- Intensiteit $q = 1/h$

Instantantaan (dus op een tijdstip $t=t_0$)

- Volgafstand s = aantal meter tussen twee voertuigen
- Dichtheid $k = 1/s$
- Ruimtelijk gemiddelde snelheid
 $u_M = \langle v \rangle |_{t=t_0}$



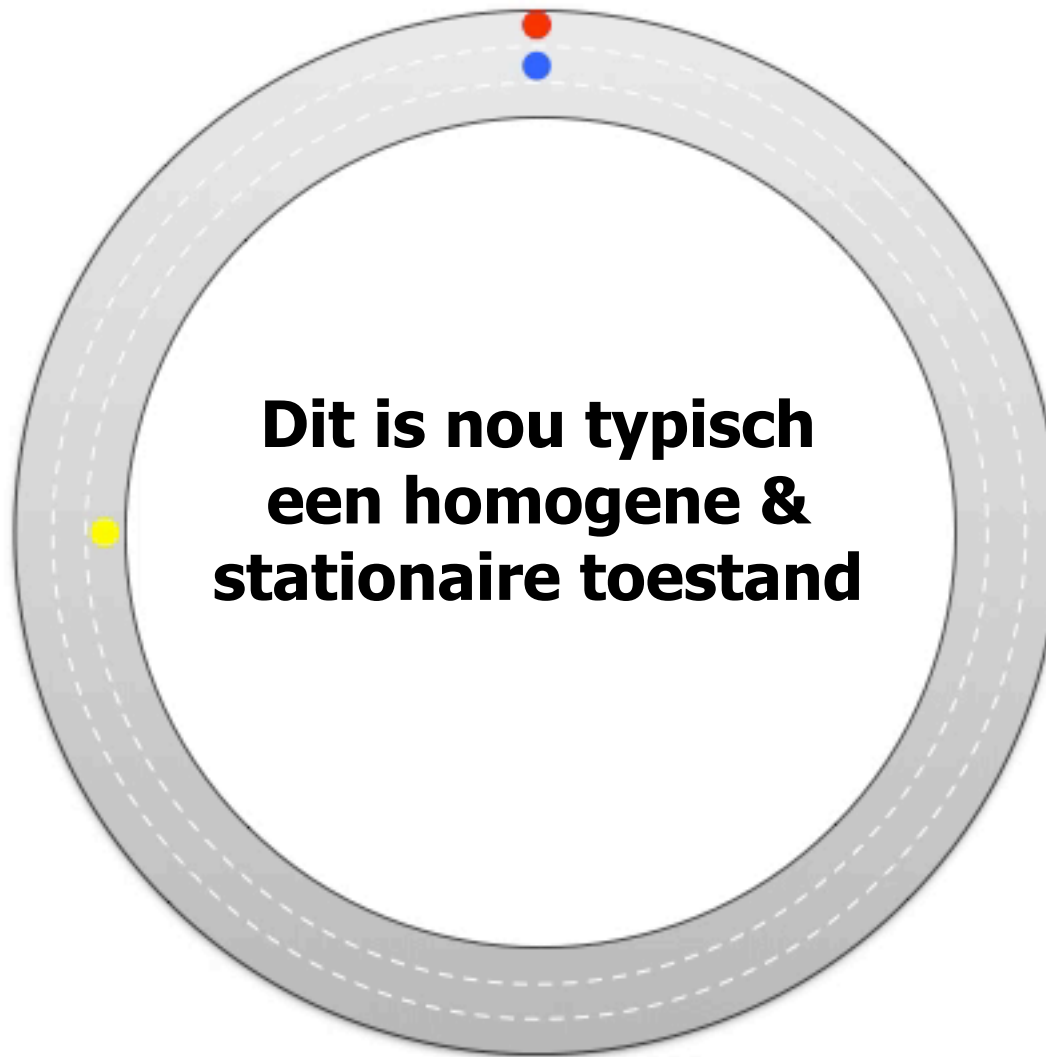
$$q = ku$$

maar alleen als

$$u = u_M$$

Benadering: harmonisch
gemiddelde snelheid (exact
als homogene / stationaire
toestand)

Ehhh, homogeen & stationair?



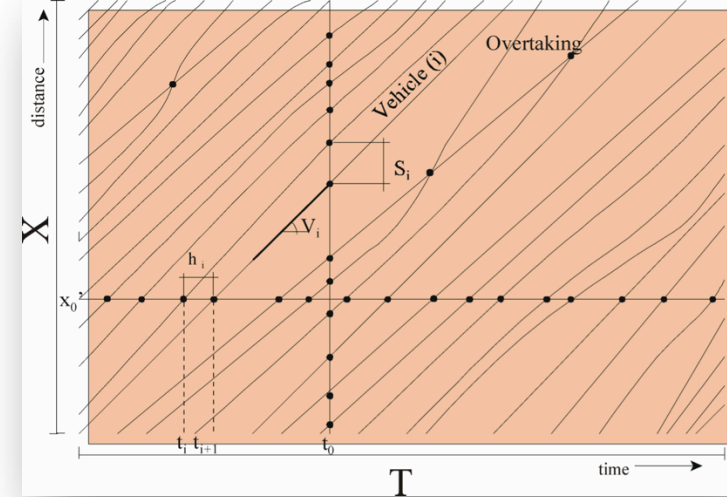
Lengte circuit: 1 km

Resume vorige keer

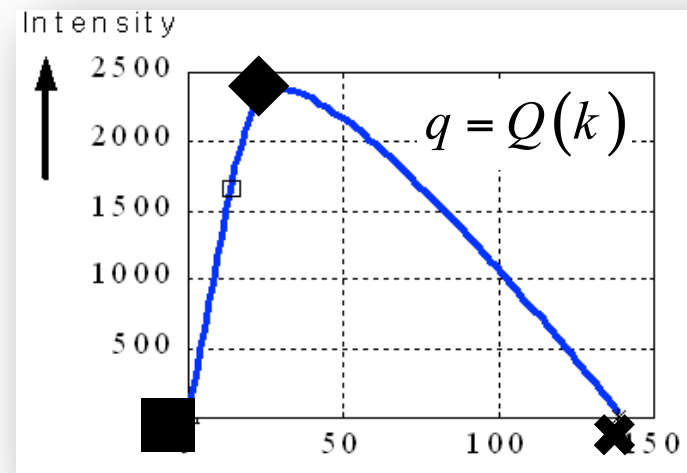
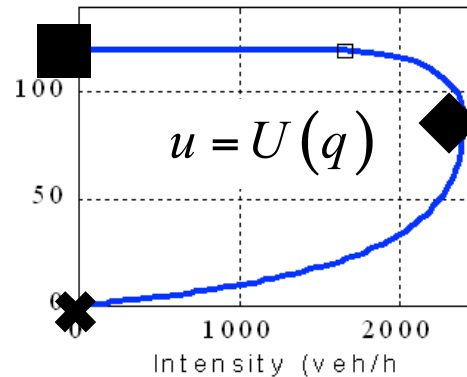
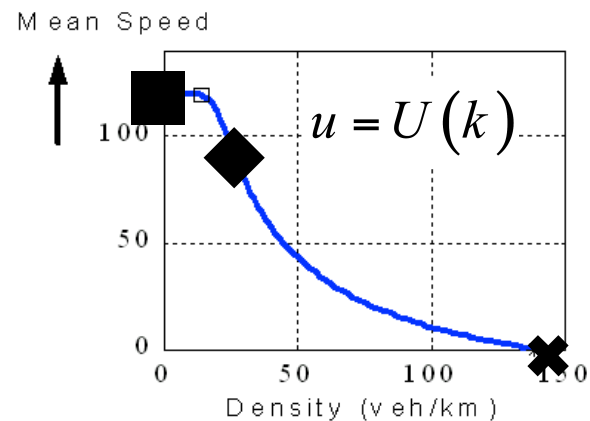
Het fundamenteel diagram

Gemiddelde relatie intensiteit & dichtheid (volgtijd & volgafstand)

- : Dichtheid 0 $\rightarrow$ free flow ($u=u_0, q=0$)
- ◆ : Kritische dichtheid & snelheid (k_c en u_c) $\rightarrow$ Maximum flow: capaciteit q_c
- ✕ : Stremmings dichtheid k_{jam} $\rightarrow$ parkeerplaats ($q=u=0$)



$$q = ku$$



4.

*Achtergronden en basisprincipes van
de file*

Oorzaken van files?

Hoeveel horen er **niet** thuis in dit rijtje ?

1. Oudere weggebruikers
2. Jongeren die net hun rijbewijs hebben gehaald
3. Bumberklevers en linksrijders
4. 80-km zones
5. Te grote snelheidsverschillen
6. Snelheidscontroles
7. Mensen die (te laat of te hard) op de rem gaan staan
8. Inhalende vrachtwagens
9. Op- en afritten
10. Weefvakken
11. Wegwerkzaamheden en/of ongevallen
12. Matrixborden boven de weg (50,70,90 km/h)
13. Slecht weer of laagstaande zon
14. Te weinig rijstroken
15. Slecht openbaar vervoer

Wie of wat veroorzaakt files?

- Eigenlijk zijn alle punten potentiële “oorzaken” (behalve de meeste matrixborden*) onder bepaalde omstandigheden:

“Er ontstaat file als er op een bepaalde tijd en plaats meer voertuigen (**verkeersvraag**) arriveren dan een stuk weg kan verwerken (**capaciteit of aanbod**)”

- Let op:
 - Zowel vraag als capaciteit = resultante collectief menselijk gedrag en afhankelijk van weer, verkeersmix, omstandigheden, etc, etc
 - Ook andere fundamenteel diagram parameters spelen een rol bij de dynamica van files – vrije snelheid, kritische snelheid, kritische dichtheid, stremmingsdichtheid

*reactief systeem: geven de gerealiseerde snelheid weer

Files in Nederland

Nog altijd hardnekkig ...

- Op nr 1: 42% wegennet = parkeerplaats
- Overeenkomsten top-10 files:
 - Extreme omstandigheden
 - Lage capaciteit
 - Hoge verkeersvraag
- Van kwaad tot erger: keten van achtereenvolgende gebeurtenissen (leidend tot totaal systeemfalen)

File top 10

RIJSWIJK - Op de Nederlandse snelwegen sta file. Niet eerder was het zo druk in de spits; 15 8 februari 1999. Hieronder een overzicht van d

1. 15 januari 2013 (1000 kilometer file in de ochtendspits) door sneeuwval
2. 8 februari 1999 (975 kilometer file in de ochtendspits), door sneeuwval en gekantelde vrachtwagens
3. 25 maart 2008 (888 kilometer file in de ochtendspits), door sneeuw de dag na Pasen
4. 29 november 2010 (871 kilometer file in de avondspits), door de eerste sneeuw in het midden van het land en de Randstad
5. 3 februari 2012 (831 kilometer file in de middag), door sneeuw in de Randstad.
6. 25 november 2005 (810 kilometer file in de avondspits) door sneeuw
7. 26 februari 2004 (760 kilometer in de ochtendspits) door winterweer en sneeuw
8. 17 december 2010 (753 kilometer file in de avondspits), door sneeuw in de Randstad
9. 17 december 2009 (670 kilometer file in de ochtendspits) door sneeuwval
10. 6 maart 2006 (660 kilometer in de ochtendspits) door sneeuwval en het einde van de voorjaarsvakantie

Files in Nederland

Beleid

- **Bouwen** (steeds minder);
- **Verkeersmanagement**
(beter benutten van
bestaande capaciteit: voertuig
en infratechnologie)
- **Vraagmanagement**
(mensen prikkelen anders te
gaan reizen)
- Verbeteren **samenhang
ruimte ⇔ vervoer**

File top 10

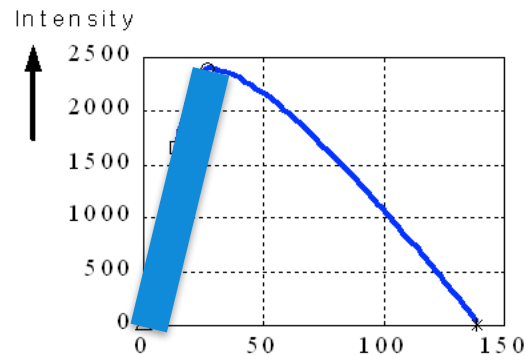
RIJSWIJK - Op de Nederlandse snelwegen sta file. Niet eerder was het zo druk in de spits; 15 8 februari 1999. Hieronder een overzicht van d

1. 15 januari 2013 (1000 kilometer file in de ochtendspits) door sneeuwval
2. 8 februari 1999 (975 kilometer file in de ochtendspits), door sneeuwval en gekantelde vrachtwagens
3. 25 maart 2008 (888 kilometer file in de ochtendspits), door sneeuw de dag na Pasen
4. 29 november 2010 (871 kilometer file in de avondspits), door de eerste sneeuw in het midden van het land en de Randstad
5. 3 februari 2012 (831 kilometer file in de middag), door sneeuw in de Randstad.
6. 25 november 2005 (810 kilometer file in de avondspits) door sneeuw
7. 26 februari 2004 (760 kilometer in de ochtendspits) door winterweer en sneeuw
8. 17 december 2010 (753 kilometer file in de avondspits), door sneeuw in de Randstad
9. 17 december 2009 (670 kilometer file in de ochtendspits) door sneeuwval
10. 6 maart 2006 (660 kilometer in de ochtendspits) door sneeuwval en het einde van de voorjaarsvakantie

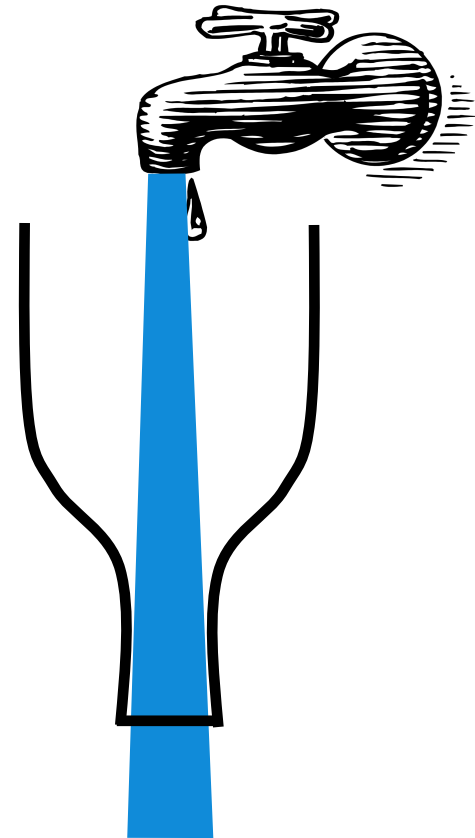
Basisprincipe files: mismatch vraag en capaciteit

Analogie met vloeistofdynamica

Zolang er maar minder vraag is dan capaciteit: niets aan de hand



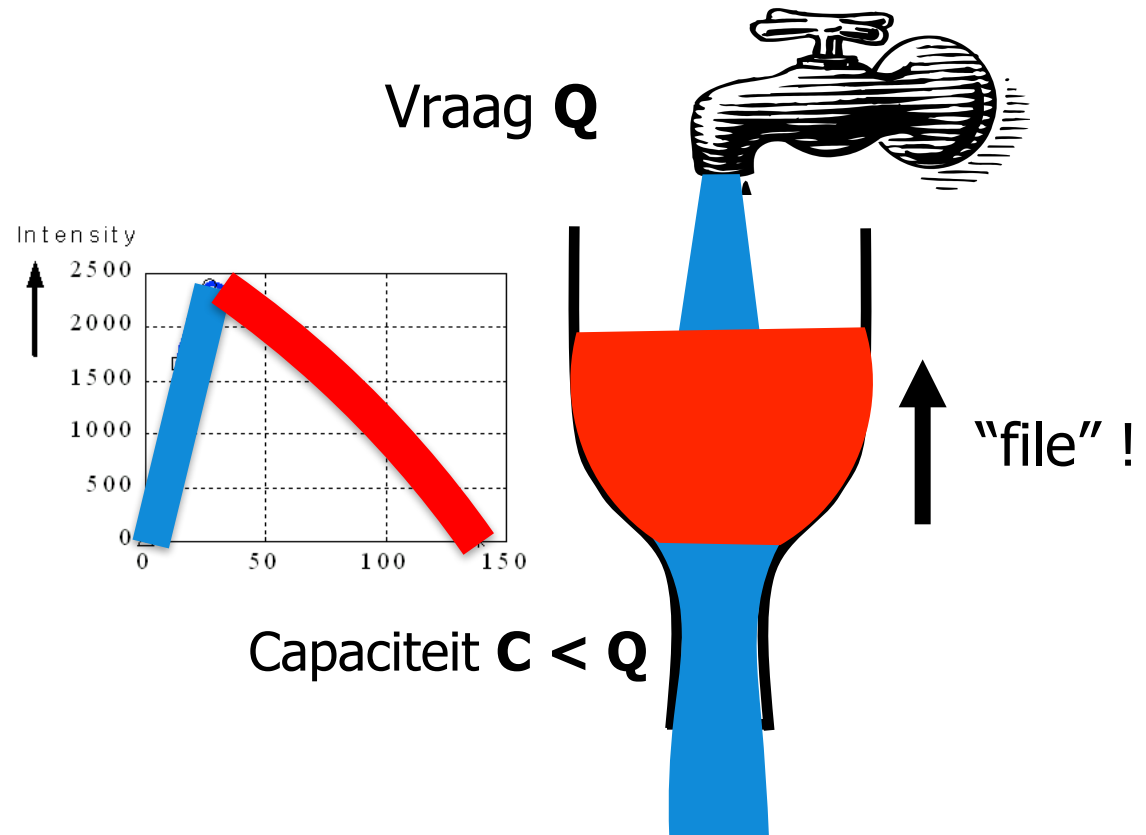
Capaciteit $C > Q$



Basisprincipe files: mismatch vraag en capaciteit

Analogie met vloeistofdynamica

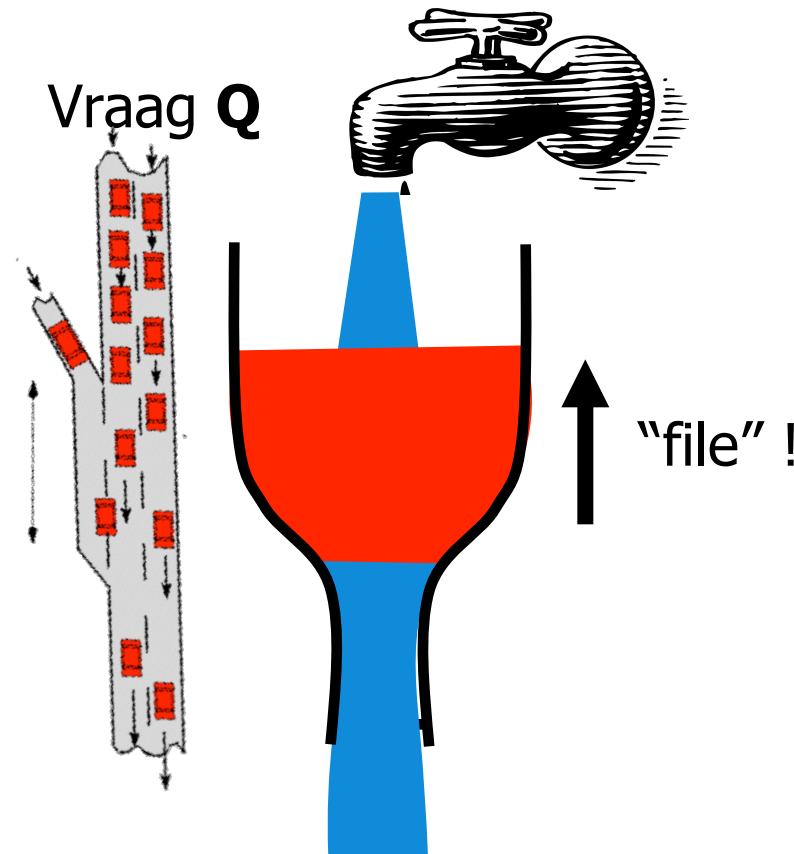
Zodra $Q > C$, ontstaat er file en dus vertraging



Basisprincipe files: mismatch vraag en capaciteit

NB: Analogie met water gaat maar beperkt op!

- Op micro niveau gebeurt er dit:
 - Voertuig i voegt in
 - Volger $i+1$ sch(r)ikt – te korte volgtijd naar ingevoegde i
 - Voor $i+1$ geen andere optie dan remmen $\rightarrow$ snelheid omlaag = volgtijd omhoog!
 - Domino effect: $i+2$ remt ook maar nog harder, $i+3$ ook, etc
 - Soms tot volledige stilstand
- Verrassing: de “water” benadering is helemaal niet zo’n slechte macroscopische benadering



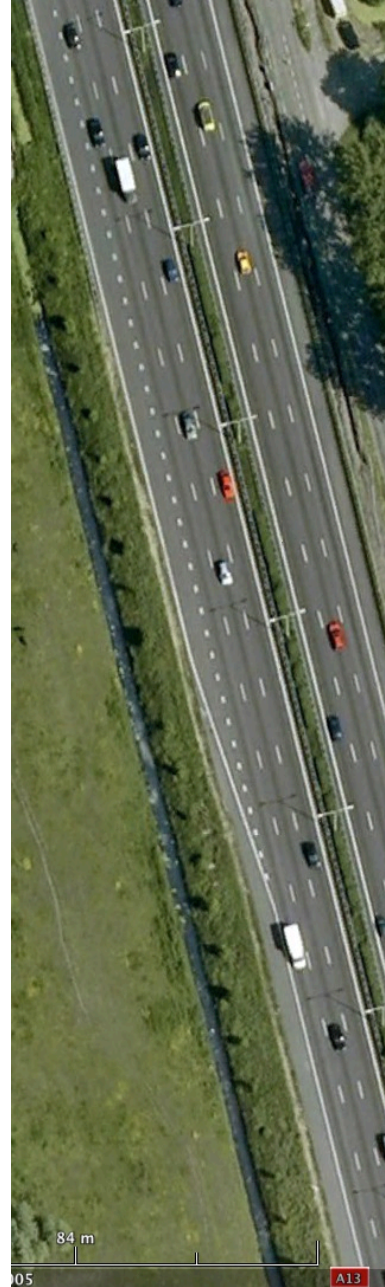
Basisprincipe files: mismatch vraag en capaciteit

NB: Analogie met water gaat maar beperkt op!

- Voertuigen botsen (liever) niet
- Voertuigen bewegen in dezelfde richting; watermoleculen bewegen alleen netto in een bepaalde richting.
- Anisotropie: interacties verkeerstrom hebben richting
- Gedrag voertuig veel ingewikkelder dan van molecule
- Voertuigen nemen relatief aan het macroscopische fenomeen (de file) veel ruimte in, watermoleculen zijn verwaarloosbaar klein.
- Meer watermoleculen in een druppel dan voertuigen op de wereld: dichtheid en flow zijn echt andere concepten
- Niet-lineaire fenomenen: instabiliteit, capaciteitsval

Voorbeelden bottlenecks

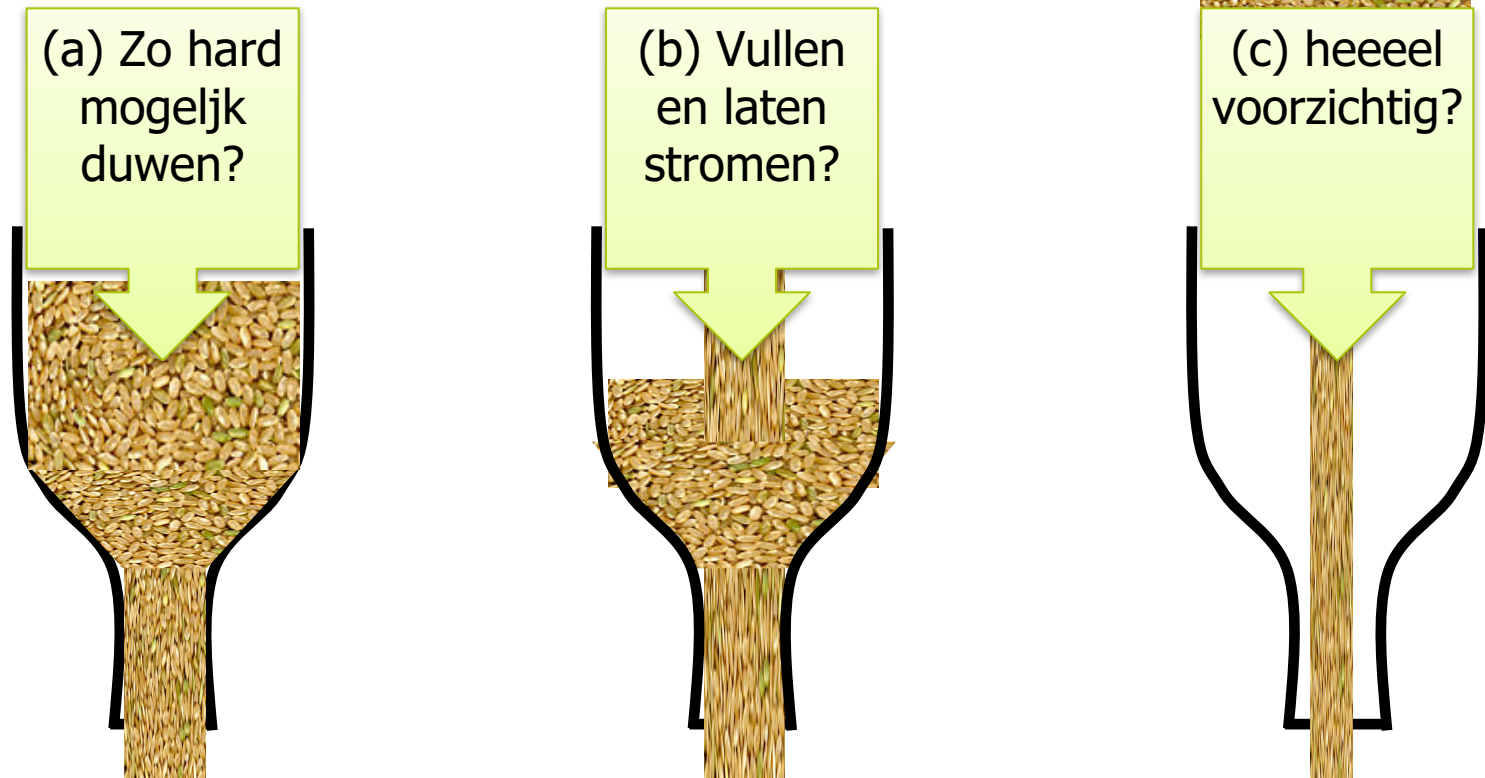
- Invoegingen, weefvakken, etc
- Tunnels, bruggen
- Wegwerkzaamheden, versmallingen
- Ongelukken, incidenten
- Kolonne vrachtwagens / trekkers
- Plaatselijke gladheid/regenbui
- Alle overige zaken die (lokaal) de volgtijd/reactietijd nadelig beïnvloeden



Basisprincipe files: mismatch vraag en capaciteit

Een (iets) betere analogie

- Welke methode zorgt voor maximale doorstroom?

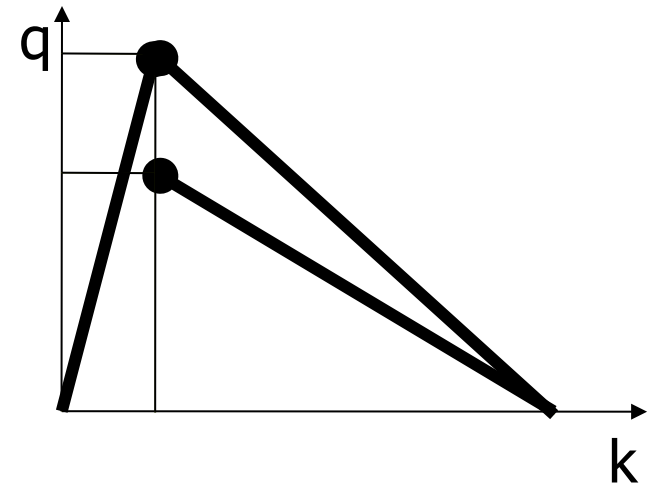




Van kwaad tot erger

De capaciteitsval

- Vrije capaciteit > Afrij capaciteit
- Zodra file: capaciteit omlaag
(**minimale volgtijd gaat omhoog**)
- Uit data blijkt: afname in capaciteit van 5-25% afhankelijk van omstandigheden
- Oorzaken? De wetenschap is er nog niet helemaal uit:
 - Rijstrookwisselingen
 - Heterogeniteit van het verkeer (met name als er veel vrachtverkeer is)
 - Je rijdt anders een file in dan een file uit



Instabiliteit en start-stop (file)golven

files uit het niets?

- Voorbij een bepaalde dichtheid wordt verkeer instabiel
- Spontane vorming van zogenoemde start-stop golven (frequentie van 1-3 minuten) in zulke hoge dichtheidsgebieden

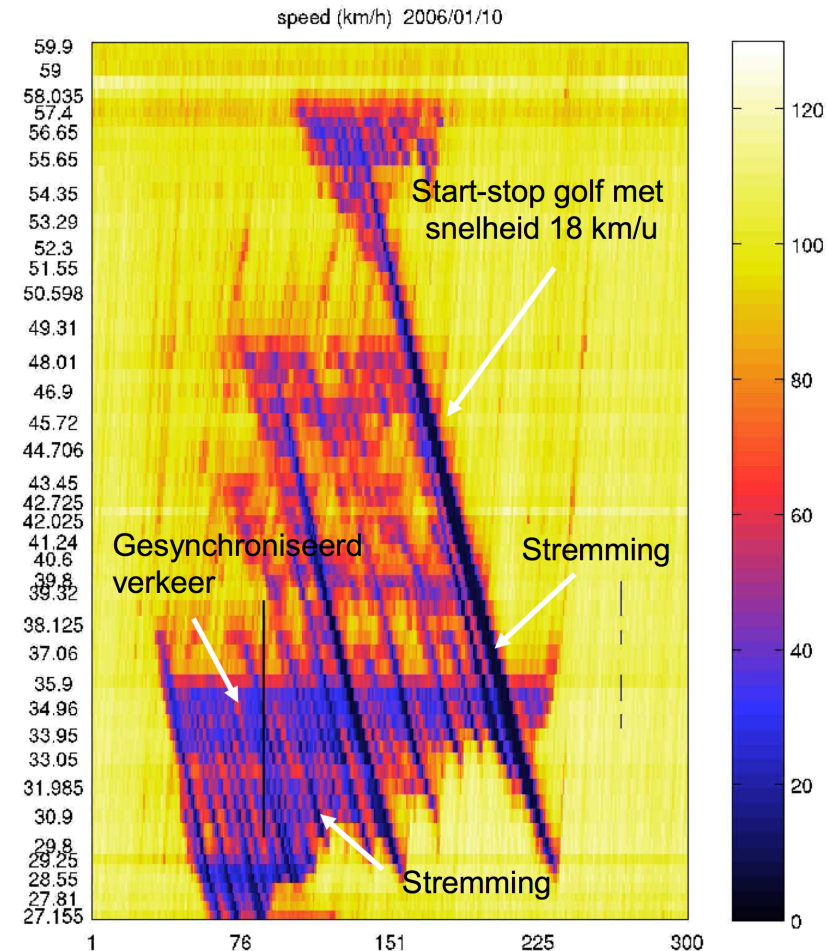
SHOCKWAVE TRAFFIC JAMS
RECREATED FOR FIRST TIME

Footage courtesy of
University of Nagoya,
Nagoya, Japan

Instabiliteit en start-stop (file)golven

files uit het niets?

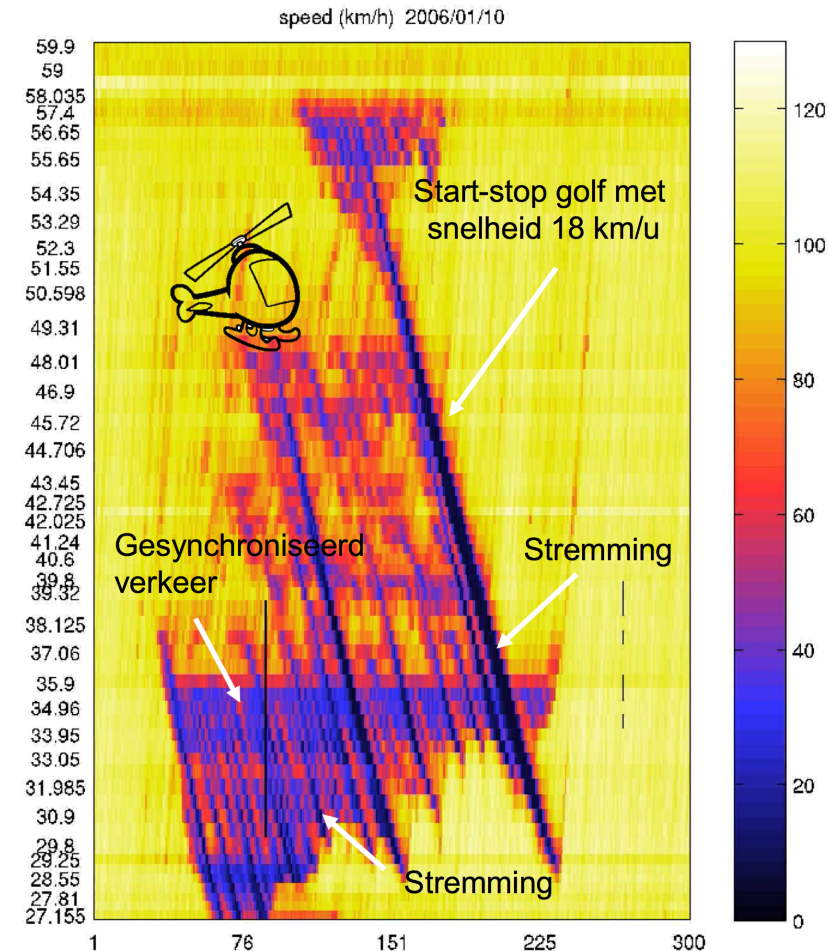
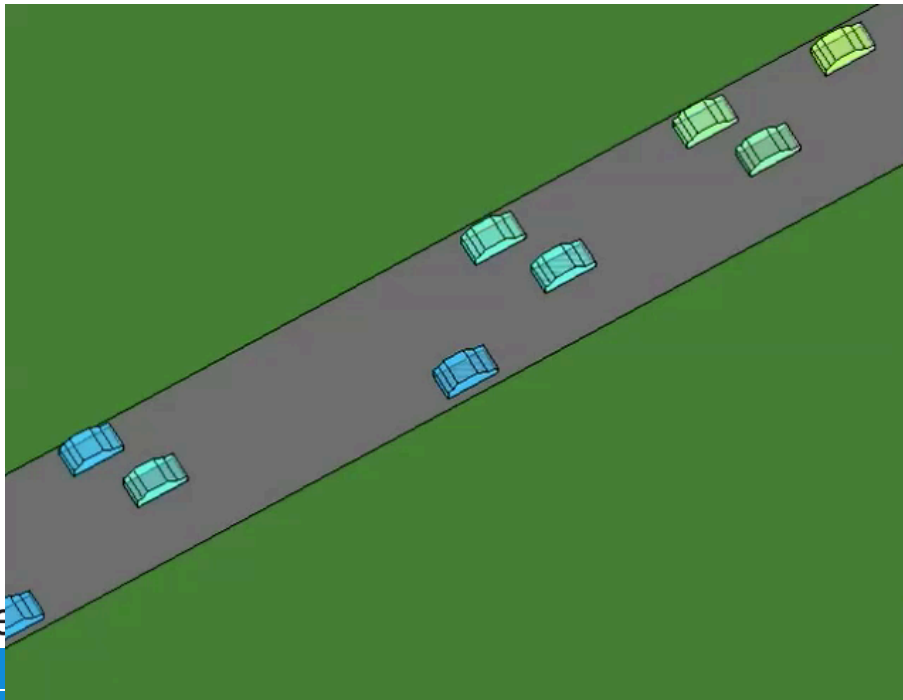
- De resulterende files kunnen soms uren bestaan en vele kms afleggen!
- Dichtheid in start-stop golven is hoog, snelheid laag of zelfs nul

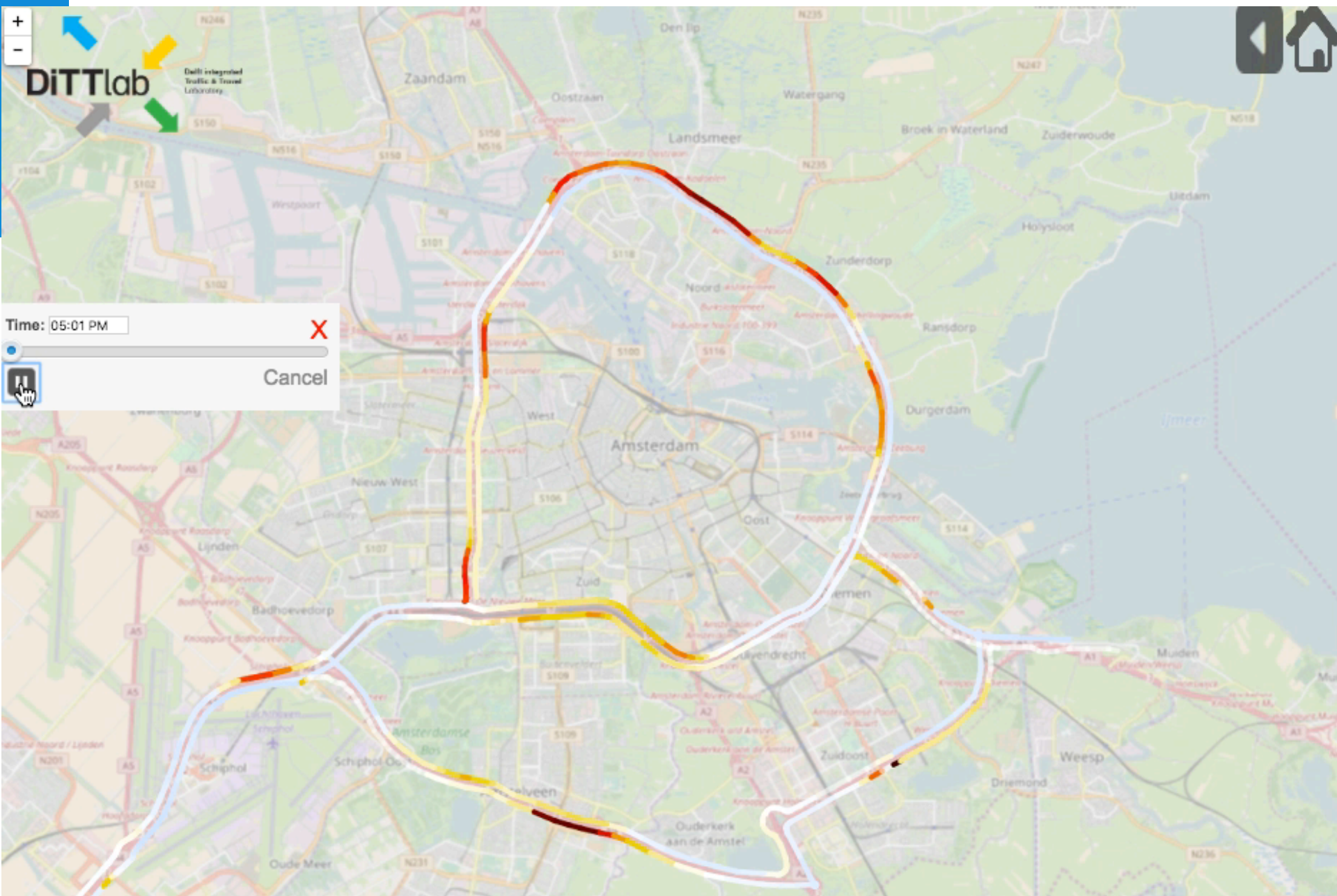


Instabiliteit en start-stop (file)golven

files uit het niets?

- De resulterende files kunnen soms uren bestaan en vele kms afleggen!
- Dichtheid in start-stop golven is hoog, snelheid laag of zelfs nul





De wiskunde achter dat soort dynamica is best complex

Maar je komt ook een heel eind (vaak ver genoeg) met heel eenvoudige aanpak: schokgolftheorie.

$$\frac{2b_1}{b_i} = \frac{b_i}{2b_1} \left(1 + \frac{-f + 2\frac{b_1}{b_i}a_i}{\sqrt{(\sum_u a_u \rho_u - b_1 \rho)^2 + 4b_1 \sum_u a_u \rho_u}} \right)$$

$$= \frac{b_i}{2b_1} \left(1 + \frac{-f + 2\frac{b_1}{b_i}a_i}{|\sum_u a_u \rho_u + b_1 \rho|} \right) = \frac{b_i}{2b_1} \frac{|f + 2b_1 \rho| - f + 2\frac{a_i}{b_i}b_1}{|f + 2b_1 \rho|} \quad (7.39)$$

We now distinguish between congestion and free flow. In congestion $b_1 > 0$ and $f > 0$ and consequently:

$$\frac{d\rho}{d\rho_i} = \frac{b_i}{2b_1} \frac{1}{|f + 2b_1 \rho|} \left(2\frac{a_i}{b_i}b_1 + 2b_1 \rho \right) > 0 \quad (7.40)$$

In free flow (i.e. $b_u \leq 0$), we need to have a closer look. First note that the sign of (7.39) is equal to the nominator of the second term fraction (i.e. $|f + 2b_1 \rho| - f + 2\frac{a_i}{b_i}b_1$). There are two possibilities: $f + 2b_1 \rho \leq 0$ and $f + 2b_1 \rho > 0$. In the first case $2b_1 \rho \leq -f$ and the term between brackets becomes:

$$|f + 2b_1 \rho| - f + 2\frac{b_1}{b_i}a_i = -2 \left(f + 2b_1 \rho - b_1 \rho - \frac{b_1}{b_i}a_i \right) \geq 2b_1 \left(\rho + \frac{a_i}{b_i} \right)$$

$$= 2b_1 \left(\rho - \rho_{\text{crit}} \frac{L_i + T_1 v_{i,\text{max}}}{T_i(v_{i,\text{max}} - v_{\text{crit}})} \right) \geq 0 \quad (7.41)$$

The last inequality holds because in free flow $\rho \leq \rho_{\text{crit}}$. Now consider the other possibility ($f + 2b_1 \rho > 0$). In that case $2b_1 \rho > -f$ and the term between brackets in (7.39) becomes:

$$|f + 2b_1 \rho| - f + 2\frac{b_1}{b_i}a_i = 2b_1 \left(\rho + \frac{a_i}{b_i} \right) \geq 0 \quad (7.42)$$

The inequality holds as we have already shown in (7.41). We conclude that if $b_1 \neq 0$ Condition 21 holds. $\square$

Theorem 45. Fastlane has nonincreasing velocity and finite characteristic velocity

Lemma 12. If the parameters $a_u^{\text{cn}}, b_u^{\text{cn}}$ and $a_u^{\text{cn}} + b_u^{\text{cn}} \geq 0$ are positive or nonnegative: $L_u > 0, T_u \geq 0, w > 0, \rho_{\text{jam}} > 0$. From this we conclude that a_u^{cn} is nonnegative: $a_u^{\text{cn}} = T_u w \rho_{\text{jam}} \geq 0$. If (4.18) holds, then $L_u \geq T_u w$ and thus b_u^{cn} is nonnegative: $b_u^{\text{cn}} = L_u - T_u w \geq 0$. Finally, both a_u^{cn} and b_u^{cn} are nonnegative and thus: $a_u + b_u \rho \geq 0$. $\square$

We define the function f which depends on the current traffic state:

$$f = f(\rho_1, \dots, \rho_U) := a_1 - \sum_u b_u \rho_u \quad (4.38)$$

Furthermore, we define the determinant in (4.34):

$$d := \left(a_1 - \sum_u b_u \rho_u \right)^2 + 4b_1 \sum_u a_u \rho_u \quad (4.40)$$

Lemma 13. The determinant d (4.39) can be rewritten as:

$$d = \left(\frac{\sum_u a_u \rho_u}{\rho} + b_1 \rho \right)^2$$

Proof. We first rewrite f (4.38) using (4.30):

$$f = a_1 - \sum_u b_u \rho_u - \frac{\sum_u a_u \rho_u}{\rho} + \frac{\sum_u a_u \rho_u}{\rho} = a_1 - \frac{1}{\rho} \sum_u (a_u + b_u \rho) \rho_u + \frac{\sum_u a_u \rho_u}{\rho}$$

$$= a_1 - \frac{a_1 + b_1 \rho}{\rho} \frac{\sum_u a_u + b_u \rho}{a_1 + b_1 \rho} \rho_u + \frac{\sum_u a_u \rho_u}{\rho} = a_1 - (a_1 + b_1 \rho) + \frac{\sum_u a_u \rho_u}{\rho}$$

$$= \frac{\sum_u a_u \rho_u}{\rho} - b_1 \rho \quad (4.41)$$

Resume: hoe ontstaan files?

Ingredienten voor congestie

1. De totale verkeersvraag (Q) is in dezelfde ordegrootte als de (rest)capaciteit C van een bottleneck
2. Een verstoring in de stroom (invoeger, inhaalmanoeuvre) zodat tijdelijk en plaatselijk $Q > C$

gedragmatig: iemand ervaart tijdelijk een onacceptabele volgtijd en reageert door de snelheid te verlagen / te remmen (= bij gelijke volgafstand "volgtijd vergroten")

3. De file groeit in lengte tot $Q < C$ (hoe zien we volgend uur)
4. In werkelijkheid: extra complexiteit door capaciteitsval en instabiliteiten

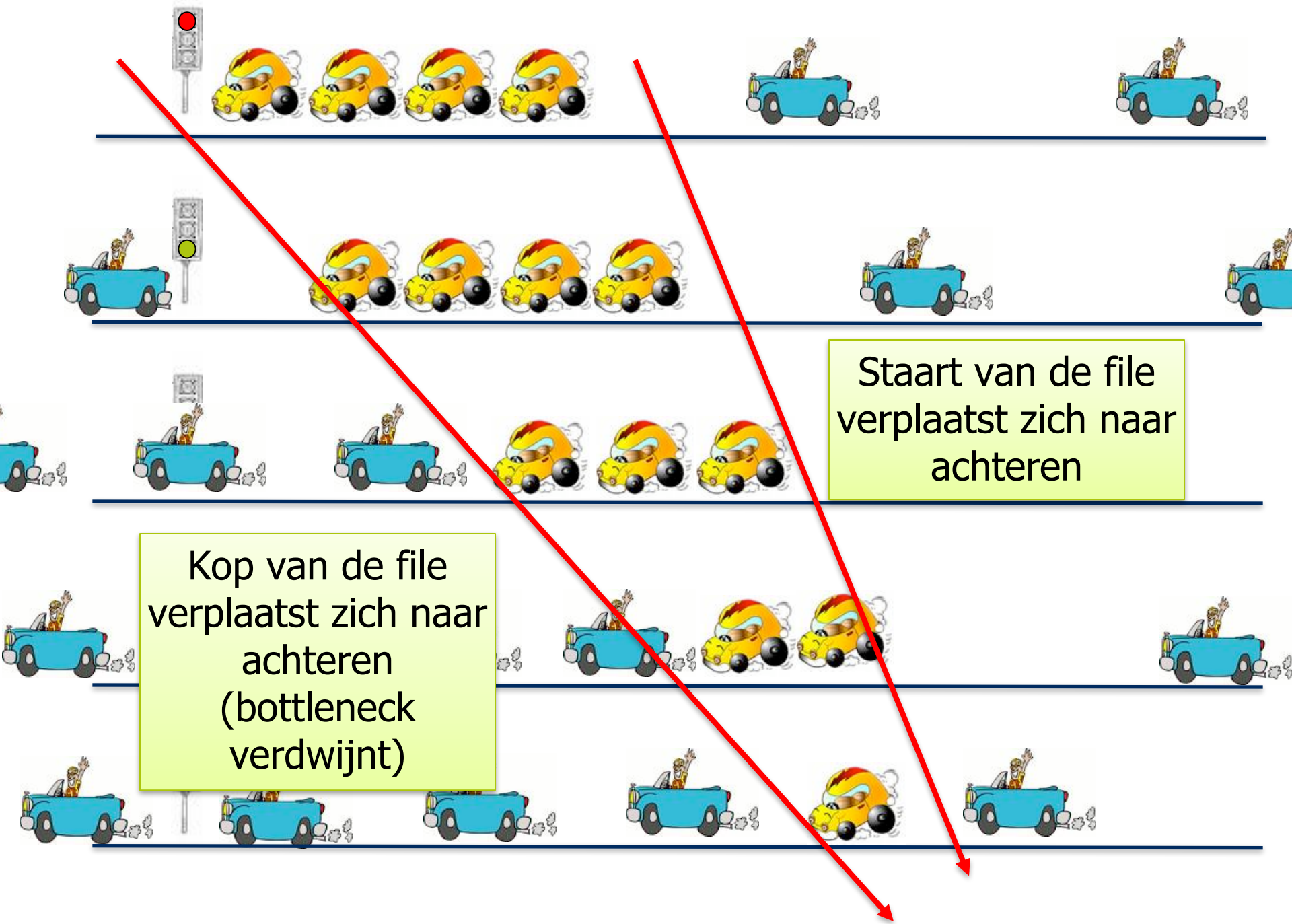
Pauze filmpje: de eerste file

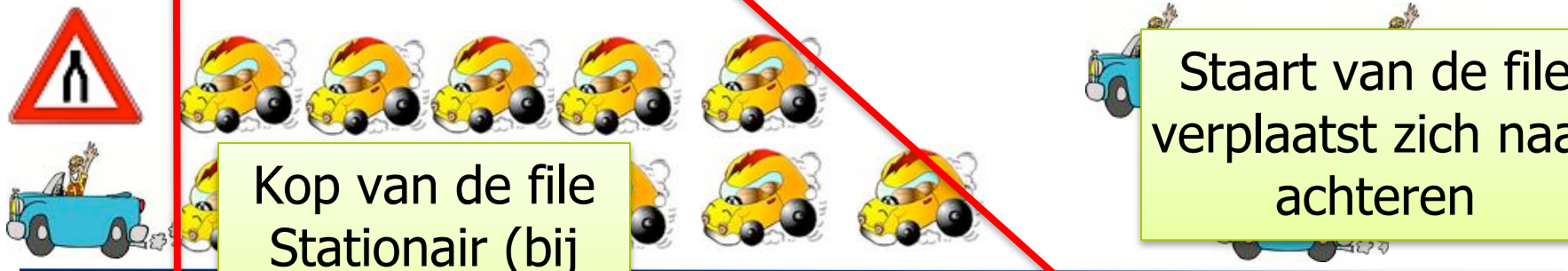
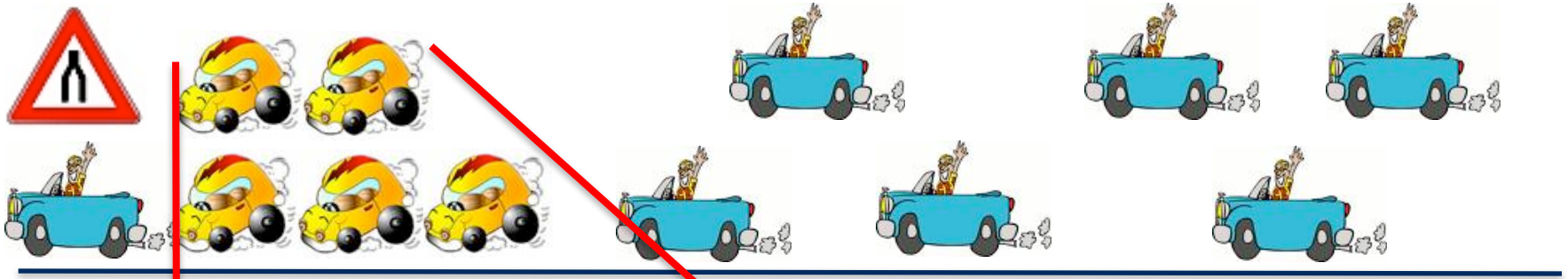
29 mei 1955, 1e Pinksterdag – een dagje uit!

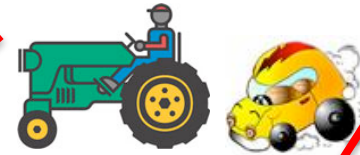


5.

Hoe je de dynamica van files (en de consequenties) kunt beschrijven met
schokgolftheorie





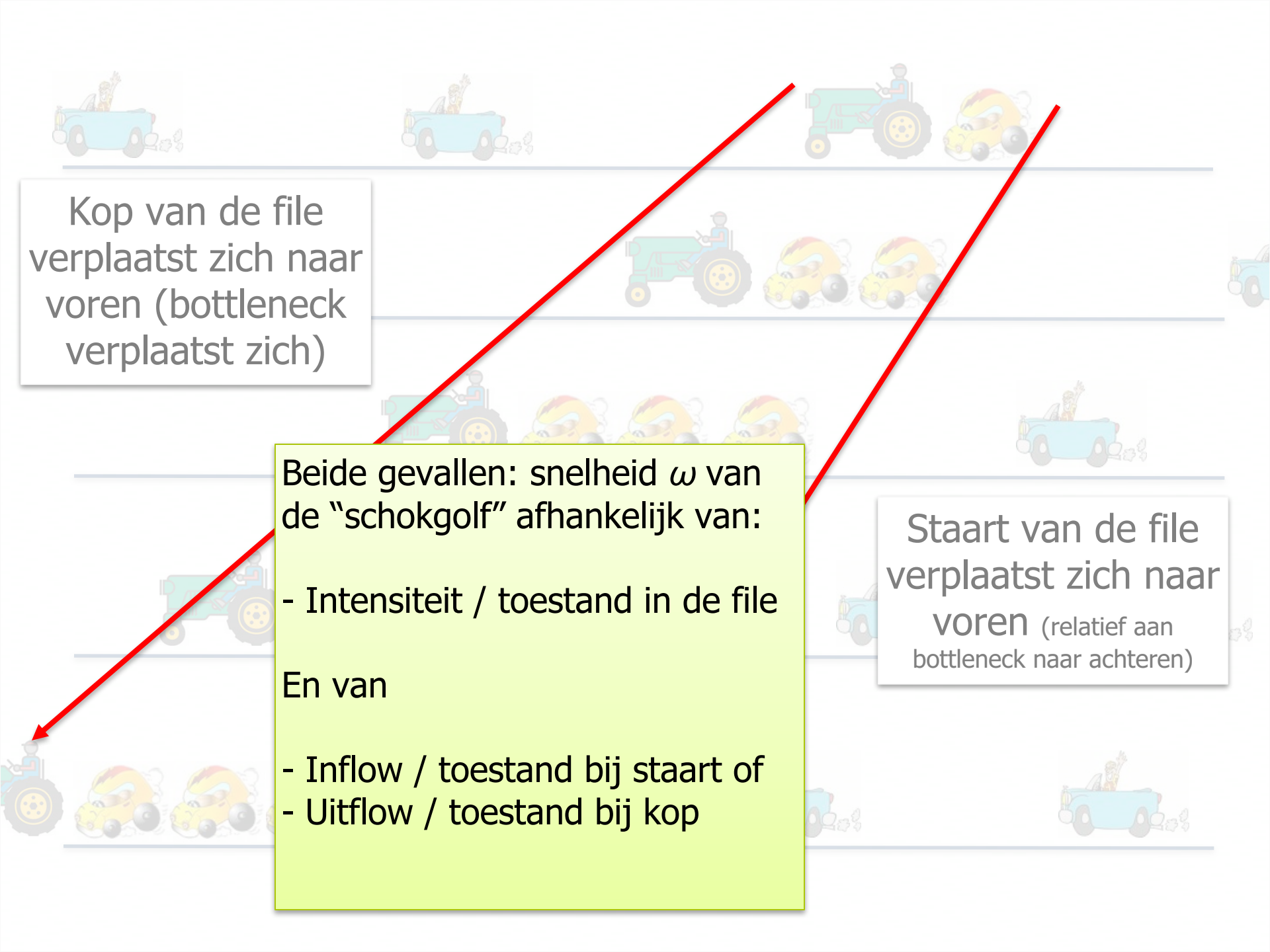


Kop van de file
verplaatst zich naar
voren (bottleneck
verplaatst zich)



Staart van de file
verplaatst zich naar
voren (relatief aan
bottleneck naar achteren)





Kop van de file
verplaatst zich naar
voren (bottleneck
verplaatst zich)

Beide gevallen: snelheid ω van
de "schokgolf" afhankelijk van:

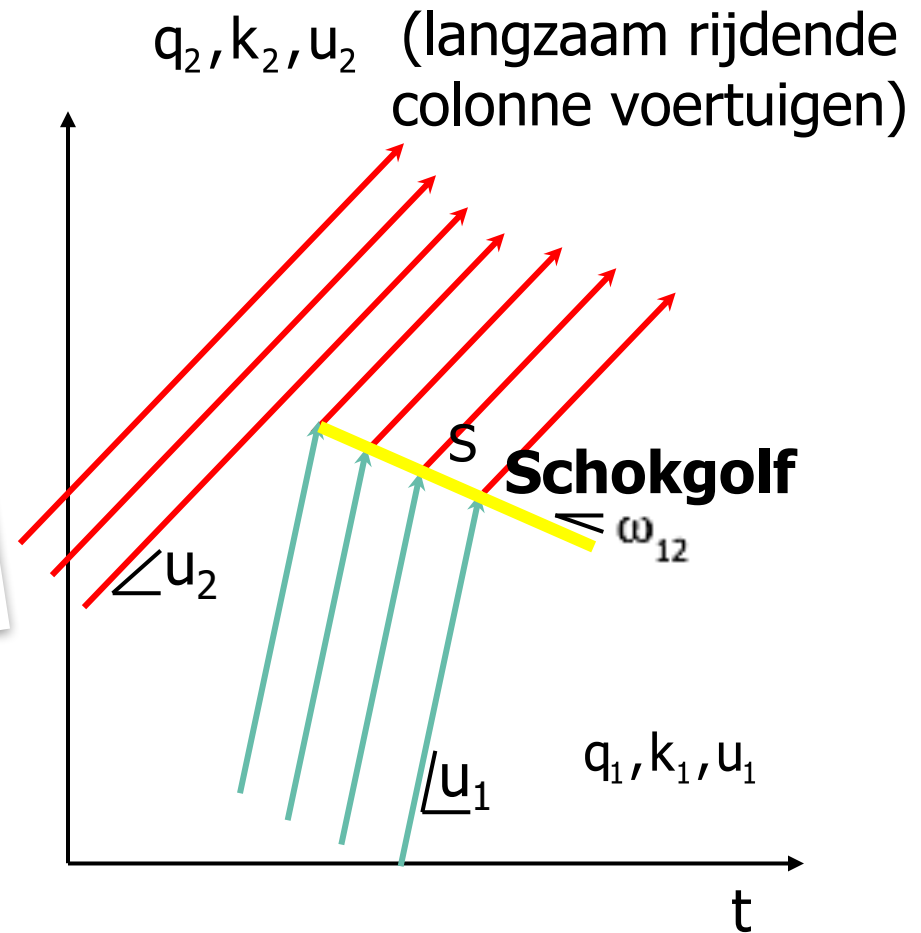
- Intensiteit / toestand in de file

En van

- Inflow / toestand bij staart of
- Uitflow / toestand bij kop

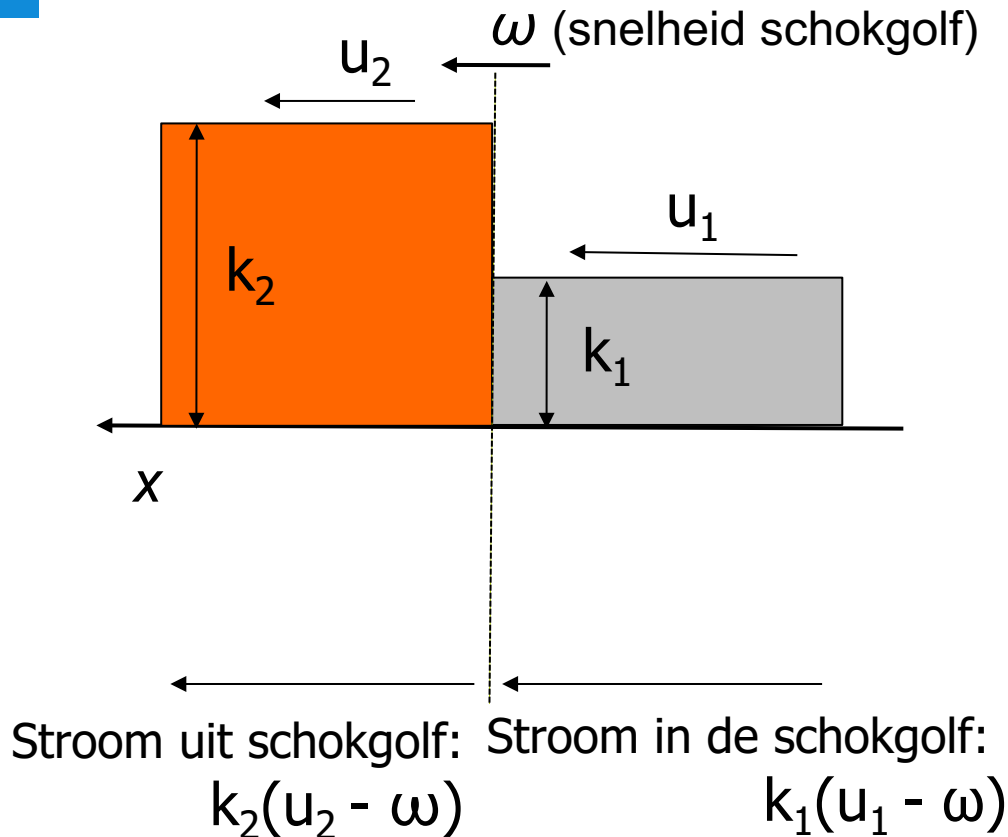
Staart van de file
verplaatst zich naar
voren (relatief aan
bottleneck naar achteren)

Snelheid schokgolf tussen twee verkeerstoestanden



Snelheid schokgolf tussen twee verkeerstoestanden

(hou in gedachten: $q=ku$!)



Wet van behoud van voertuigen:

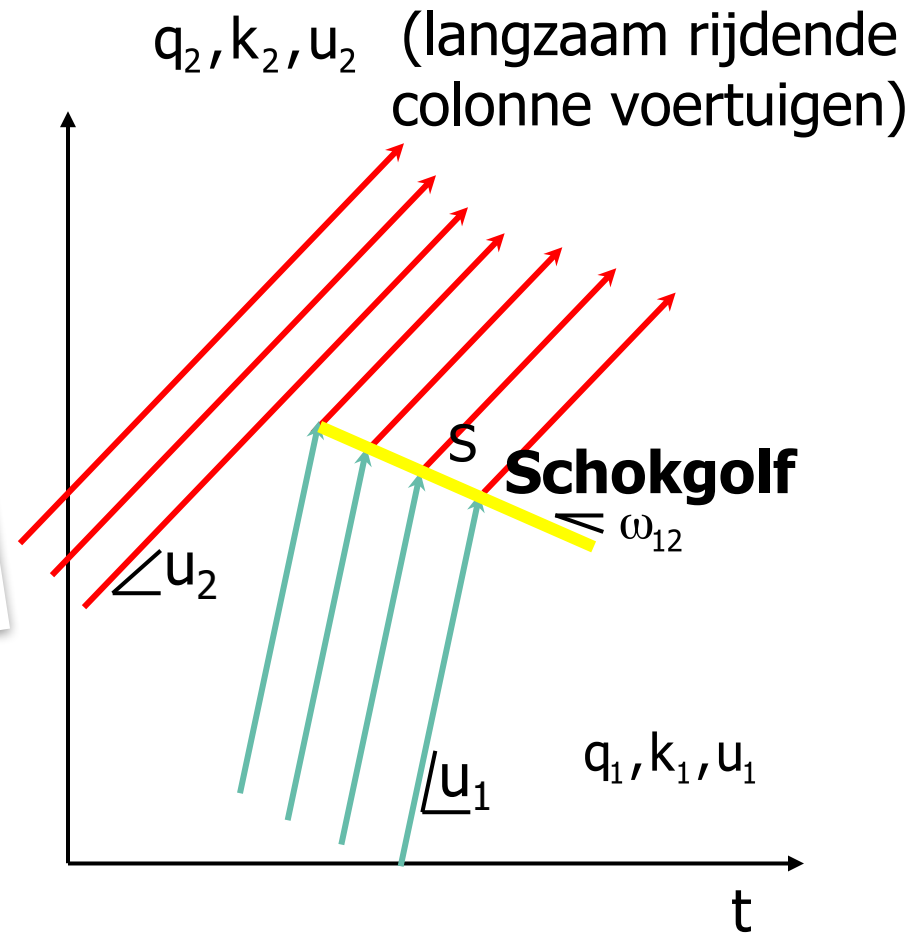
$$k_2(u_2 - \omega) = k_1(u_1 - \omega)$$

En dus:

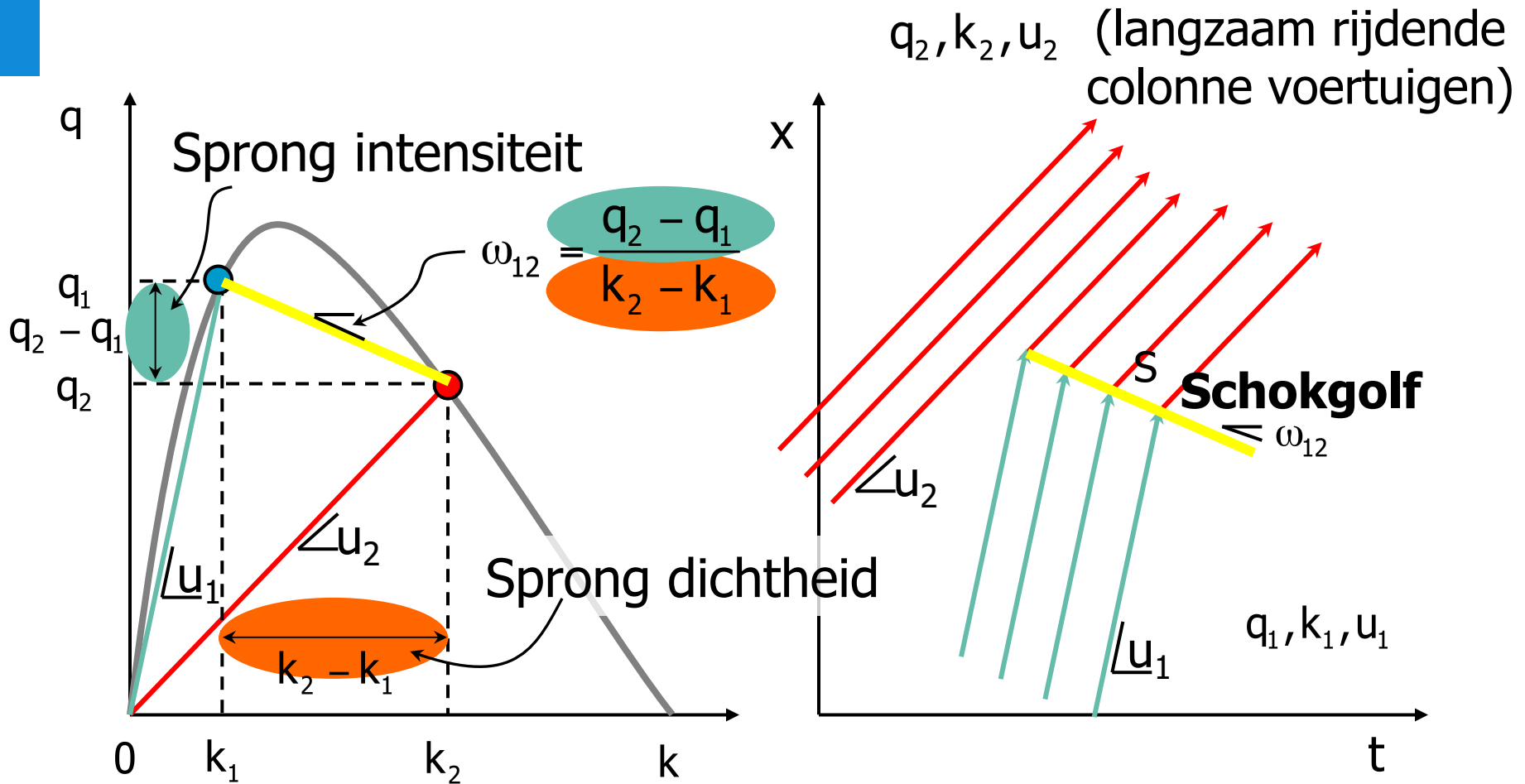
$$\omega = (q_1 - q_2) / (k_1 - k_2)$$

**Schokgolfsnelheid =
verschil in intensiteit /
verschil in dichtheid**

Grafische interpretatie schokgolven

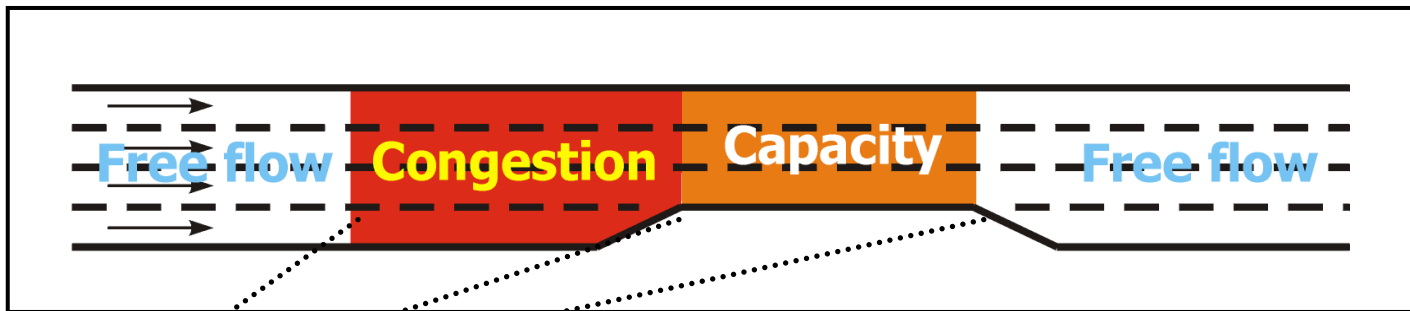


Grafische interpretatie schokgolven



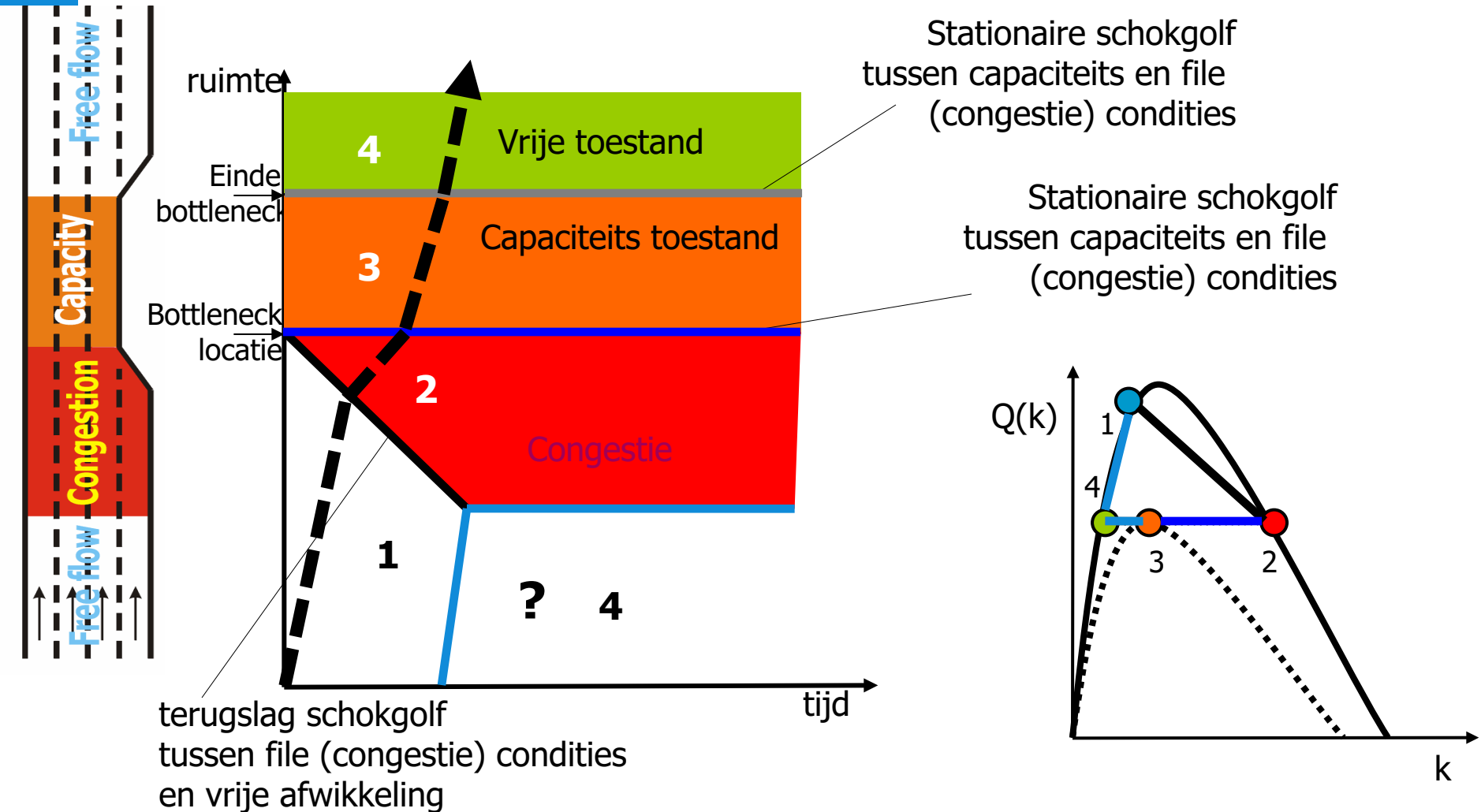
Bottlenecks en schokgolven

- Stel je de situatie voor als een bottleneck (flessehals)

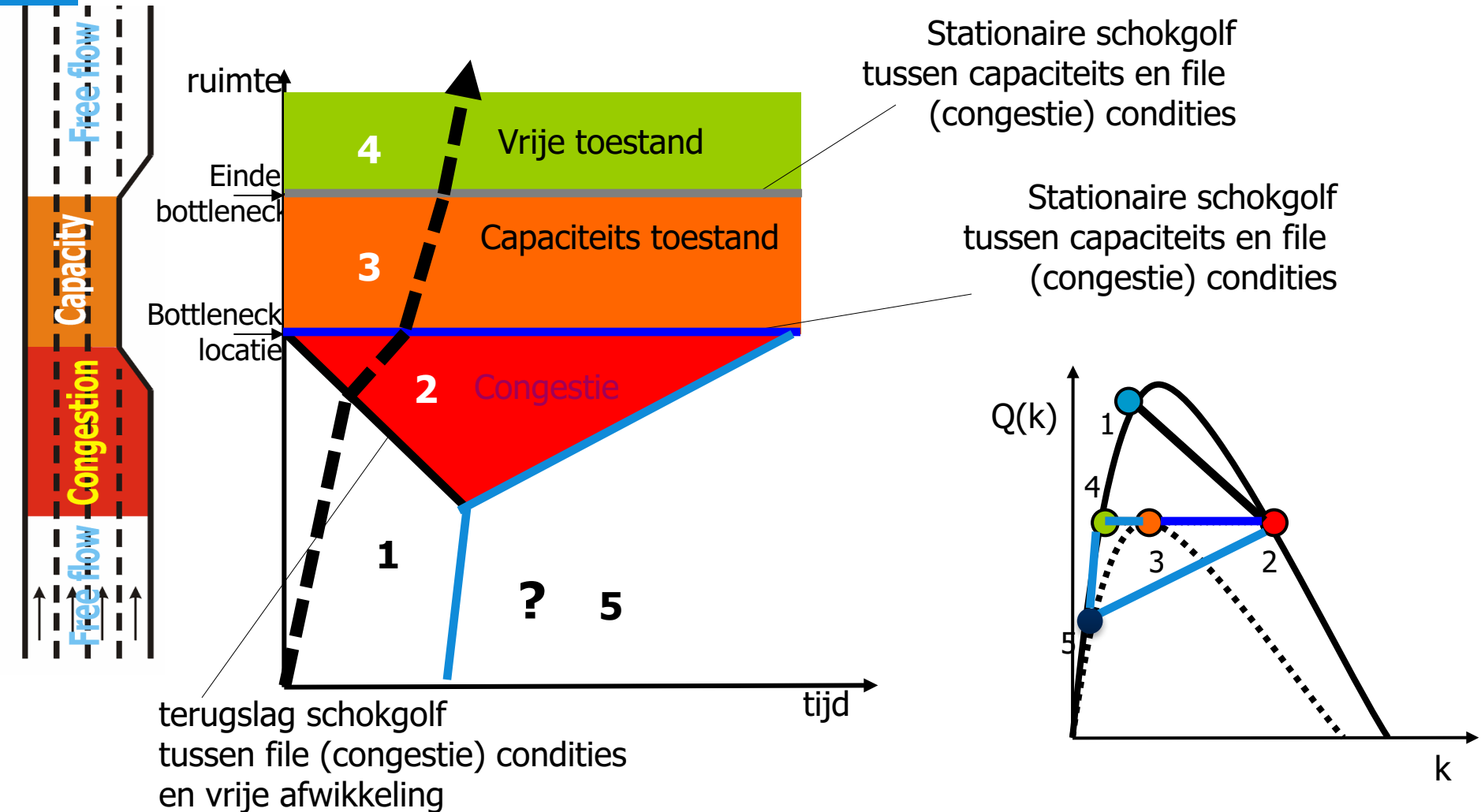


- De grëns tussen verschillende condities noem je dus een schokgolf
- Die kunnen heel mild zijn (vb. platoon snelle voertuigen die voorbij een colonnen vrachtwagens rijdt)
- Maar ook erg dramatisch (voertuig die op volle snelheid een stilstaande file "inrijdt" – die moet vol op de rem, de volgende ook, etc)

Schokgolven – grafische interpretatie



Schokgolven – grafische interpretatie



Dus ...

- Schokgolf snelheid: $w = \frac{q_2 - q_1}{k_2 - k_1}$
- Als $k_2 > k_1$ en $q_1 > q_2$ dan gaat de schokgolf tegen het verkeer in (file terugslag)
- Als $k_2 > k_1$ en $q_1 < q_2$ dan lost de file op
- Als $k_2 > k_1$ en $q_1 = q_2$ dan blijft de staart van de file precies waar ie is

RECEPT voor “Schokgolsommen”

1. Snap de vraag: waar zit de bottleneck, wat is het probleem ?
2. Maak een lijstje met parameters: Vrije snelheid, Capaciteit + kritische dichtheid, Stremmingsdichtheid en teken het fundamentele diagram (LET OP: per rijstrook of per rijbaan? Zorg dat je consistent bent!).
3. Teken een X-T diagram met daarin de toestanden die je verwacht en de corresponderende punten op het FD ($q_1 = \dots$, $k_1 = \dots$; $q_2 = \dots$, $k_2 = \dots$; etcetera)
4. Construeer/bereken de schokgolven tussen die toestanden

Als je dit doet kun je 99.9% van de vragen oplossen (0.1% is voor de echte die-hards)

Fundamenteel diagram per rijstrook:

- Cap = 2000 vtg/h/rijstrook
- Krit. Dichtheid: 20 vtg/km/rijstrook
- Stremmingsdichtheid: 120 vtg/km/rijstrook

Verkeersvraag

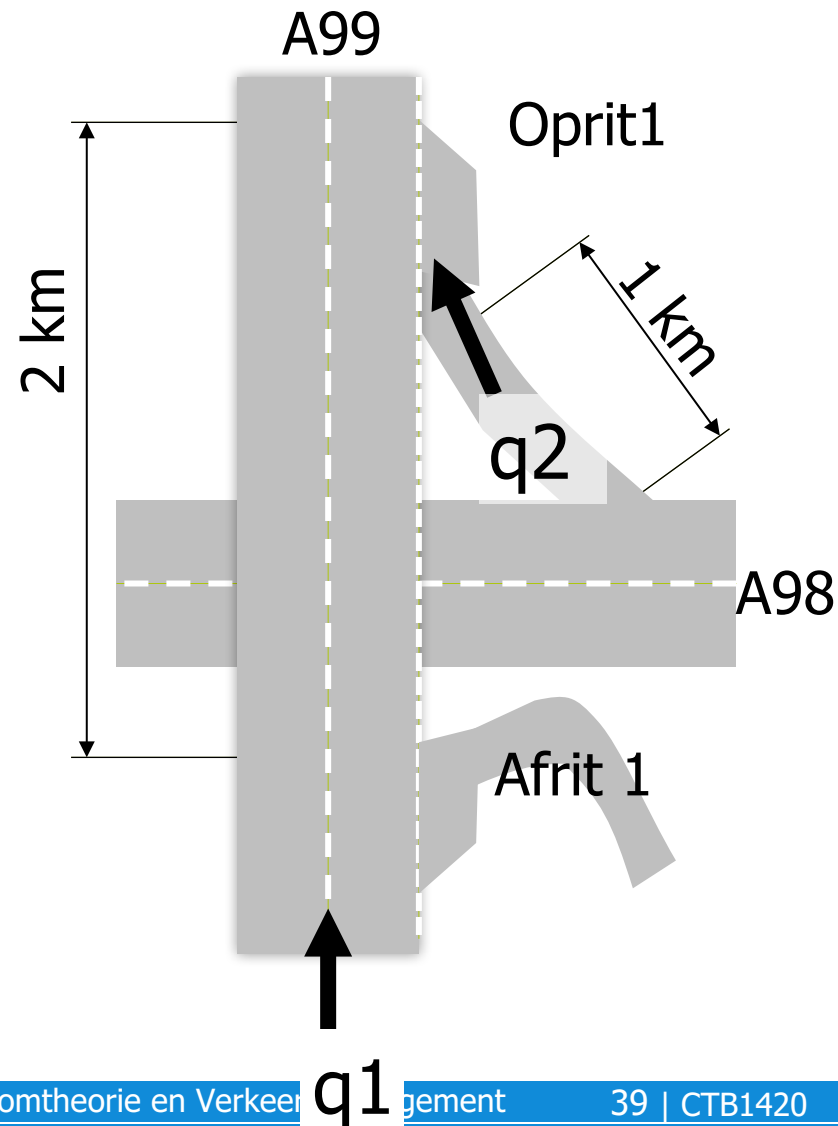
- Hoofdrijbaan: $q_1 = 3500$ vtg/u
- Verbindingsweg: $q_2 = 1000$ vtg/u

Vraag 1: Hoe lang duurt het voor de file op de A99 afrit 1 heeft geblokkeerd?

- a) Als oprit 1 ALTIJD voorrang heeft
- b) Als oprit 1 max 500 vtg/u mag verwerken

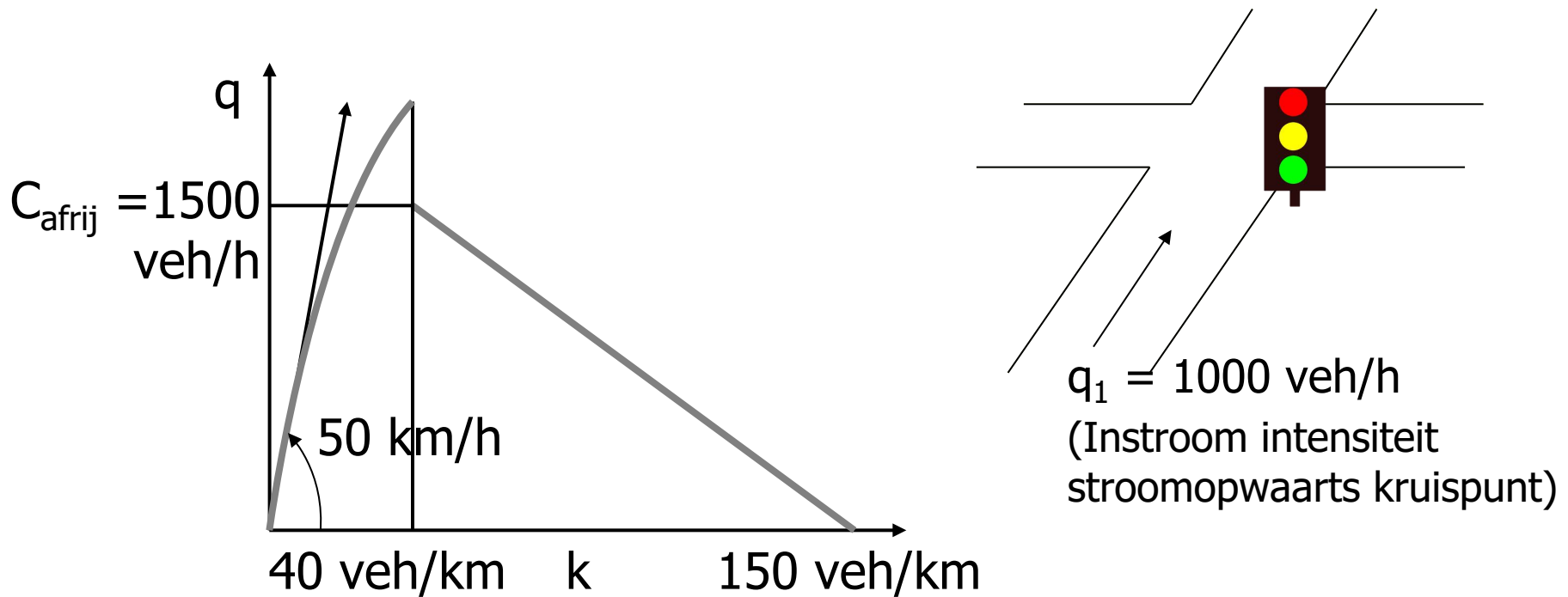
Vraag 2: Als (b) geldt: na hoeveel tijd blokkeert de file op de oprit de A98?

Voorbeeld 2 ...



Nog een voorbeeld (voor thuis)

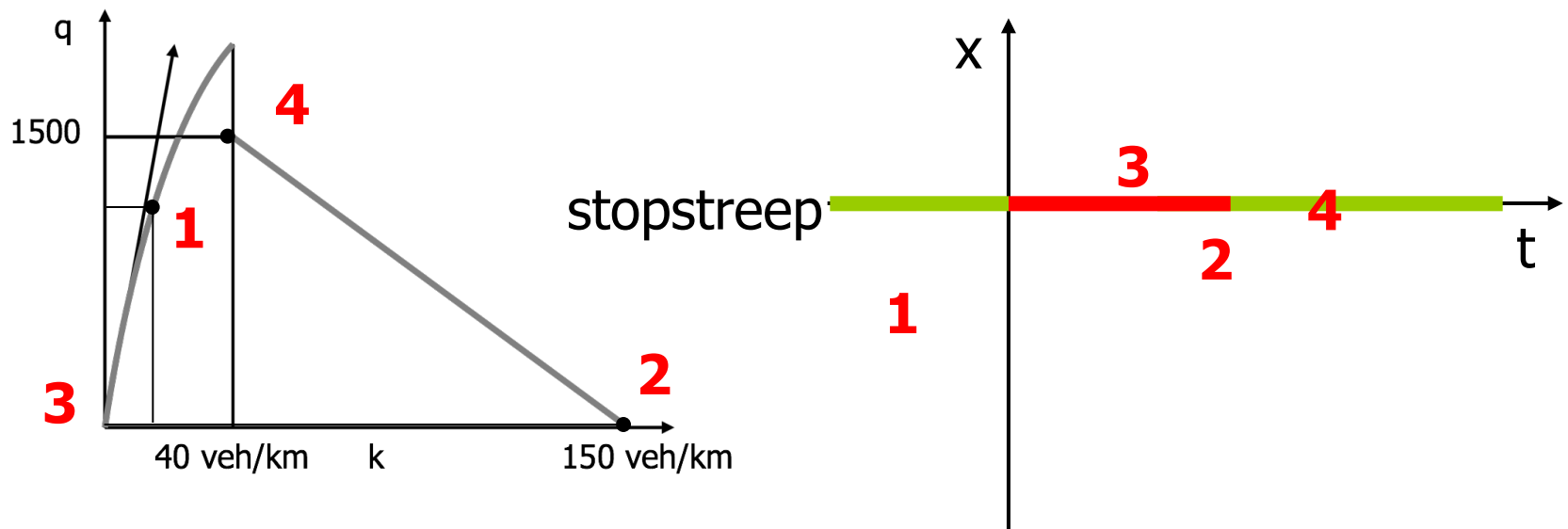
- Beschouw een geregeld kruispunt met groentijd t_g en roodtijd t_r
- Veronderstel dat onderstaand fundamenteel diagram geldt:



Voorbeeldtoepassing

1. Definieer toestanden die ontstaan

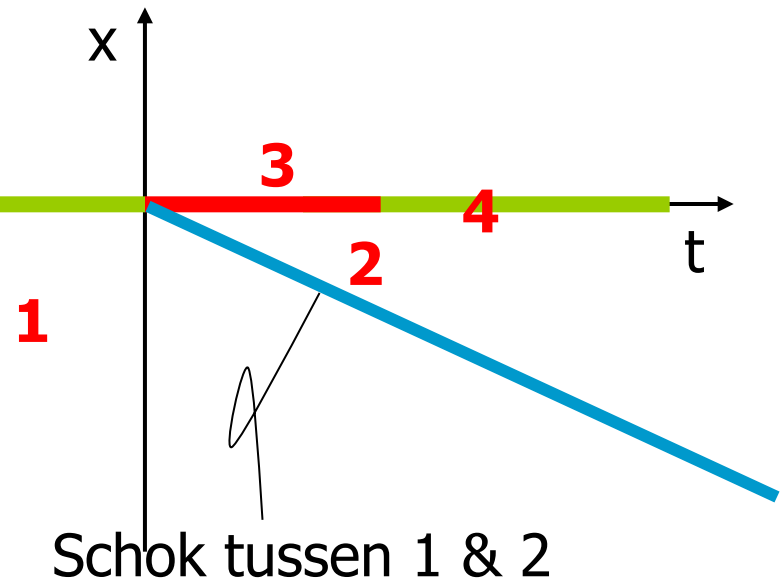
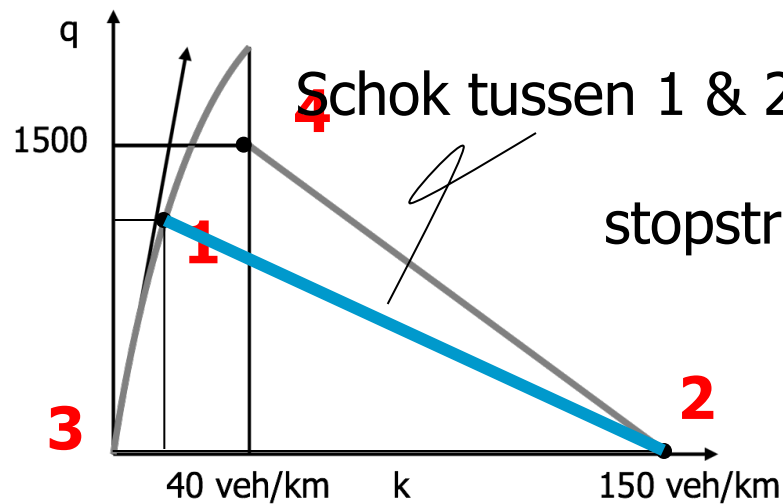
Nr.	k	q
1	18	1000
2	150	0
3	0	0
4	40	1500



Voorbeeldtoepassing

1. Definieer toestanden die ontstaan
2. Bepaal schokgolven / snelheden

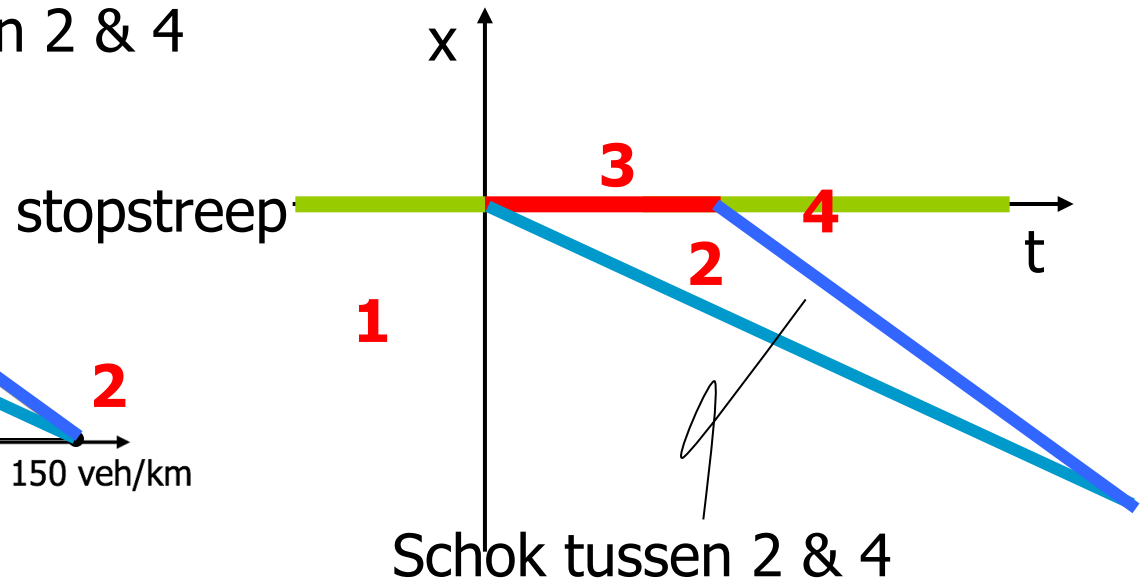
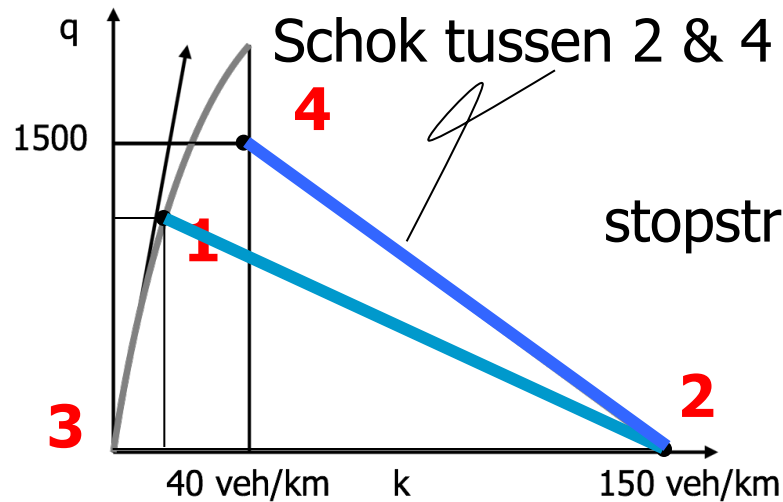
Nr.	k	q
1	18	1000
2	150	0
3	0	0
4	40	1500



Voorbeeldtoepassing

1. Definieer toestanden die ontstaan
2. Bepaal schokgolven / snelheden

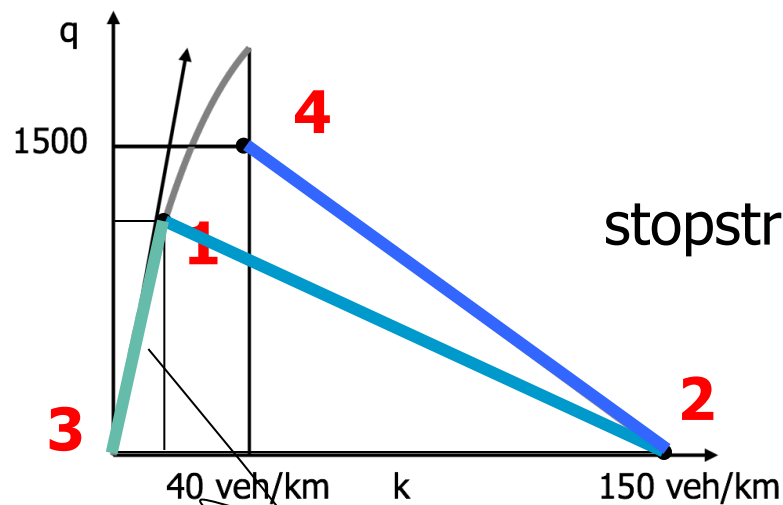
Nr.	k	q
1	18	1000
2	150	0
3	0	0
4	40	1500



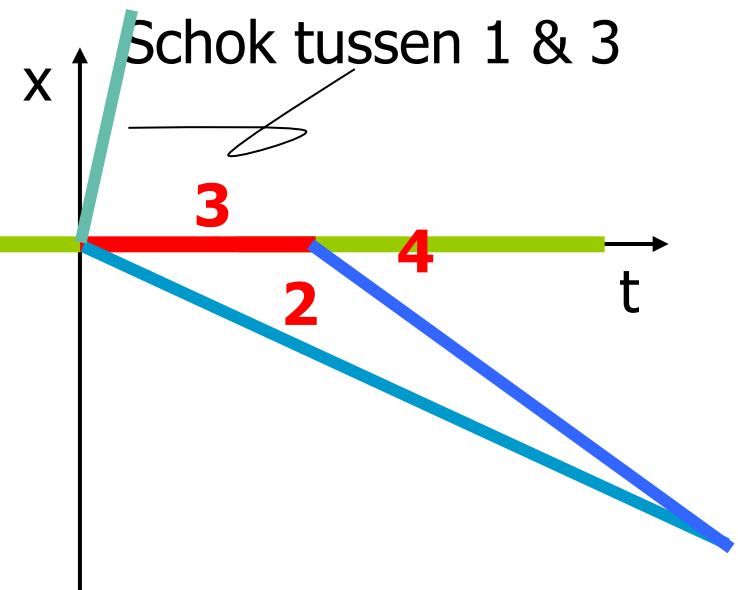
Voorbeeldtoepassing

1. Definieer toestanden die ontstaan
2. Bepaal schokgolven / snelheden

Nr.	k	q
1	18	1000
2	150	0
3	0	0
4	40	1500



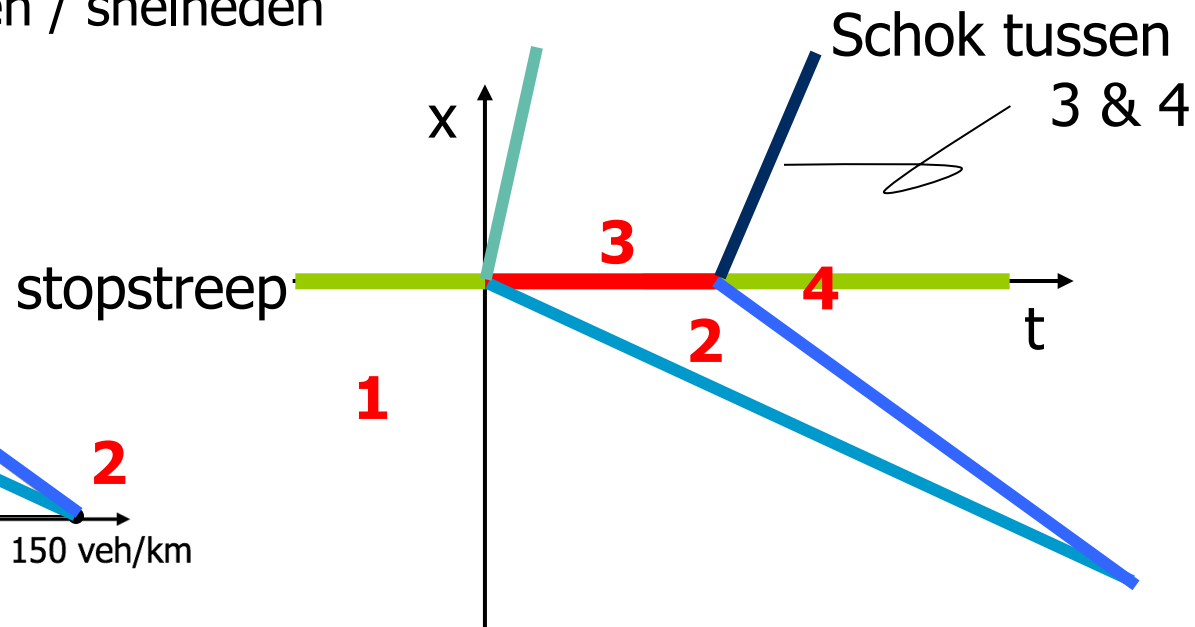
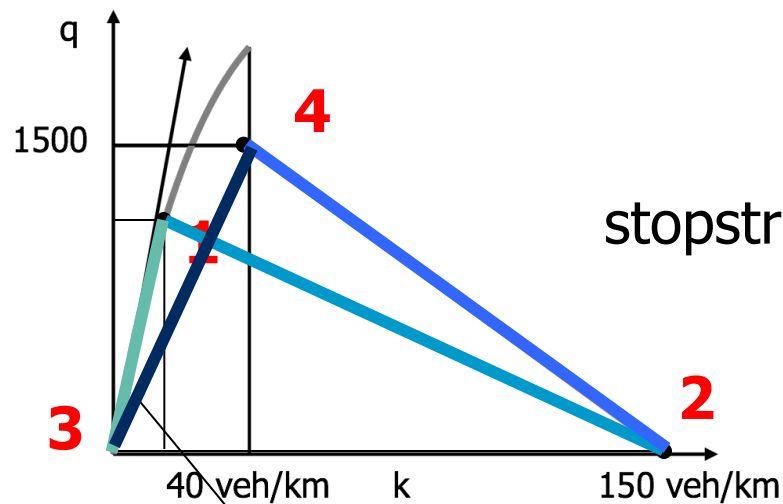
Schok tussen 1 & 3



Voorbeeldtoepassing

1. Definieer toestanden die ontstaan
2. Bepaal schokgolven / snelheden

Nr.	k	q
1	18	1000
2	150	0
3	0	0
4	40	1500

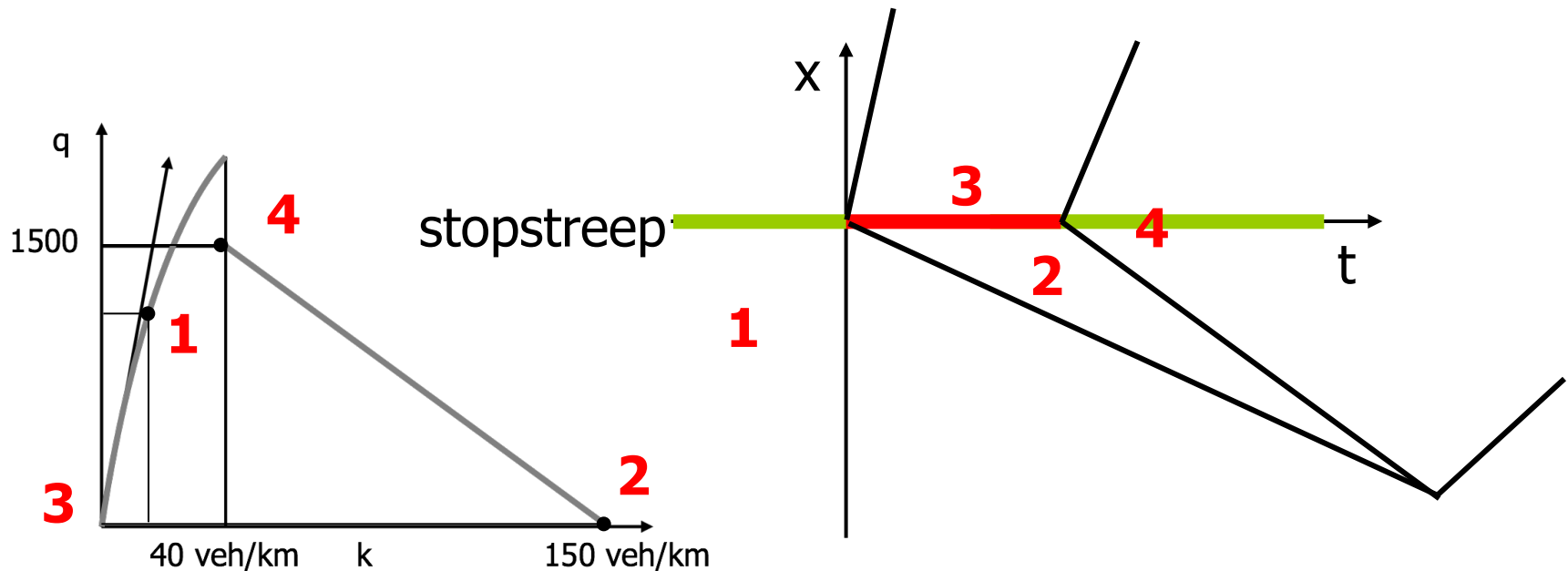


Schok tussen 3 & 4

Voorbeeldtoepassing

Nr.	k	q
1	18	1000
2	150	0
3	0	0
4	40	1500

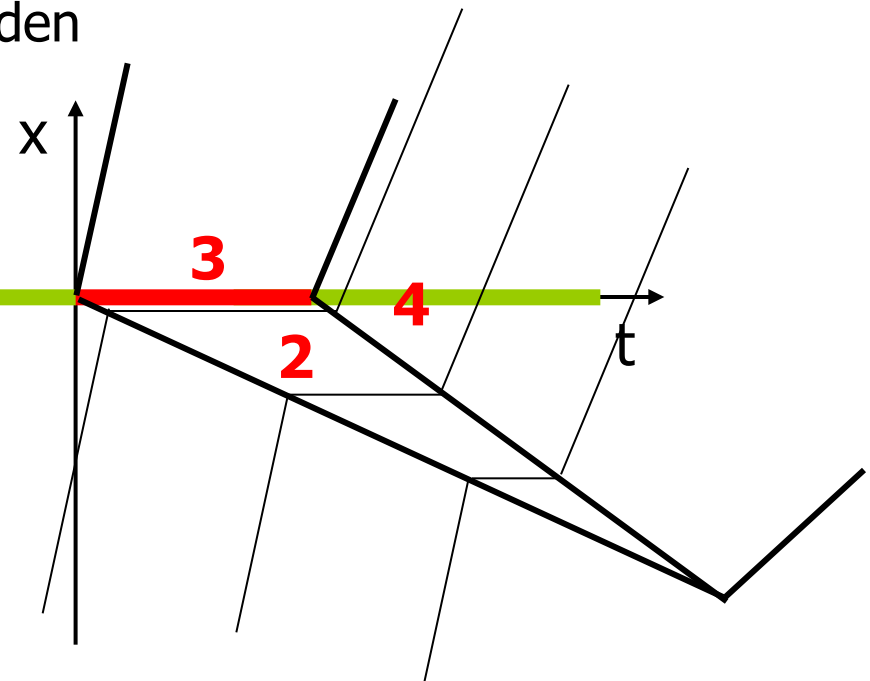
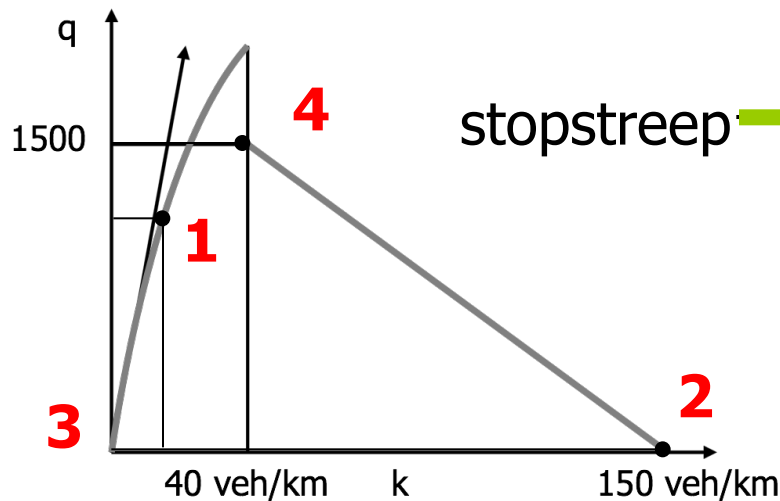
1. Definieer toestanden die ontstaan
2. Bepaal schokgolven / snelheden



Voorbeeldtoepassing

Nr.	k	q
1	18	1000
2	150	0
3	0	0
4	40	1500

1. Definieer toestanden die ontstaan
2. Bepaal schokgolven / snelheden
3. Teken evt. trajectorieën



Resume: hoe lossen files (niet) op?

Schokgolf theorie

1. Beweging van kop en staart van de file kun je heel redelijk voorspellen met schokgolf theorie
 - Schokgolfsnelheid = $\frac{\text{Verschil in intensiteit}}{\text{verschil in dichtheid}}$
2. Recept voor "schokgolfsommen":
 - Begrijp de som !!!
 - Definieer de toestanden (teken fundamenteel diagram en tijdwegdiagrammetje)
 - Bepaal schokgolven / snelheden
 - Teken evt. Trajectorieen
3. Toepassingen:
 - Schetsontwerp, begripsvorming (waar en hoe ontstaat congestie)
 - Eenvoudige analyses (niet gelijk naar ingewikkelde simulaties grijpen!)

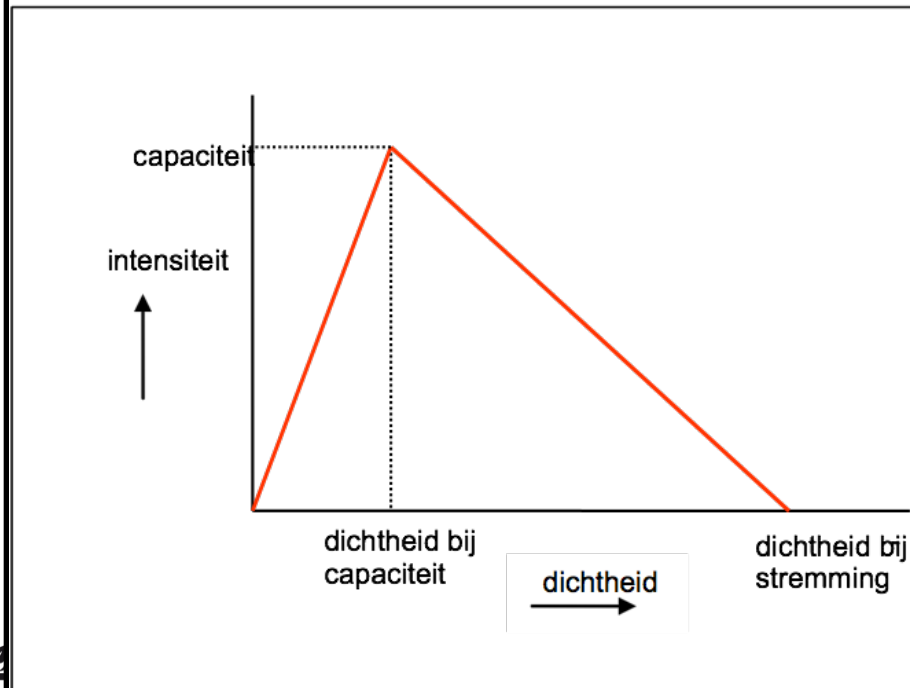
In een tweestrooksrijbaan van een autosnelweg bevindt zich een brug met smallere rijstroken en kleinere capaciteit dan op het baanlichaam. In de tabel staan de verkeersstroomgegevens van de weg.

Het fundamentele diagram volgens figuur 2 is van toepassing.

Relevante formules:

$\omega = (q_1 - q_2) / (k_1 - k_2)$ en $k = q / v$,
waarin q : intensiteit, k : dichtheid en v , ω : snelheid

	capaciteit	dichtheid bij capaciteit	dichtheid bij stremming
rijbaan met twee stroken	4800 vtg/h	40 vtg/km	200 vtg/km
brug	3600 vtg/h	36 vtg/km	200 vtg/km



Figuur 2 Fundamenteel diagram

Vraag a

Wat is de snelheid op de rijbaan en op de brug in wanneer de intensiteit lager is dan de capaciteit?

Vraag b

De intensiteit in de spits bedraagt 4200 vtg/h. Bereken de dichtheid voor en in de file.

Vraag c

Teken in het fundamentele diagram de toestand van het verkeer op de autosnelweg in de spits. Vermeld langs beide assen relevante waarden. Waar ontstaat een file, op de brug, op de weg of op beide?

Vraag d

Wat is de snelheid in de file en met welke snelheid loopt de achterkant van de file terug?

Men overweegt in de spitsuren de vluchtstrook als spitsstrook te gebruiken. Op de brug ontbreekt de vluchtstrook. Voor de rijbaan met spitsstrook geldt:

$$q_{\text{cap}} = 6000 \text{ vtg/h},$$

$$k_{\text{cap}} = 60 \text{ vtg/km en}$$

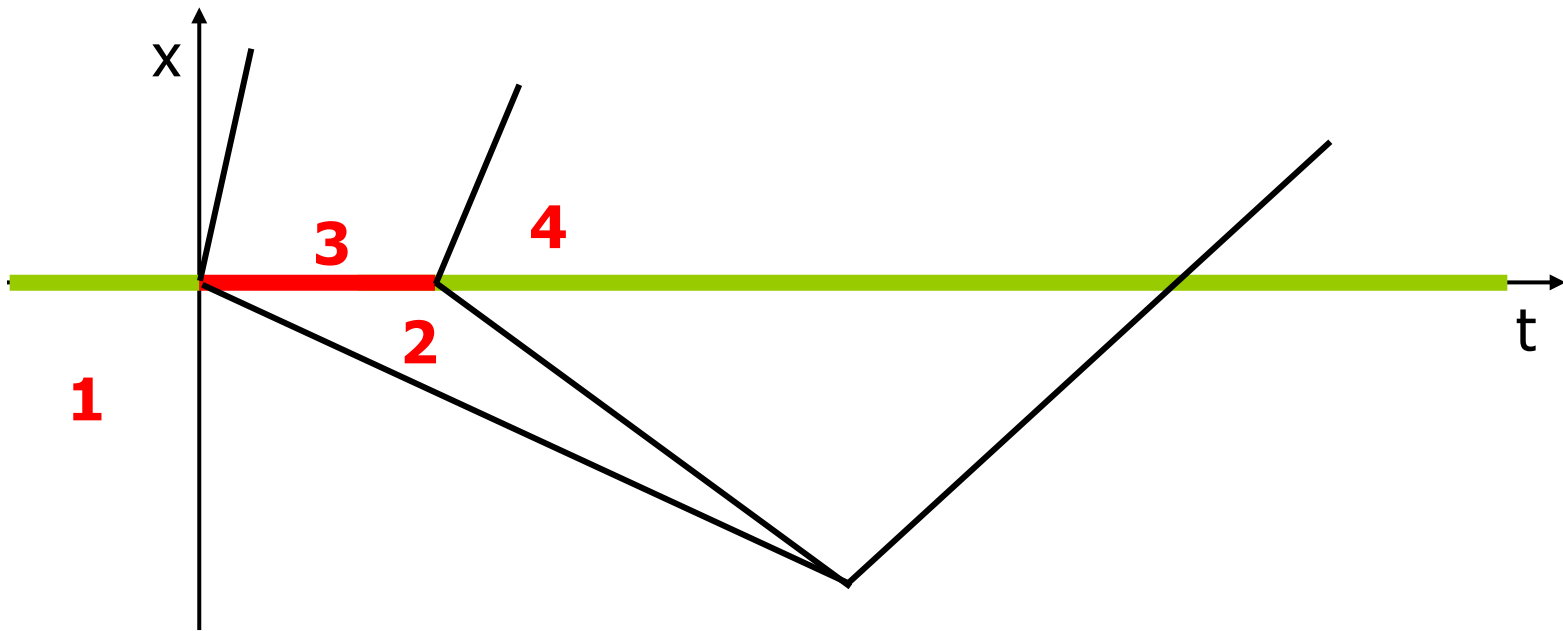
$$k_{\text{stremming}} = 300 \text{ vtg/km}.$$

Vraag e

Beredeneer, zonder berekening, wat het effect is van het openstellen van de spitsstrook. Zal de file eerder zijn verdwenen na afloop van de spits?

Weer een ander soort schokgolfvraag

- Hoe lang moet de groenfase zijn om ervoor te zorgen dat de wachtrij niet iedere cyclus langer wordt?



Weer een ander soort schokgolfvraag

- Het plaatje beneden laat zien wat er gebeurt als de groenfase NIET lang genoeg is ... kun je bedenken hoelang de groentijd moet zijn om dit probleem precies te voorkomen?

