

Statica(WB/MT) college 4

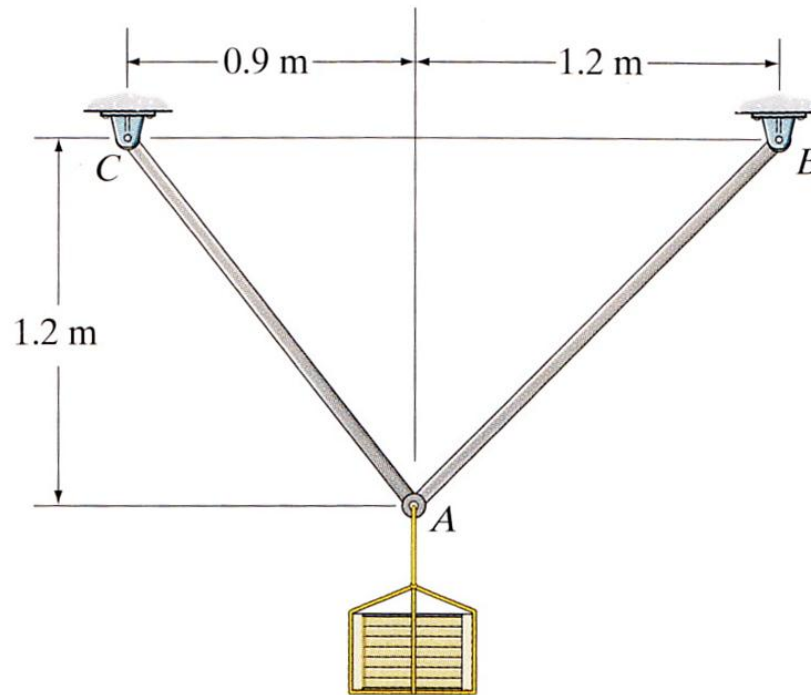
Moment, uitproduct

Guido Janssen

G.c.a.m.janssen@tudelft.nl

Toets 3, vraag 9

- 3–9. If members AC and AB can support a maximum tension of 1500 N and 1250 N , respectively, determine the largest weight of the crate that can be safely supported.

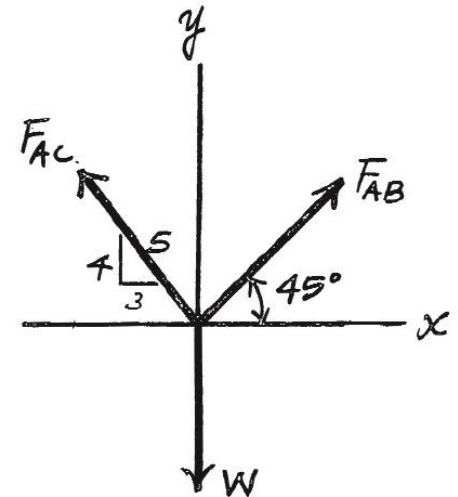


Probs. 3–8/9

Toets 3 – vraag 9

$$F_{AC}^{\max} = 1500 \text{ N}$$

$$F_{AB}^{\max} = 1250 \text{ N}$$



$$\begin{aligned} + \rightarrow \sum F_x = 0 & \quad F_{AB} \cos 45^\circ - F_{AC} \frac{3}{5} = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} + \uparrow \sum F_y = 0 & \quad F_{AB} \sin 45^\circ + F_{AC} \frac{4}{5} - W = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Neem aan dat staaf AB het eerst zal breken, $F_{AB} = 1250 \text{ N}$. Invullen in (1) en (2) geeft

$$F_{AC} = 1473 \text{ N}$$

$$W = 2062 \text{ N}$$

$F_{AC} = 1473 \text{ N} < 1500 \text{ N}$, staaf AC zal niet breken, zoals aangenomen.

Moment van een kracht

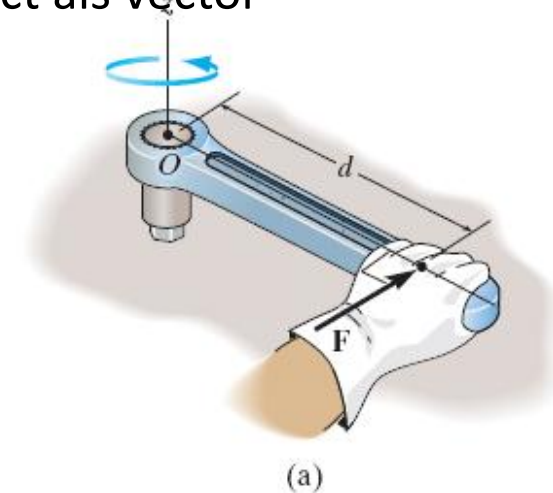
Een kracht kan leiden tot verplaatsing van een lichaam. Een kracht kan ook leiden tot rotatie van een lichaam.

Sterker nog: Je kunt krachterevenwicht hebben en een lichaam dat rondtolt. De neiging om te gaan draaien wordt “torque” genoemd

Om het “willen draaien” te beschrijven voeren we het begrip moment in.

Moment, \mathbf{M} , is een vector. We introduceren het moment twee keer. Eerst via een scalaire formulering, daarna direct als vector formulering.

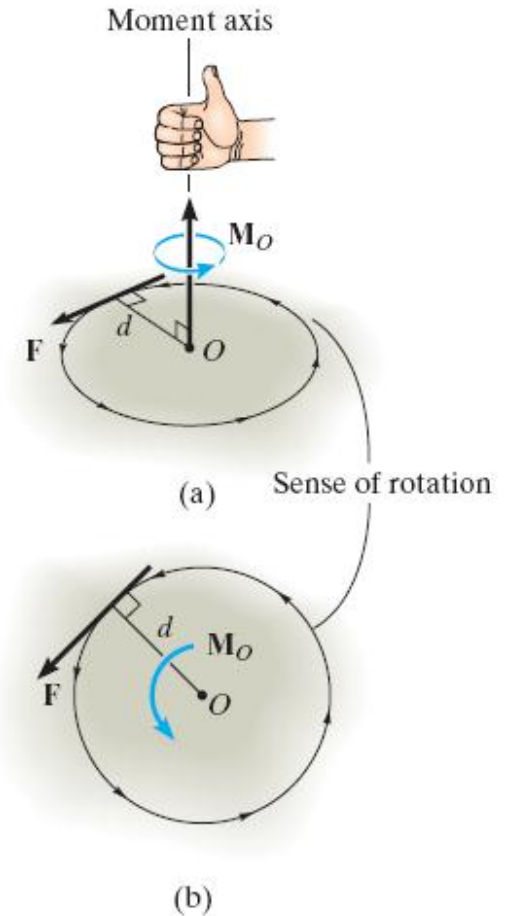
De grootte van het moment om de oorsprong, \mathbf{M}_O , is $M_O = Fd$.



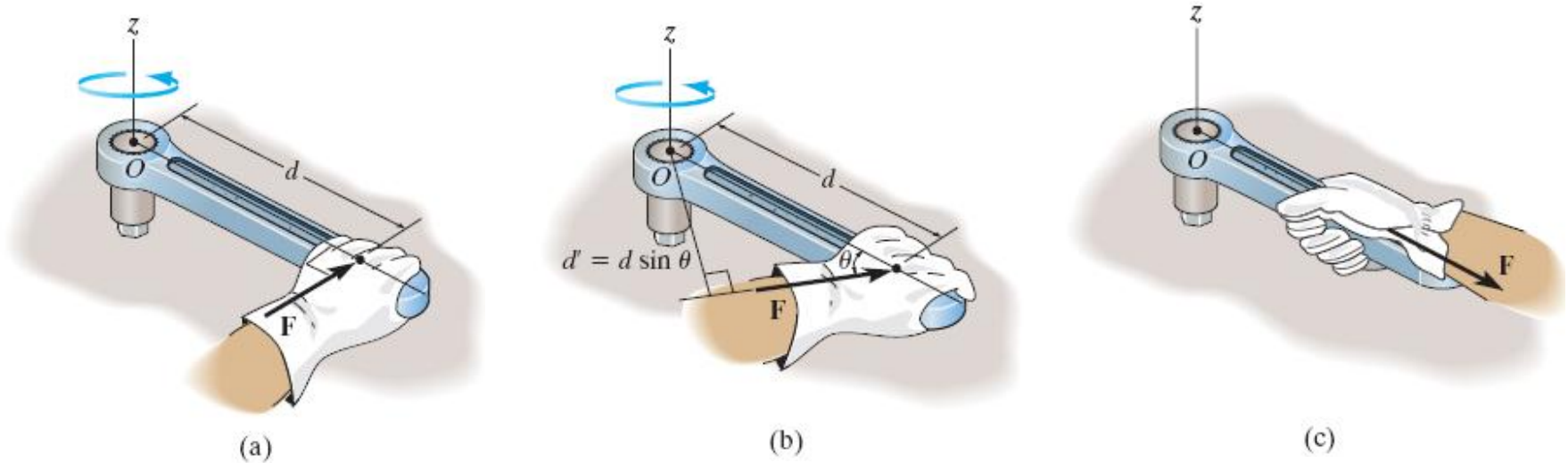
Moment, scalaire formulering

De grootte van de vector \mathbf{M}_O : $|\mathbf{M}_O|$, ook wel M_O , wordt gegeven door: $M_O = Fd$ (Nm)
Waarbij d de loodrechte afstand van O tot de werklijn van \mathbf{F} is.

De richting van \mathbf{M}_O vind je met de rechterhandregel.



Moment, scalair



De formule $M_O = Fd \sin \theta$ laat zien dat het er om gaat hoe ver de werklijn van F van de oorsprong af ligt.

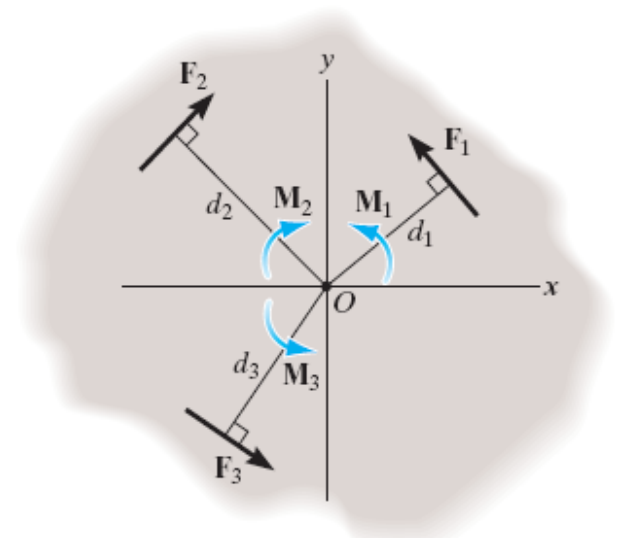
Als de werklijn door de oorsprong gaat is er helemaal geen moment.

Moment, scalair, optellen

Als er meerdere krachten werken, ieder met hun eigen arm, dan moet je de momenten optellen.

Het resulterend moment, \mathbf{M}_{RO} wordt gegeven door:

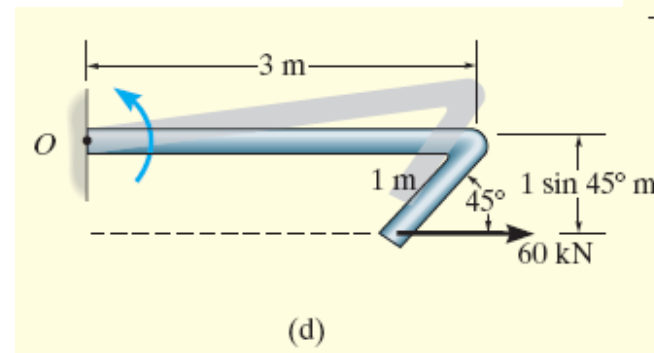
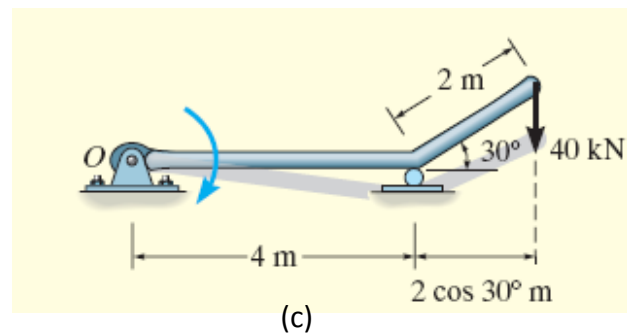
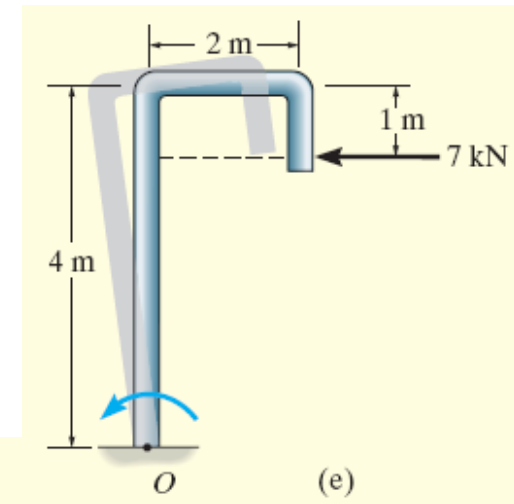
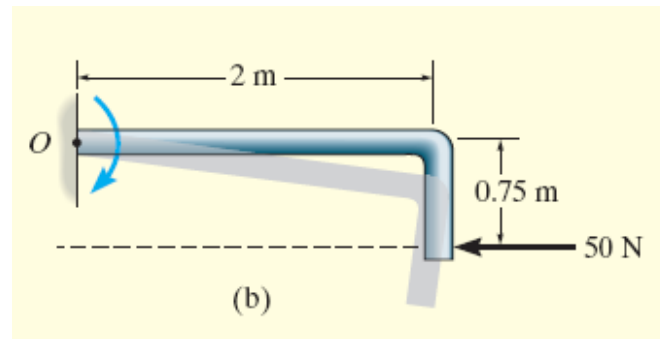
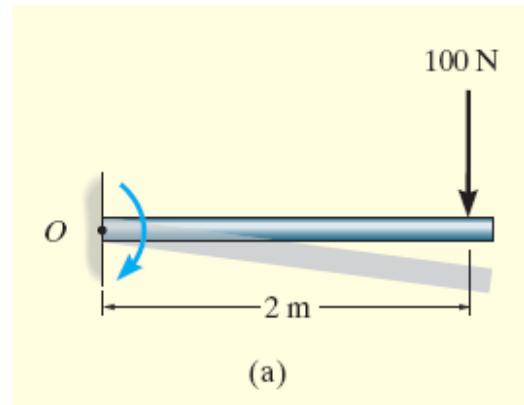
$$M_{RO} = \sum_i M_i = \sum_i F_i d_i$$



De conventie in 2D is dat we “linksom” positief nemen

Example 4.1

Bepaal voor deze vijf gevallen het moment om de oorsprong van de gegeven kracht.



Uitprodukt - 1

Het inprodukt ($\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$) maakt van twee vectoren een scalar.

Het uitprodukt ($\mathbf{A} \times \mathbf{B}$) maakt van twee vectoren een nieuwe vector die loodrecht staat op de twee oorspronkelijke vectoren.

Voor het inprodukt geldt: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$

Voor het uitprodukt geldt: $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = - \mathbf{B} \times \mathbf{A}$

Uitproduct - 2

Als geldt dat $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$, dan geldt ook $C = AB\sin\theta$

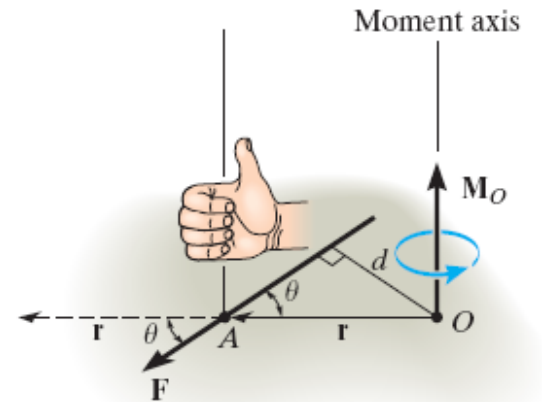
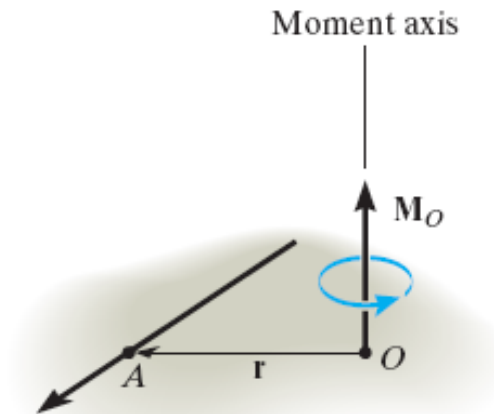
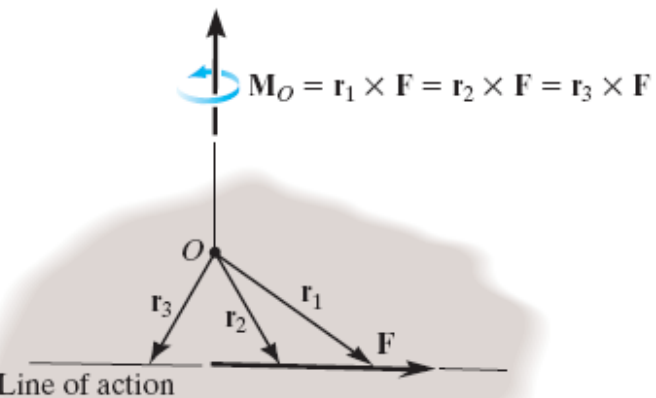
$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \mathbf{i}(A_y B_z - A_z B_y) + \mathbf{j}(A_z B_x - A_x B_z) + \mathbf{k}(A_x B_y - A_y B_x)$$

Moment, vector formulering - 1

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

Waarbij \mathbf{r} de plaatsvector van een willekeurig punt op de werklijn van \mathbf{F} is.

De richting van het moment volgt uit de rechterhandregel.

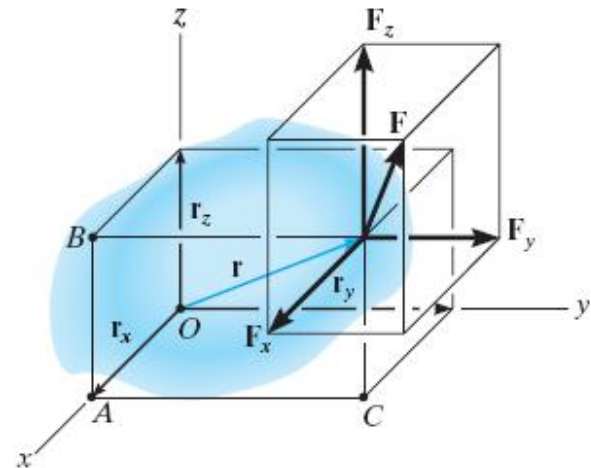
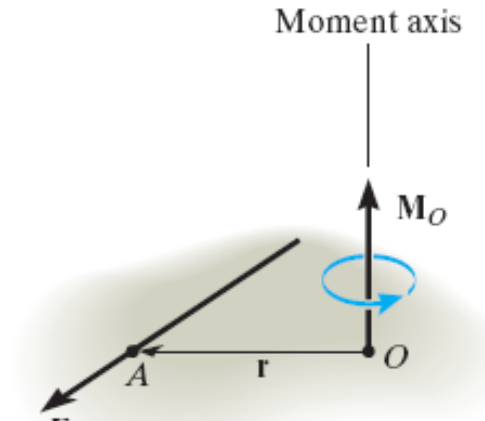
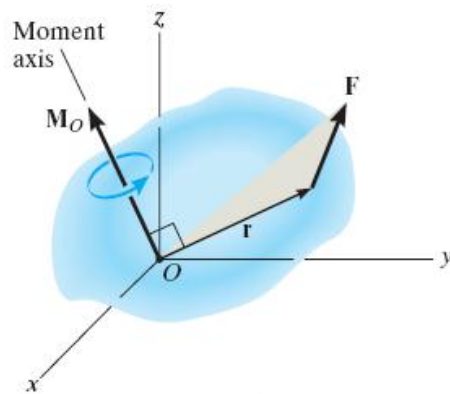


Moment, vector formulering - 2

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

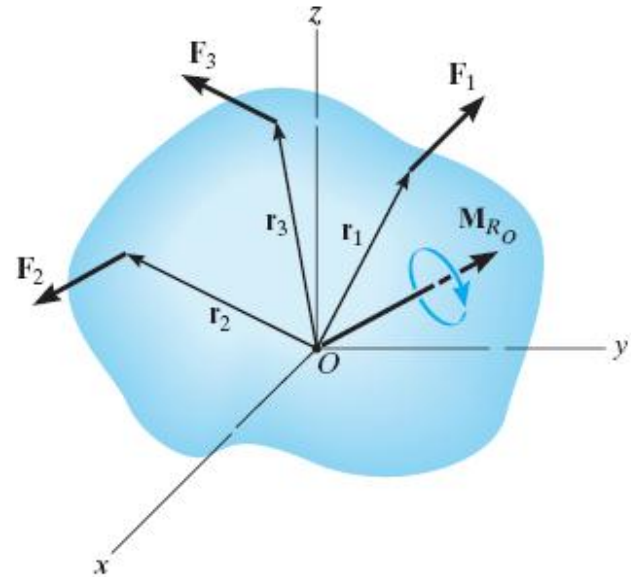
Nu in componenten:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{i}(r_y F_z - r_z F_y) + \mathbf{j}(r_z F_x - r_x F_z) + \mathbf{k}(r_x F_y - r_y F_x)$$



Momenten optellen

$$\mathbf{M}_{RO} = \sum_i \mathbf{M}_i = \sum_i (\mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i)$$



Example 4.4

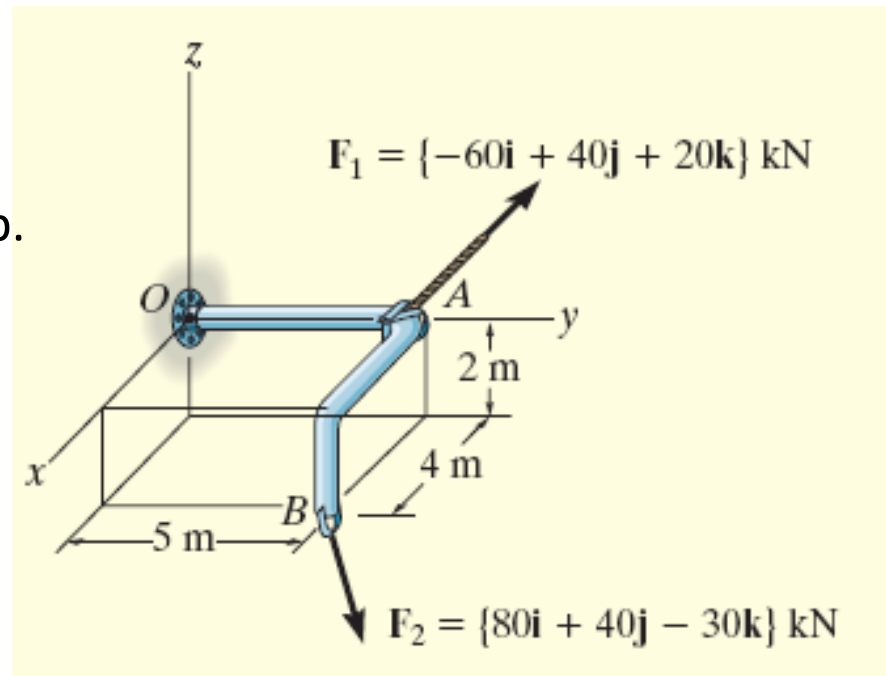
Op de stang in het plaatje werken twee krachten, bij A kracht \mathbf{F}_1 , bij B kracht \mathbf{F}_2 . Bereken het moment dat ze samen op de flens in de oorsprong uitoefenen.

Aanpak:

Stel de positievectoren in A en B op.

Bereken de twee momenten.

Tel de momenten op



Example 4.4

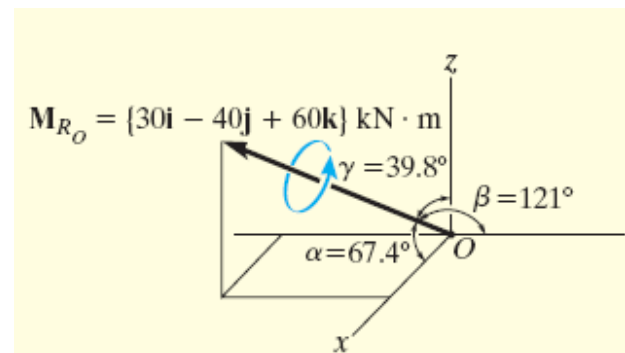
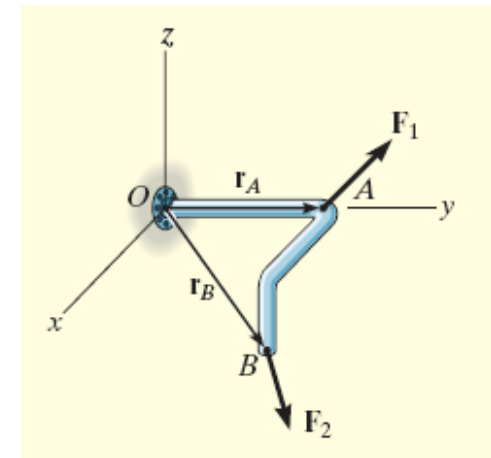
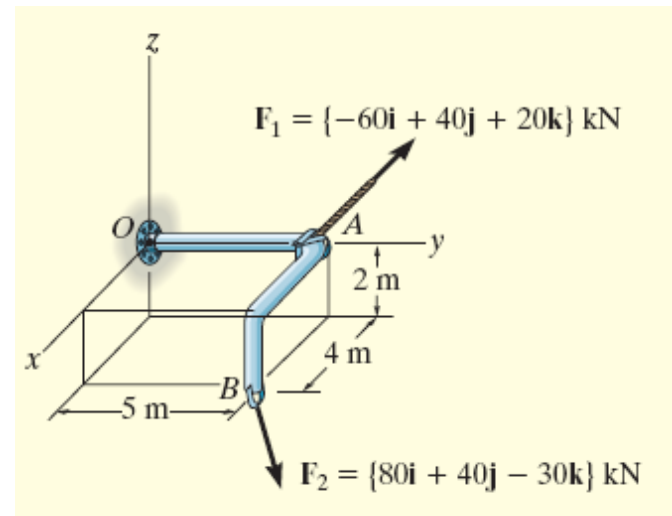
$$\mathbf{r}_A = \{5\mathbf{j}\} \text{ m}$$

$$\mathbf{r}_B = \{4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}\} \text{ m}$$

$$\mathbf{M}_O = \sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) = (\mathbf{r}_A \times \mathbf{F}_1) + (\mathbf{r}_B \times \mathbf{F}_2)$$

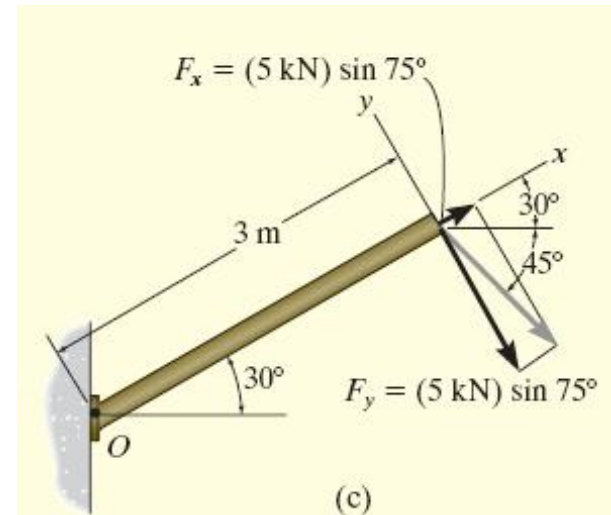
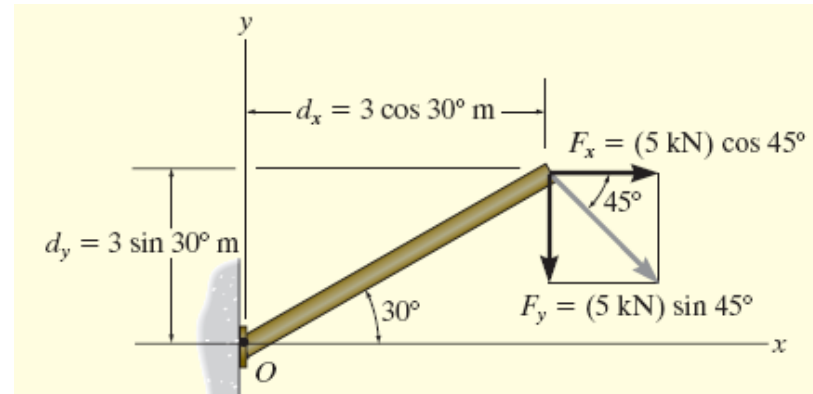
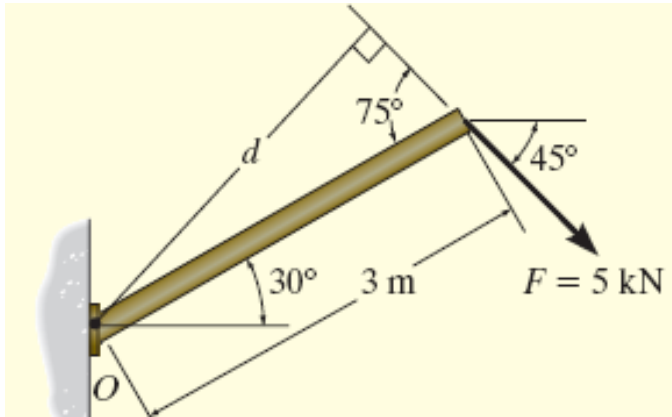
$$\mathbf{M}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 5 & 0 \\ -60 & 40 & 20 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 5 & -2 \\ 80 & 40 & -30 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{M}_O = \{30\mathbf{i} - 40\mathbf{j} + 60\mathbf{k}\} \text{ kN}\cdot\text{m}$$



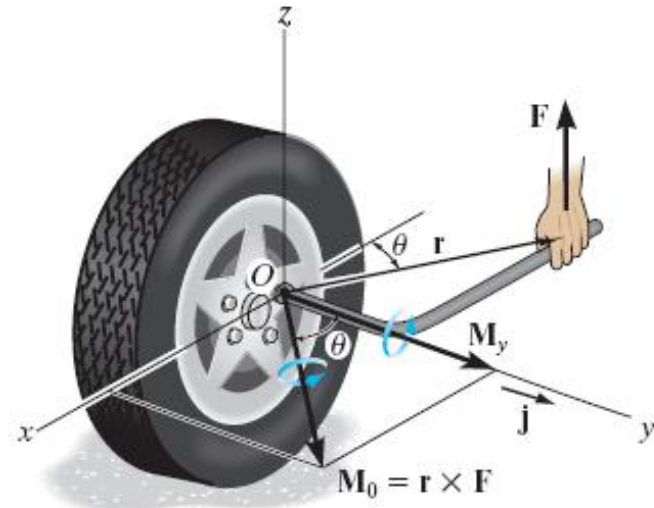
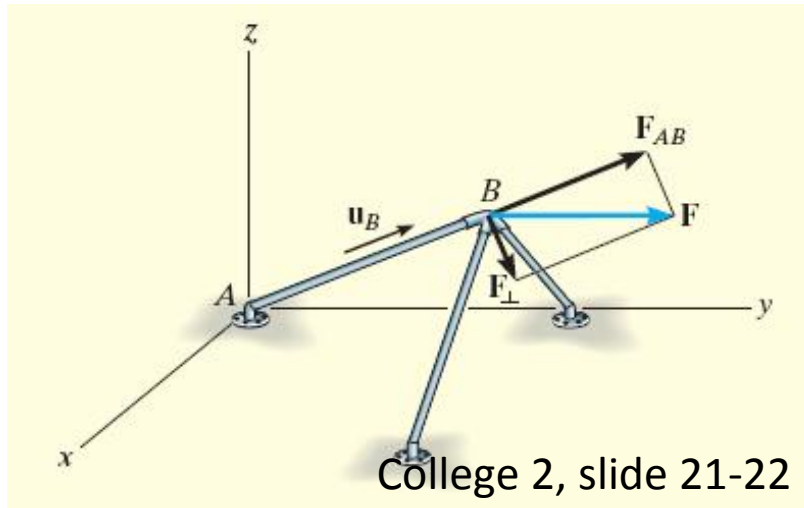
Example 4.5

Bepaal het moment van de kracht F om O .



Moment om een gegeven as.

Een arm \times kracht oefent in een punt (vaak O) een moment \mathbf{M} uit. Als in het probleem een as door O gedefinieerd is waarlangs we geïnteresseerd zijn in het moment, dan gebruiken we de inproduct truc uit college 2 om de nuttige component van het moment te vinden.



$$\mathbf{F}_{AB} = \mathbf{F} \times \mathbf{u}_{AB}$$

$$M_y = \mathbf{M}_O \times \mathbf{j}$$

Example 4.8

Bepaal het moment langs de as AB
t.g.v. de kracht F.

Stappenplan:

Bepaal het moment \mathbf{M}_O van \mathbf{F} om O.

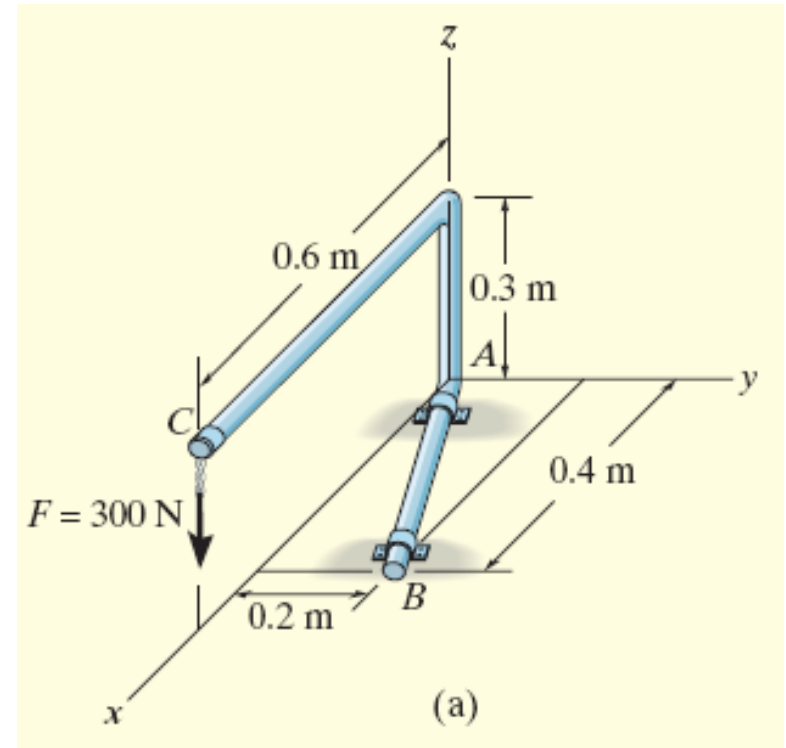
Bepaal de eenheidsvector \mathbf{u}_{AB} langs AB.

Neem het inproduct van \mathbf{M}_O en \mathbf{u}_{AB}

$$\mathbf{M}_O = \{180\mathbf{j}\} \text{ N.m}$$

$$\mathbf{u}_{AB} = \frac{0.4\mathbf{i} + 0.2\mathbf{j}}{\sqrt{0.4^2 + 0.2^2}} = 0.894\mathbf{i} + 0.447\mathbf{j}$$

$$\mathbf{M}_{AB} = M_{AB}\mathbf{u}_{AB} = (80.50 \text{ Nm})(0.894\mathbf{i} + 0.447\mathbf{j}) = \{72.0\mathbf{i} + 36.0\mathbf{j}\} \text{ Nm}$$



$$M_{AB} = M_O \times u_{AB} = (180)(0.447) = 80.50 \text{ Nm}$$

Mededelingen en vragen

- Hoe ging “Newtonian Mechanic”?
- Maple-TA toetsen afsluiten met “Grade”, anders verlies je toegang.
- Aanwezigheidsregistratie bij werkcollege.
- PDF's ?
- Klassenvertegenwoordigers.

Huiswerk

Reflecteer op de eerste paragrafen van hoofdstuk 4.

Maak toets 4. (sluit af met “Grade”).

Deadline woensdagavond laat.

Reflecteer op de werkcollege-sommen.

Spreek met een collega af om nog enkele opgaven te maken en de antwoorden te vergelijken.

Lees de tweede helft van hoofdstuk 4.