TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

TU Delft

Oefententamen IN2505-I Algoritmiek

Maart 2007

- Het gebruik van boek of aantekeningen tijdens dit tentamen is niet toegestaan.
- Dit tentamen heeft 15 meerkeuzevragen in totaal goed voor 12 punten en 4 open vragen met in totaal 30 punten. Je cijfer voor dit tentamen wordt berekend door het aantal behaalde punten door 4.2 te delen. Merk op dat je eindcijfer voor dit vak ook voor $\frac{1}{3}$ uit het onafgeronde gemiddelde van het practicum bestaat.
- Uiteraard komen in één tentamen niet alle onderwerpen aan bod. Trek daarom op basis van dit tentamen geen conclusies over stof die nooit getoetst wordt.
- Wat betreft de meerkeuzevragen:
  - Er is voor iedere vraag telkens maar één goed antwoord mogelijk.
  - Gebruik het antwoordblad.
  - Vul je studienummer zowel met cijfers in als met streepjes/blokjes.
  - Vul het antwoordformulier bij voorkeur in met pen (geen rode pen) of potlood (goed zwart maken); gebruik geen doorhalingen.
  - Probeer hier in totaal niet meer dan een uur aan te besteden. De overige twee uur heb je nodig voor de open vragen.
- Wat betreft de open vragen:
  - Geef antwoord in correct Nederlands of Engels en schrijf leesbaar (gebruik eerst kladpapier).
  - Geef geen irrelevante informatie. Dit kan leiden tot puntenaftrek.
  - Als er wordt gevraagd om een efficiënt algoritme, geef dan het meest efficiënte algoritme dat je kunt bedenken. Een langzamer algoritme kan minder punten opleveren.

Vraag:	1	2	3	4	Totaal:
Punten:	11	6	4	9	30
Score:					

- Voordat je je antwoorden inlevert, controleer of op ieder blaadje je naam en studienummer staat en geef het aantal ingeleverde bladen aan op (tenminste) de eerste pagina.
- De tentamenstof bestaat uit Chapters 1 to 7 uit Algorithm Design van Kleinberg en Tardos, behalve secties 4.9*, 5.6, 6.10*, 7.4*, en 7.13*, en bovendien de notitie over de Master Method en over bewijstechnieken (Proving guide).
- Totaal aantal pagina's: 5.

Meerkeuzevragen

1. Laat het volgende gegeven zijn:

   - de verzamelingen $M = \{m_1, \ldots, m_n\}$ en $W = \{w_1, \ldots, w_{n'}\}$,
   - voor iedere $m \in M$ een strikt geordende lijst met preferences (voorkeuren) over W, en voor iedere $w \in W$ een strikt geordende lijst met preferences over M,
   - een matching $S \subseteq M \times W$.

   We weten dan dat S stabiel is dan en slechts dan als

   A. de matching perfect is.

   B. er geen koppel $(m, w) \in S$, en m' en w' met $m' \neq m$, en $w' \neq w$ te vinden zijn waarvoor geldt: m verkiest w' boven w, en w verkiest m' boven m.

   C. het aantal koppels in S gelijk is aan n en $n = n'$.

   D. zowel A als B geldt.

2. Welk van de volgende beweringen is *niet* waar?

   A. n^3 is $\Omega\left(n^2\right)$.

   B. $n!$ is $\Omega\left(2^n\right)$.

   C. $n \log n$ is $O\left(n^c\right)$ voor $c > 1$.

   D. $\log_3 n$ is $\Theta\left(\log_5 n\right)$.

   E. $\sqrt{10n}$ is $\Omega\left(n\right)$.

3. Laat een graaf G met n knopen (nodes) gegeven zijn. Welke van de volgende beweringen is niet equivalent met de andere?

   1. G is verbonden (connected) en heeft $n - 1$ kanten (edges).
   2. G bevat geen cycle en is verbonden.
   3. G is een boom.
   4. G bevat geen cycle en heeft $n - 1$ kanten.

   Welke van deze beweringen is *niet* equivalent met de andere?

   A. 1

   B. 2

   C. 3

   D. 4

   E. De beweringen zijn allemaal equivalent.

4. Je bent ingehuurd om een algoritme te schrijven om te bepalen of twee mensen in een groep van n mensen verwant zijn (direct of indirect). Je klant geeft je een lijst met namen van de personen $p_1, \ldots, p_n$ en een lijst met paren van de vorm (p_i, p_j) die aangeven dat persoon i verwant is met persoon j. Je besluit wijselijk om de data zo te processen dat je (geamortiseerd) in $O(1)$ antwoord kunt geven op de vraag of twee gegeven personen verwant zijn. Welk algoritme is het meest efficiënt om te gebruiken in je programma voor deze preprocessing?

   A. Prim's algoritme voor de minimum spanning tree

   B. Dijkstra's algoritme voor het kortste pad tussen twee knopen

   C. Breadth-first search

   D. Ford-Fulkerson voor maximum flow

5. Gegeven een verbonden ongerichte bipartite graaf $G = (V, E)$.

   1. Alle cycles in G hebben een oneven lengte.
   2. De knopen van G kunnen zo gekleurd worden met twee kleuren, dat er geen twee knopen $u, v \in V$ met $(u, v) \in E$ zijn die dezelfde kleur hebben.

   Welke stelling(en) is (zijn) waar?

   A. Alleen stelling 1.
   B. Alleen stelling 2.
   C. Stellingen 1 en 2.
   D. Geen van beide stellingen 1 en 2.

6. Gegeven een verzamelingen van n open intervallen (starttijd, eindtijd) in $\mathbb{R}^+$. Hoe zou je de intervallen sorteren om daarna in lineaire tijd te kunnen bepalen wat het grootste aantal overlappende intervallen is?

   A. Aflopend op starttijd (Latest starting time first)
   B. Oplopend op eindtijd (Earliest finishing time first)
   C. Oplopend op starttijd (Earliest starting time first)
   D. Aflopend op eindtijd (Latest finishing time first)

7. Gegeven een graaf G met unieke gewichten op iedere kant (edge). Gegeven ook een kant e. Wanneer weten we zeker dat e in iedere minimale opspannende boom zit (minimal spanning tree) ?

   A. Als het gewicht van e het kleinste is van alle kanten in de graaf.
   B. Als er een snede (cut) (A, B) van de knopen (nodes) in G bestaat waarbij e de kant is met het kleinste gewicht van alle kanten die een knoop in A verbinden met een knoop in B.
   C. Als e voldoet aan de *cut-property*.
   D. Ieder van de bovenstaande voorwaarden is voldoende.

8. Laat de optimale prefix code gegeven zijn als een binaire boom.

   A. De twee laagst frequente letters hebben dezelfde parent (zijn siblings).
   B. De twee laagst frequente letters zitten op het diepste niveau in de boom.
   C. De boom is gebalanceerd.
   D. Ieder van de bovenstaande beweringen is geldig.

9. Gegeven zijn twee integers x en y van ieder n bits. We definiëren $x_1$als de $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ meest significante bits van x en x_0 als de $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ minst significante bits van x. Analoog definiëren we y_1 en y_0. Het algoritme om in $O\left(n^{\log_2 3}\right)$ tijd twee integers te vermenigvuldigen is gebaseerd op de volgende herschrijving van een vermenigvuldiging van x en y en een recursieve aanroep van de hierin voorkomende vermenigvuldigingen.

   A. $xy = \left(x_1 \cdot 2^{\frac{n}{2}} + x_0\right)\left(y_1 \cdot 2^{\frac{n}{2}} + y_0\right)$
   B. $xy = x_1y_1 \cdot 2^n + \left((x_1 + x_0)(y_1 + y_0) - x_1y_1 - x_0y_0\right) \cdot 2^{\frac{n}{2}} + x_0y_0$
   C. $xy = x_1y_1 \cdot 2^n + (x_1y_0 + x_0y_1) \cdot 2^{\frac{n}{2}} + x_0y_0$
   D. $xy = x_1y_1 \cdot 2^n + (x_1y + x_0y) \cdot 2^{\frac{n}{2}}$

10. Gegeven een verzameling punten $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$. We definiëren $e_{i,j}$ als de (minimale) fout die wordt verkregen als de punten i tot en met j worden benaderd met één lijnstuk.[1] We definiëren C als de kosten voor het introduceren van een extra lijnstuk. Welke van de volgende formules voor OPT geeft dan correct weer wat de minimale kosten zijn voor het benaderen van de punten 1 tot j met behulp van lijnstukken?

    $\mathsf{OPT}(0) = 0$, en voor $j > 0$

    A. $\mathsf{OPT}(j) = \min_{1 \le i \le j} (e_{i,j} + C + \mathsf{OPT}(i-1))$

    B. $\mathsf{OPT}(j) = e_{j-1,j} + C + \mathsf{OPT}(j-1)$

    C. $\mathsf{OPT}(j) = \min (e_{j-1,j} + C + \mathsf{OPT}(j-1), \mathsf{OPT}(j-1))$

    D. $\mathsf{OPT}(j) = e_{1,j} + C + \mathsf{OPT}(\frac{j}{2})$

11. Het probleem van het vinden van de ruimtelijke structuur van een RNA-molecuul (RNA Secondary Structure) is als volgt: gegeven een string basen $B = b_1 \ldots b_n$ vind een zo groot mogelijke verzameling S van paren (i, j) waarbij $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, die aan de volgende voorwaarden voldoen:

    1. Geen scherpe bochten: als $(i, j) \in S$ dan $|j - i| > 4$.
    2. Ieder paar bestaat ofwel uit een A en een U, ofwel uit een C en een G.
    3. Geen enkele base b_i voor $i \in \{1, \ldots, n\}$ komt in meer dan één paar voor.
    4. Geen kruisingen: Als (i, j) en (k, l) twee paren in S zijn, dan mag het niet zo zijn dat $i < k < j < l$.

    De oplossing voor dit probleem met behulp van dynamisch programmeren slaat de resultaten van deelproblemen op in een tabel. Schrijf de recursieve functie die door dit algoritme gebruikt wordt op je kladpapier. Beantwoord dan de volgende vraag: wat is de complexiteit van dit algoritme?

    A. $O(1)$

    B. $O(n^3)$

    C. $O(\log n)$

    D. $O\left(n^2\right)$

    E. $O(n)$

12. Welke van de volgende beweringen is niet altijd geldig?

    A. De waarde van de stroom (flow) is gelijk aan de netto waarde van de stroom door iedere willekeurige $s - t$ snede (cut).

    B. De waarde van de stroom kan nooit meer zijn dan de capaciteit van iedere willekeurige $s - t$ snede (cut).

    C. De waarde van de maximale stroom is gelijk aan de rest-capaciteit over iedere willekeurige $s - t$ snede (cut).

    D. De waarde van de maximale stroom in een netwerk is gelijk aan de capaciteit van de kleinste $s - t$ snede (cut).

13. Bekijk het flow netwerk in figuur 1 en beantwoord dan de volgende vraag. Wat is een mogelijk augmenting path?

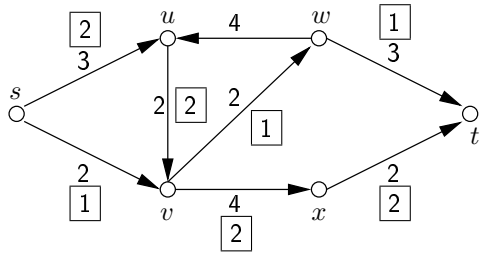
    A. $s - v - x - t$

    B. $s - u - v - w - t$

    C. $s - u - w - t$

    D. $s - v - w - t$

[1] Hiertoe wordt de minimale som van de kwadraten van de Euclidische afstanden van de punten i tot en met j tot het lijnstuk berekend.



Figuur 1: Een stroom (flow) netwerk. De getallen bij de kanten zijn de capaciteiten. De stroom (flow) op iedere kant is weergegeven in een vierkantje.

14. Stel dat we de capaciteit van iedere edge verdubbelen en we verdubbelen ook de maximale flow op iedere edge. Is dit dan nog steeds een maximale flow?

    A. Wel in dit voorbeeld, maar niet in het algemeen.

    B. Nee, nooit.

    C. Ja, dat geldt altijd.

    D. Alleen als de graaf geen cycles bevat.

15. Stel dat voor iedere kant een minimale flow van 1 vereist is. Kunnen we het algoritme van Ford-Fulkerson dan nog steeds gebruiken om een geschikte stroom te vinden?

    A. Ja, maar we moeten dan overal de capaciteit met 1 verlagen.

    B. Nee, we moeten dan een dynamisch programmeren benadering gebruiken.

    C. Ja, we moeten dan een kant van t naar s toevoegen en in deze graaf een circulatie vinden.

    D. Nee, er bestaat dan geen geldige stroom.

Open vragen

1. Je bedrijfje heeft de mogelijkheid om een groot aantal projecten uit te voeren. Het resultaat van sommige van die projecten is een voorwaarde voor andere projecten. Stel dat deze precendentierelaties zijn weergegeven in een a-cyclische gerichte (directed) graaf $G = (V, E)$. De knopen V representeren de projecten en iedere gerichte kant $(u, v) \in E$ betekent dat u uitgevoerd moet worden voordat v uitgevoerd kan worden.
   (a) (6 punten) Bewijs dat als er geen cycles in de graaf G zitten, dat er dan altijd een knoop is zonder inkomende kanten (in maximaal 10 regels).
   (b) (5 punten) Geef een algoritme in pseudocode dat een geschikte volgorde bepaalt om deze projecten uit te voeren (in maximaal 10 regels).

2. (6 punten) Langs een lange weg staan hier en daar wat huizen. Uit ervaring blijkt dat er veel ongelukken gebeuren als mensen na een kroegbezoek in de auto stappen. De gemeente wil daarom dat er voor ieder huis een kroeg binnen fietsafstand is. De fietsafstand wordt gesteld op 5km. Gegeven deze randvoorwaarde, wil de gemeente zo min mogelijk kroegen langs de weg. Laat de afstand $x_1, \ldots, x_n$ tot ieder huis vanaf het begin van de weg gegeven zijn. Gegeven is het volgende (greedy) algoritme dat bepaalt op welke plaats(en) de kroeg(en) moet(en) komen.

   `sorteer de afstanden` $x_1, \ldots, x_n$ (oplopend)
   $l = -\infty$; $j = 1$
   for $i = 1$ *to* n **do**
   if $|x_i - l| > 5$ **then**
   $l_j = x_i + 5$
   $l = l_j$
   $j = j + 1$
   end
   end

   Laat zien dat dit algoritme correct is. Geef hiertoe een bewijs volgens "greedy stays ahead" voor de volgende stelling (in maximaal 15 regels):

   Proposition. *Laat $O = \{o_1, \ldots, o_m\}$ de verzameling optimale locaties voor de kroegen zijn. Het greedy algoritme levert dan locaties $L = \{l_1, \ldots, l_k\}$ op, zodanig dat $k \leq m$ en dat alle huizen x_i binnen fietsafstand zijn van een kroeg.*

3. Geef een asymptotische boven en ondergrens voor $T(n)$ in ieder van de volgende recurrente betrekkingen. Neem aan dat $T(n)$ constant is voor $n \leq 10$. Maak je grenzen zo krap (tight) mogelijk en geef aan hoe je aan je antwoord komt.
   (a) (2 punten) $T(n) = 4T(n/5) + n \log n$
   (b) (2 punten) $T(n) = 2T(n/3) + \log^2 n$

4. In een fabriek staan m machines. In de fabriek worden n soorten taken uitgevoerd. Voor iedere type taak j is bekend welke machines M_j die taak kunnen uitvoeren. Iedere dag moeten er tussen de c_j en c'_j taken worden afgehandeld. Iedere machine i kan maximaal m_i taken per dag uitvoeren. Het probleem is om taken aan machines toe te wijzen zodanig dat aan deze eisen voldaan wordt. Gegeven is dat er nooit meer dan $k = \max_j c'_j$ taken van één type worden afgehandeld per dag.
   (a) (6 punten) Geef een polynomiaal algoritme (in m, n en/of k) om een toewijzing te vinden. Doe hierin een aanroep van een bekend algoritme voor het bepalen van de maximale flow (in maximaal 20 regels).[2]
   (b) (3 punten) Geef aan hoeveel de looptijd is van je algoritme en hoe je hieraan komt (in maximaal 5 regels).

[2] Je hoeft dit algoritme niet uit te schrijven.

Einde tentamenopgaven