

Tentamen IN2505-I Algoritmiek

27 maart 2008, 14.00-17.00

- Het gebruik van boek, aantekeningen of rekenmachine tijdens dit tentamen is **niet** toegestaan.
- Dit tentamen heeft 15 meerkeuzevragen in totaal goed voor 3 punten en 4 open vragen in totaal goed voor 6 punten. Je krijgt sowieso 1 punt kado. Merk op dat je eindcijfer voor dit vak ook voor $\frac{1}{3}$ uit het onafgeronde gemiddelde van het practicum bestaat (mits ≥ 5.0).
- Wat betreft de meerkeuzevragen:
 - Er is voor iedere vraag telkens maar één goed antwoord mogelijk.
 - Alle vragen tellen even zwaar, maar bij de puntentoekening wordt wel gokkanscorrectie toegepast.
 - Schrijf je antwoorden eerst op kladpapier en neem ze later over op het antwoordformulier.
 - Vul je studienummer zowel met cijfers in als met streepjes/blokjes.
 - Vul het antwoordformulier bij voorkeur in met pen (geen rode pen) of potlood (goed zwart maken); gebruik geen doorhalingen.
 - Probeer in totaal niet meer dan een uur aan de meerkeuzevragen te besteden. De overige twee uur heb je nodig voor de open vragen.

- De open vragen worden als volgt gewogen:

Vraag:	1	2	3	4	Totaal:
Punten:	6	6	9	9	30

- Geef antwoord in correct Nederlands of Engels en schrijf leesbaar (gebruik eerst kladpapier).
 - Geef geen irrelevante informatie. Dit kan leiden tot puntenaftrek. Het aangegeven maximaal aantal regels is van toepassing op (getypte) regels met ongeveer 80 karakters en wordt naar verhouding aangepast aan de grootte van je handschrift en het gebruik van witruimte.
 - Als er wordt gevraagd om een efficiënt algoritme, geef dan het meest efficiënte algoritme dat je kunt bedenken. Een langzamer algoritme kan minder punten opleveren.
 - Voordat je je antwoorden inlevert, controleer of op ieder blaadje je naam en studienummer staat en geef het aantal ingeleverde bladen voor de open vragen aan op (tenminste) de eerste pagina.
- De tentamenstof bestaat uit Chapters 1 to 7 uit Algorithm Design van Kleinberg en Tardos (behalve secties 4.9*, 5.6, 6.10*, 7.4*, en 7.13*), en bovendien de notities over de Master Method en over bewijstechnieken (Proving guide).
 - Totaal aantal pagina's: 5.

Open vragen

1. Geef een asymptotische boven- en ondergrens voor $T(n)$ in ieder van de volgende recurrenente betrekkingen. Maak je grenzen zo krap (tight) mogelijk en geef aan hoe je aan je antwoord komt (in maximaal 5 regels per recurrenente betrekking).
 - (a) (3 punten) $T(n) = 9T(n/3) + n^2$
 - (b) (3 punten) $T(n) = 2T(n/2) + n^2 \log n$
2. Laat een verbonden graaf $G = (V, E)$ gegeven zijn met positieve en unieke kosten (distinct costs) op de kanten en laat $T = (V, E')$ een opspannende boom (spanning tree) zijn van G .
 - (a) (3 punten) Stel dat T een minimale opspannende boom is (minimal spanning tree) en dat er een nieuwe kant $e = (v, w)$ met kosten c_e wordt toegevoegd aan G . Geef een $O(|V|)$ algoritme dat bepaalt of T nog steeds een minimale opspannende boom is. Geef ook aan welke datastructuren je gebruikt en waarom je algoritme $O(|V|)$ is (in maximaal 10 regels).
 - (b) (3 punten) Bewijs dat je algoritme uit vraag (a) correct is (in maximaal 10 regels).
3. Een autofabriek heeft twee productielijnen met ieder n machines. Machine j in de ene lijn heeft precies dezelfde functionaliteit als machine j in de andere. Slechts de benodigde tijd kan verschillen, omdat er soms in de ene en soms in de andere lijn machines vervangen zijn door nieuwere modellen. De benodigde tijd voor machine j in lijn i (met $i \in \{1, 2\}$) is gegeven en noteren we met $a_{i,j}$.

Omdat de functionaliteit van de machines gelijk is, is het mogelijk om een auto na een machinehandeling j van lijn i over te zetten op de andere lijn. Dit kost $t_{i,j}$ tijd. Het management wil graag weten wat de minimale doorlooptijd voor de productie van een auto is waarbij *beide* lopende banden gebruikt mogen worden.

 - (a) (1 punt) Laat $\text{OPT}_1(j)$ de minimale doorlooptijd zijn voor de eerste j machines waarbij machine j van lijn 1 wordt gebruikt, en laat $\text{OPT}_2(j)$ de minimale doorlooptijd zijn voor de eerste j machines waarbij machine j van lijn 2 wordt gebruikt. Laat zien hoe de minimale doorlooptijd door alle n machines in deze twee functies uitgedrukt kan worden (in maximaal 3 regels).
 - (b) (3 punten) Wanneer in de definitie van een functie f_1 een aanroep van een functie f_2 wordt gedaan en in de definitie van die functie f_2 weer een aanroep van f_1 wordt gedaan, dan zeggen we dat die functies *wederzijds recursief* zijn gedefinieerd. Geef een wederzijds recursieve definitie voor OPT_1 en OPT_2 (in maximaal 10 regels).
 - (c) (4 punten) Geef een efficiënt iteratief algoritme met behulp van dynamisch programmeren dat de minimale doorlooptijd berekent en leg uit hoe dit optimale traject na afloop geprint kan worden (samen in maximaal 15 regels).
 - (d) (1 punt) Geef aan wat de looptijd is van je algoritme en hoe je hieraan komt (in maximaal 3 regels).
4. Het gemeentebestuur van Delft wil alle auto's in het centrum verbieden. Inwoners met een parkeervergunning krijgen een parkeerplaats toegewezen in een van de parkeergarages net buiten het centrum. De gemeenteraad gaat alleen akkoord als de auto van iedere inwoner met een parkeervergunning toch nog binnen tien minuten lopen geparkeerd kan worden (tegelijktijd).

Laat de lijst parkeerterreinen en -garages p_1, \dots, p_m met het bijbehorend aantal plaatsen c_1, \dots, c_m en de verzameling inwoners met parkeervergunning v_1, \dots, v_n gegeven zijn. Bovendien hebben we de beschikking over een afstandsfunctie d die voor een parkeerplaats p_i en een inwoner v_j het aantal minuten lopen $d(p_i, v_j)$ van het woonadres van v_j naar parkeerplaats p_i geeft.

 - (a) (4 punten) Modelleer dit probleem door middel van een stroomnetwerk (flow network) (in maximaal 10 regels).
 - (b) (2 punten) Leg uit hoe je met behulp van dit stroomnetwerk efficiënt kunt bepalen of aan de eis van de gemeenteraad voldaan wordt (in maximaal 5 regels).
 - (c) (3 punten) Leg uit hoe je met behulp van dit stroomnetwerk een toewijzing van inwoners aan parkeerplaatsen kunt bepalen en beargumenteer dat dit correct is (in maximaal 10 regels).