

Circuits and Signal Processing

ET2405-d2

2^e college

Arie van Staveren en Wouter A. Serdijn

Leerdoelen

Na afloop van dit college kan je:

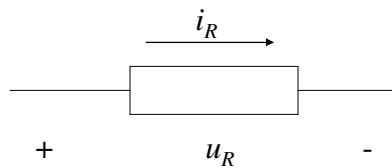
- het principe en de modellering van thermische ruis uitleggen;
- Norton-Thevenin, E-shift en Blakesley toepassen voor ruistransformaties;
- de begrenzingen in signaalniveaus in filters aangeven;
- het DR van een geïdealiseerde integrator bepalen;
- twee methoden van DR optimalisatie voor filters uitleggen;
- Een filter m.b.v. nullors, weerstanden en capaciteiten implementeren

Dynamisch Bereik



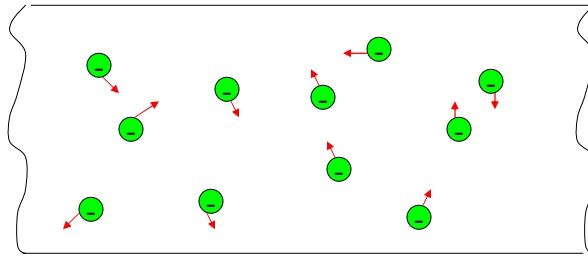
$$SNR = \frac{\text{maximaal signaalvermogen}}{\text{ruisvermogen}} \quad \text{hetzelfde tijdstip}$$

Thermische Ruis



Stroom als gevolg van spanning en vrije ladingsdragers

➔ wet van Ohm.....



+

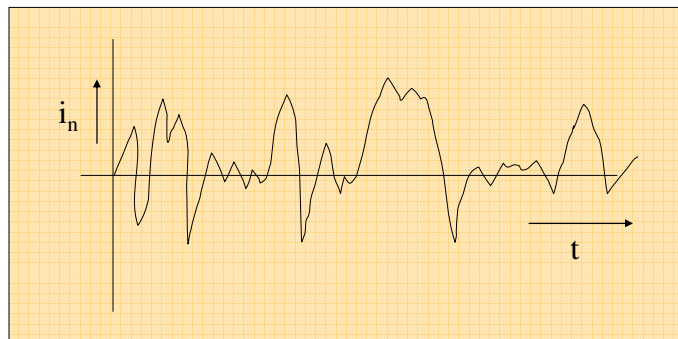
$$u_R = 0 \text{ V}$$

-

Ladingsdragers bewegen willekeurig t.g.v. thermische energie

➔ Ruisstroom (duale situatie, $i_R = 0 \text{ A}$, ruisspanning)

- Gemiddelde waarde = 0 A
- Momentane waarde $\neq 0 \text{ A}$



➔ $\bar{i}_n = 0$

➔ $i_n(t) = \text{random}$

Ruis bepaalt minimaal signaalniveau

Modelling thermische ruis

Hoe te modelleren?

- Momentane waarde **onbekend!**
- Gemiddelde waarde **nul!**

Maak gebruik van vermogen ($\overline{i_n^2}$) of effectieve waarde ($\sqrt{\overline{i_n^2}}$):

$$\overline{i_n^2} = \frac{4kTB}{R}$$

k : Constante van Boltzmann
($1.38 \cdot 10^{-23}$ J / K)
 T : Absolute temperatuur [K]
 B : Bandbreedte [Hz]
 R : Weerstand [Ω]

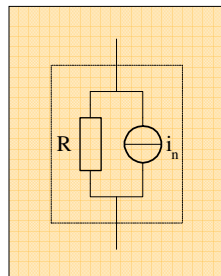
Vermogen wordt afgeleid van het vermogensdichtheidsspectrum (S).

A. van Staveren /
W.A. Serdijn

ET2045-d2 / 2^e college

7

Circuitmodel



Ruisvrije weerstand (R)
+
Stroombron (i_n)

Vermogen v.d. bron : $4kTB/R$

A. van Staveren /
W.A. Serdijn

ET2045-d2 / 2^e college

8

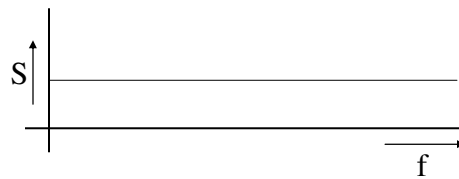
Vermogensdichtheidspectrum

= vermogen per hertz (Hz) bandbreedte

Vermogen : $4kTB/R$

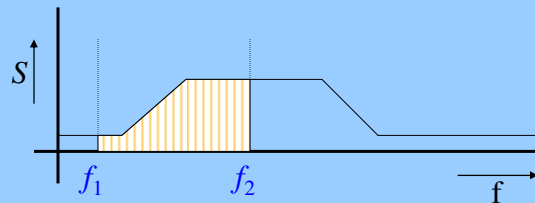
→ Vermogensdichtheidspectrum : $S_i(f) = 4kT/R$

Thermodynamica



Witte ruis:
vlak spectrum

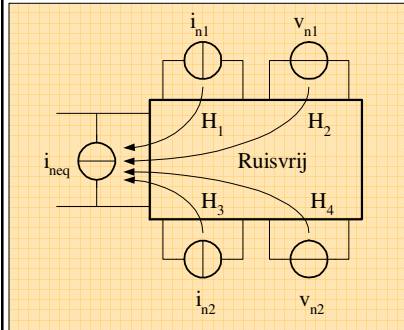
S versus P



$$P = \int_{f_1}^{f_2} S(f) df$$

Over welke band integreren ?

Equivalente ruisbron



Stap 1: bepaal **equivalente bron**

$$i_{neq} = i_{n1}H_1 + i_{n2}H_3 + v_{n1}H_2 + v_{n2}H_4$$

Stap 2: bepaal **equivalente vermogen**

$$S_{i_{neq}} = S_{i_{n1}}|H_1|^2 + S_{i_{n2}}|H_3|^2 + S_{v_{n1}}|H_2|^2 + S_{v_{n2}}|H_4|^2$$

(Bronnen ongecorreleerd)

Hoe H_1 t/m H_4 te bepalen?

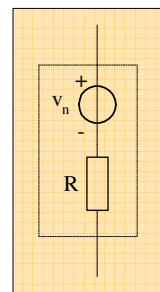
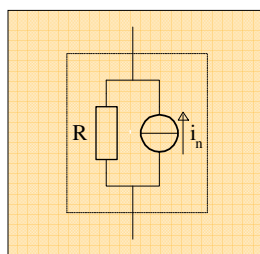
- Rechtstreeks
- Netwerktransformaties

Rechtstreeks

Bijvoorbeeld door middel van MNA methode

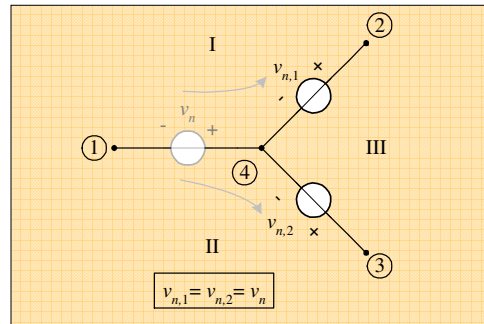
Netwerktransformaties

1. Norton - Thevenin

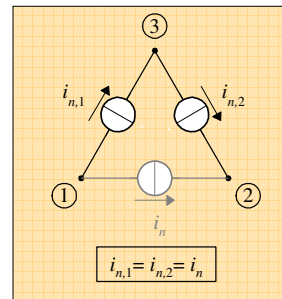


$$v_n = i_n R$$

2. E-shift



3. Blakesley

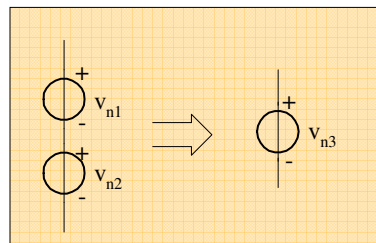


A. van Staveren /
W.A. Serdijn

ET2045-d2 / 2^e college

13

Correlatie I



Stochastische bronnen: gebruik vermogensbeschrijving

Ongecorreleerde bronnen: geen onderlinge relatie → vermogens

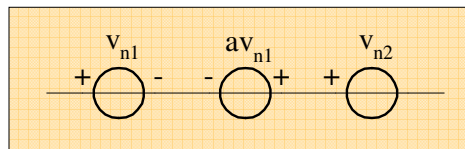
100% gecorreleerde bronnen: hebben expliciete relatie

A. van Staveren /
W.A. Serdijn

ET2045-d2 / 2^e college

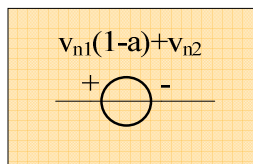
14

Voorbeeld



Bepaal equivalente bron en het equivalente vermogen.

1. Bepaling equivalent bron:



De spanningen worden gewoon opgeteld

2. Bepaling equivalent vermogen:

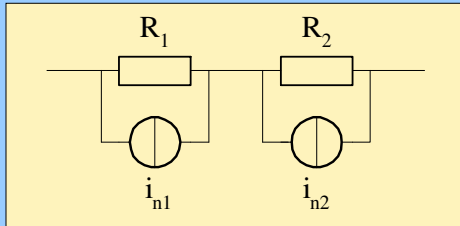
Twee ongecorreleerde termen: v_{n1} en v_{n2}

➔ Tel vermogens(dichtheidspectra) op

$$S_{v_{eq}} = S_{v_1} \cdot (1-a)^2 + S_{v_2}$$

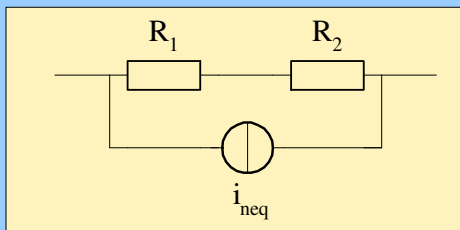
Oefening

Gegeven:



Bepaal:

i_{neq} en S_{neq}

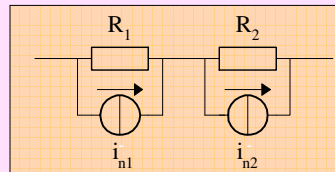


A. van Staveren /
W.A. Serdijn

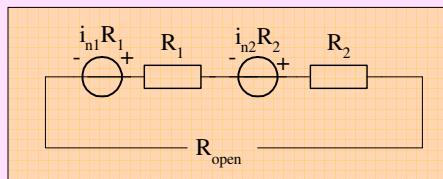
ET2045-d2 / 2^e college

17

1. Ken (willekeurige) richting aan bronnen toe.



2. Norton-Thevenin op afzonderlijke weerstanden
3. Norton-Thevenin op geheel: bepaal R_{open}



$$R_{open} = R_1 + R_2$$

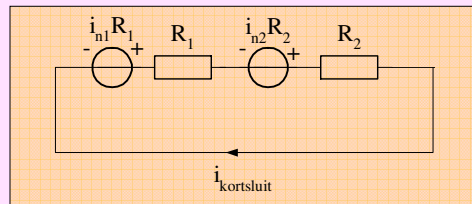
A. van Staveren /
W.A. Serdijn

ET2045-d2 / 2^e college

18

4. Bepaal $i_{kortsluit}$

$$i_{kortsluit} = i_{n1} \frac{R_1}{R_1 + R_2} + i_{n2} \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

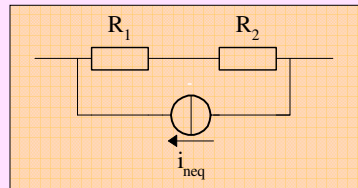


H_1

H_2

5. Equivalente bron

$$i_{neq} = i_{kortsluit}$$



6. Equivalent vermogendichtheidspectrum:

$$S_{neq} = S_{R1} H_1^2 + S_{R2} H_2^2$$

7. Invullen van S_{R1} en S_{R2} , H_1 en H_2 :

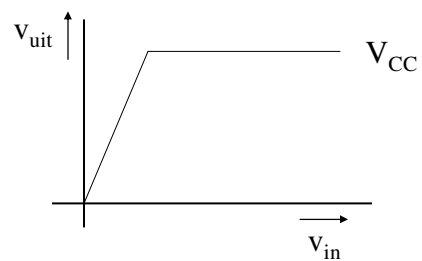
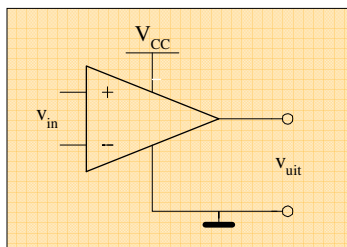
$$\begin{aligned} S_{neq} &= \frac{4kT}{R_1} \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} \right)^2 + \frac{4kT}{R_2} \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right)^2 \\ &= 4kT \frac{R_1 + R_2}{(R_1 + R_2)^2} = \frac{4kT}{R_1 + R_2} \end{aligned}$$

Maximaal signaal

Maximaal signaal : distorsieniveau bereikt specificatie

- Sterke distorsie (Clipping distorsie)
- Zwakke distorsie

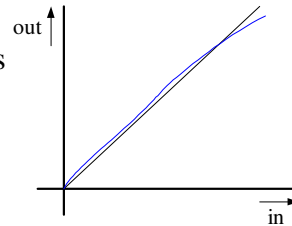
Clipping distorsie



Maximale **uitgangsspanning** opamp is V_{CC} (Verzadiging)
Duaal is er ook een maximale **uitgangsstroom**.

Zwakke distorsie

Werkelijke overdracht wijkt enigszins af van de **bedoelde** overdracht.



Bijv. : bedoeld een lineaire overdracht,
gerealiseerd een zwak niet-lineaire overdracht

Bovengrens signalen

Ingangssignaal niveau bij clipping distorsie kan als **bovengrens** gebruikt worden.

Waarom?

Dynamisch Bereik

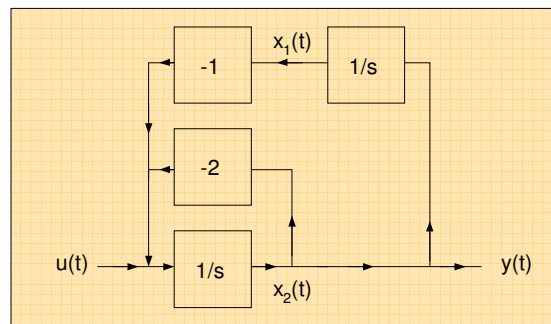
$$DR = \frac{\text{Bovengrens}}{\text{Ondergrens}}$$

State-space filter bestaat uit gekoppelde integratoren



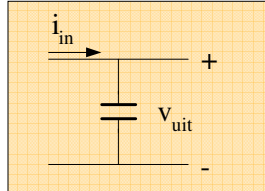
1. DR integrator
2. Relatie $DR_{\text{integrator}} - DR_{\text{filter}}$

DR van een integrator



Wat is dimensie van een integrator-overdracht?

Eenvoudige integrator



Wat is hier de dimensie?

Komt niet overeen met wat nodig is!

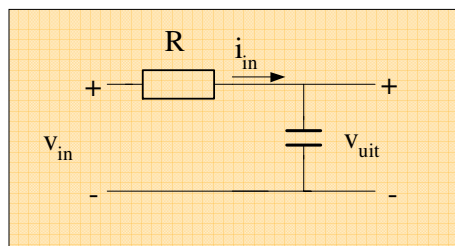
Oplossing?

A. van Staveren /
W.A. Serdijn

ET2045-d2 / 2^e college

27

U-U integrator



$$v_{uit} = \frac{1}{C} \int i_{in} dt = \frac{1}{RC} \int (v_{in} - v_{uit}) dt$$

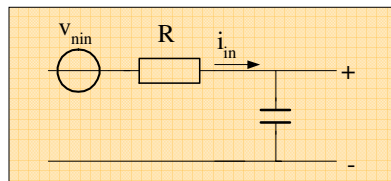
Over een paar weken een classificatie van mogelijkheden.

A. van Staveren /
W.A. Serdijn

ET2045-d2 / 2^e college

28

Ruis van de integrator



Ruisvermogen aan de uitgang van de integrator



Bepaling $v_{n,uit}$

v_n bevindt zich aan de ingang van de integrator.

$$\begin{array}{l} \Rightarrow V_{n,uit} = H(s)V_{n,in} \\ H(s) = \frac{1}{1+sRC} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \Rightarrow V_{n,uit} = H(s)V_{n,in} \\ H(s) = \frac{1}{1+sRC} \end{array}} \right\} V_{n,uit} = \frac{V_{n,in}}{1+sRC}$$

Wat valt er op aan $H(s)$?

Bepaling $S_{n,uit}$

$$\longrightarrow S_{n_{uit}} = |H(s)|^2 S_{n_{in}}$$

$$\longrightarrow S_{n_{uit}} = \frac{1}{1 + \omega^2 R^2 C^2} 4kTR$$

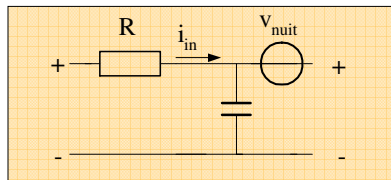
Bepaling $P_{n,uit}$

$$P_{n_{uit}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty S_{n_{uit}} d\omega = \frac{4kT}{2\pi C} [\arctan(\omega RC)]_0^\infty$$
$$= \frac{4kT}{2\pi C} \left[\frac{\pi}{2} - 0 \right]$$

$$P_{n_{uit}} = \frac{kT}{C}$$

Ruisvermogen hangt alleen van C af!

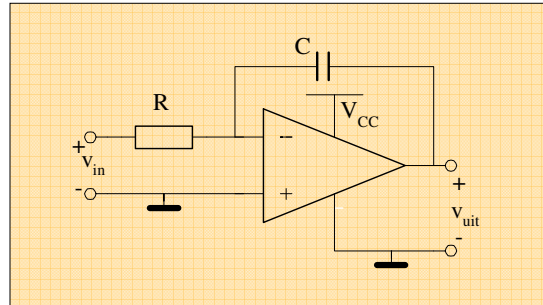
Dynamisch Bereik



$$P_{n_{uit}} = \frac{kT}{C}$$

$DR = ?$

DR van een actieve integrator

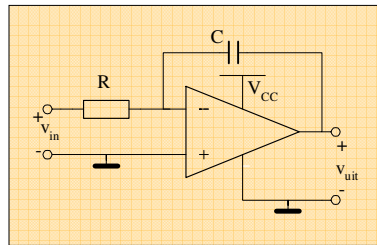


$$v_{uit} = -\frac{1}{RC} \int v_{in} dt$$

A. van Staveren /
W.A. Serdijn

ET2045-d2 / 2^e college

33



Bij deze integrator kunnen we het DR alleen aan de **ingang** bepalen.

- ➔ Voor lage frequenties wordt de versterking van de Integrator zeer groot (∞ voor $f=0$).
- ➔ Integrator in principe niet los te zien van het volledige filternetwerk.
- ➔ Veronderstelling doen voor de ruisbandbreedte

A. van Staveren /
W.A. Serdijn

ET2045-d2 / 2^e college

34

$$\left. \begin{aligned} S_{n_{in}} &= 4kTR \\ B &= \frac{1}{2\pi RC} \end{aligned} \right\} P_{n_{in}} = \frac{2kT}{\pi C}$$



Versterking van integrator = 1, (bandbreedte van filter)

Maximale peak-to-peak ingangssignaalzwaai is: $V_{in-max, peak-peak} = V_{CC}$

→ $P_{s_{max}} = \frac{V_{CC}^2}{8}$

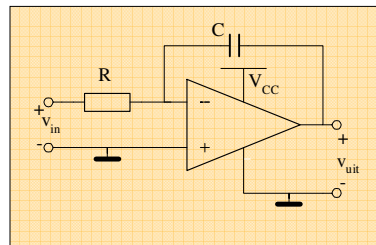
Dynamisch Bereik: $DR = \frac{P_{s_{max}}}{P_{n_{max}}} = \frac{\pi V_{CC}^2 C}{16kT}$

Voorbeeld

$$\begin{aligned} V_{CC} &= 5 \text{ V} \\ C &= 10 \text{ pF} \end{aligned}$$



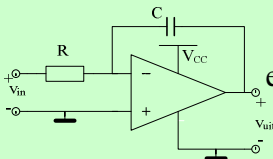
$$DR = \frac{P_{s_{max}}}{P_{n_{max}}} = \frac{\pi V_{CC}^2 C}{16kT} = 1.18 \cdot 10^{10}$$



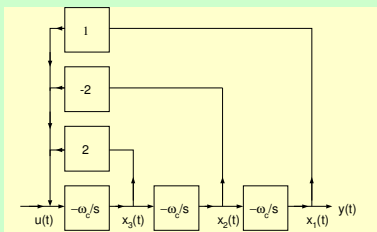
$$10 \log(DR) = 100.7 \text{ dB}$$

88.3 dB voor $V_{CC} = 1.2 \text{ V}$

Relatie $DR_{\text{integrator}}$ - DR_{filter}

Teken uitgaande van  een implementatie

van het derde-orde laagdoorlaat Butterworth filter ($B=1\text{Hz}$):

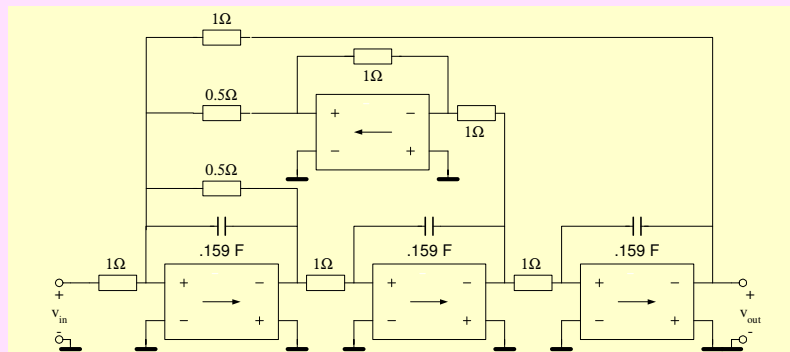


A. van Staveren /
W.A. Serdijn

ET2045-d2 / 2^e college

37

Implementatie 3e orde Butterworth

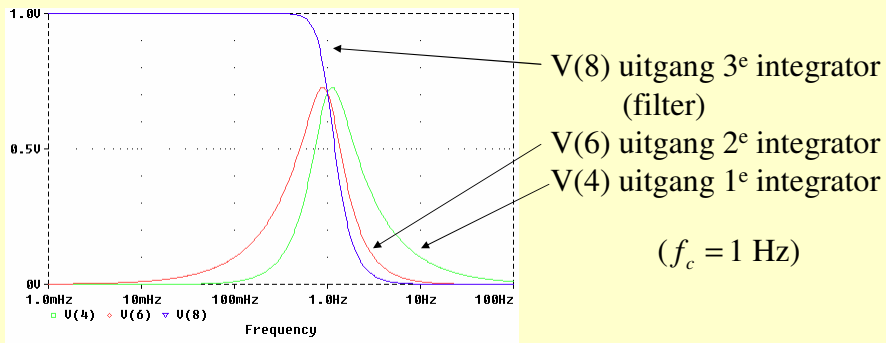


A. van Staveren /
W.A. Serdijn

ET2045-d2 / 2^e college

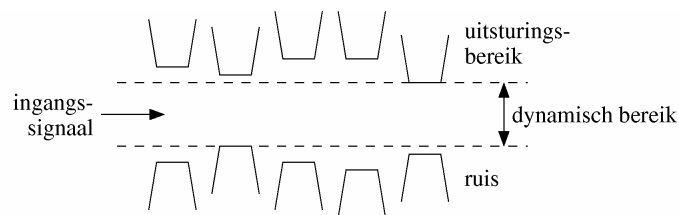
38

3^e-orde filter, ongeschaald



Is dit een optimaal ontwerp?

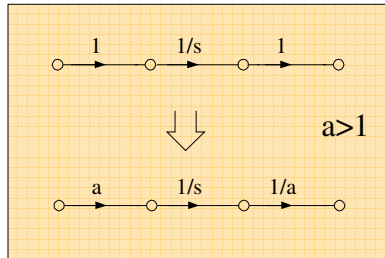
Optimalisatie Dynamisch Bereik



Niet alle integratoren worden optimaal benut

Schaling op maximale uitsturing

➔ Schaal filter z.d.d. alle integratoren dezelfde maximale uitsturing hebben.



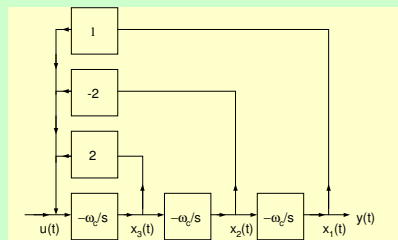
Waarom niet $a < 1$?

Wat is het effect op topologie?

➔ Voor sinusvormige signalen

Oefening

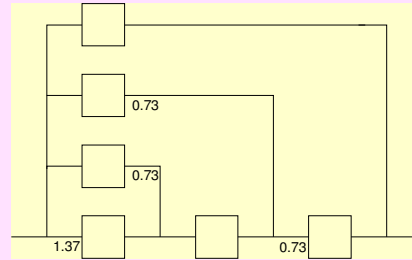
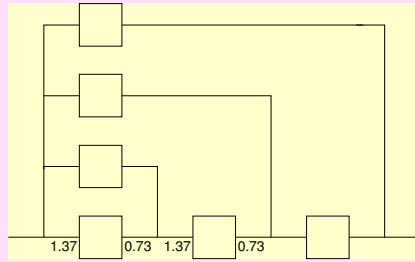
Pas schaling toe op dit filter



.....zodat alle integratoren dezelfde maximale uitsturing hebben.

$$V(4)_{\max} = V(6)_{\max} = 0.73V(8)_{\max}$$

Schaling I

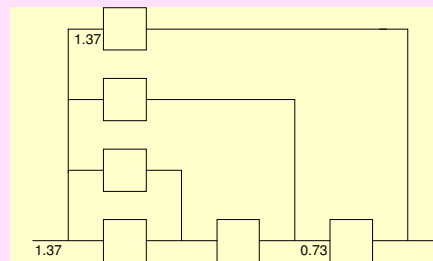
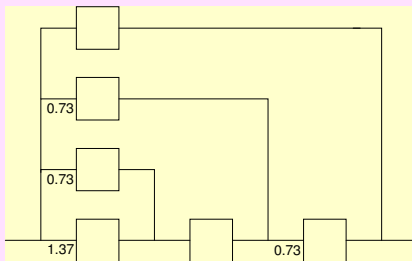


A. van Staveren /
W.A. Serdijn

ET2045-d2 / 2^e college

43

Schaling II



Waarom niet?

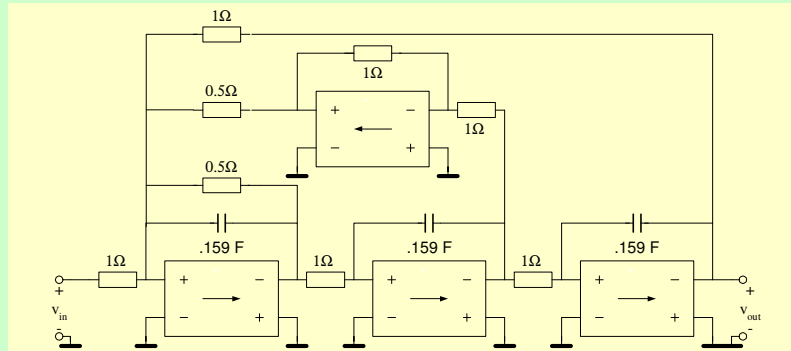
A. van Staveren /
W.A. Serdijn

ET2045-d2 / 2^e college

44

Schaling III

Pas schaling toe op onderstaande implementatie

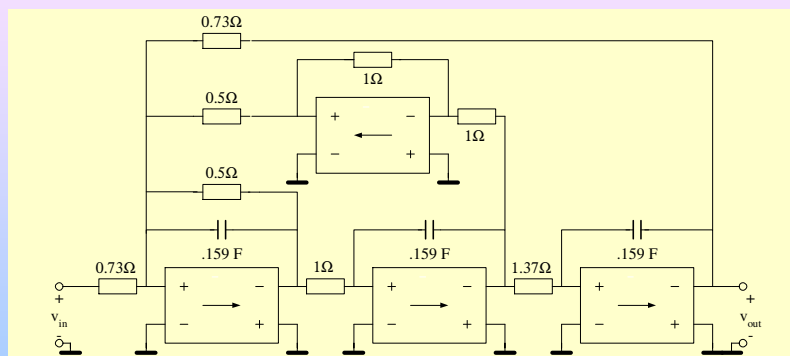


A. van Staveren /
W.A. Serdijn

ET2045-d2 / 2^e college

45

Geschaalde implementatie



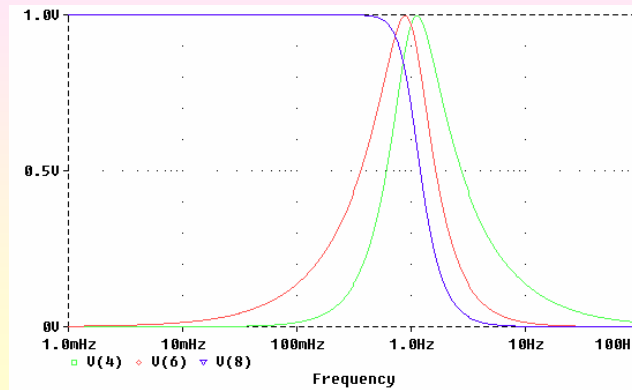
Waarom de capaciteiten niet wijzigen?

A. van Staveren /
W.A. Serdijn

ET2045-d2 / 2^e college

46

Geschaalde toestanden



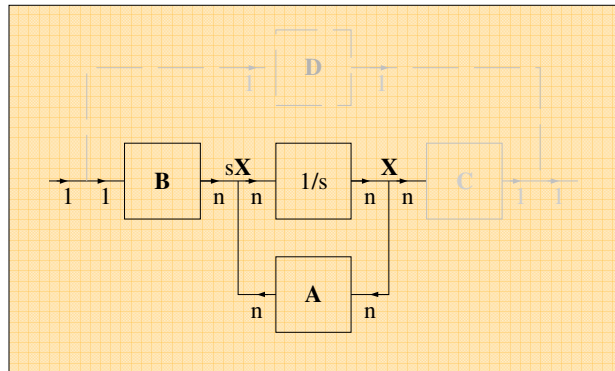
Vermogensschaling

Voor witte spectra:

maak **vermogen** a.d. uitgang v.d. integratoren gelijk.

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = (\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}$$

F geeft de overdrachten ingang-filter naar uitgang-integratoren



$$H(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

Vermogenoverdrachten: $\mathbf{K} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \mathbf{F}\mathbf{F}^* d\omega$

(\mathbf{K} : controllability Gramian matrix)

Diagonaal elementen geven **vermogenoverdrachten** van ingang filter naar de uitgang van de n integratoren.

$$(f_1 f_1^*, f_2 f_2^*, \dots, f_n f_n^*)$$

$(\omega_c = 2\pi)$

$$\frac{x_1}{u} = \frac{y}{u} = \frac{\omega_c^3}{s^3 + 2\omega_c s^2 + 2\omega_c^2 s + \omega_c^3} = f_1 \quad \Rightarrow \quad f_1 f_1^* = \frac{\omega_c^6}{\omega_c^6 + \omega^6}$$

$$\frac{x_2}{u} = \frac{x_1 s / \omega_c}{u} = \frac{s \omega_c^2}{s^3 + 2\omega_c s^2 + 2\omega_c^2 s + \omega_c^3} \quad (\text{vergl. Butterworth poly.})$$

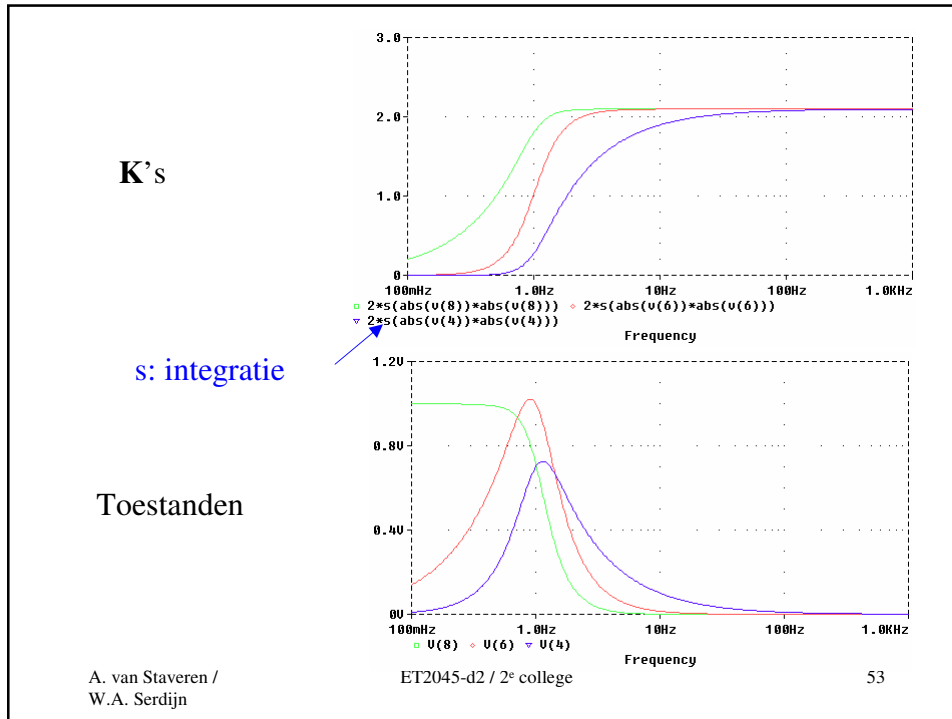
$$\frac{x_3}{u} = \frac{x_2 s / \omega_c}{u} = \frac{\omega_c s^2}{s^3 + 2\omega_c s^2 + 2\omega_c^2 s + \omega_c^3}$$

A. van Staveren / W.A. Serdijn ET2045-d2 / 2^e college 51

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty f_1 f_1^* d\omega = \frac{2\pi}{3} \quad \frac{1}{\pi} \int_0^\infty f_2 f_2^* d\omega = \frac{\pi}{3} \quad \frac{1}{\pi} \int_0^\infty f_3 f_3^* d\omega = \frac{2\pi}{3}$$

➔ Tweede integrator vereist **vermogensschaling** met factor 2

A. van Staveren / W.A. Serdijn ET2045-d2 / 2^e college 52



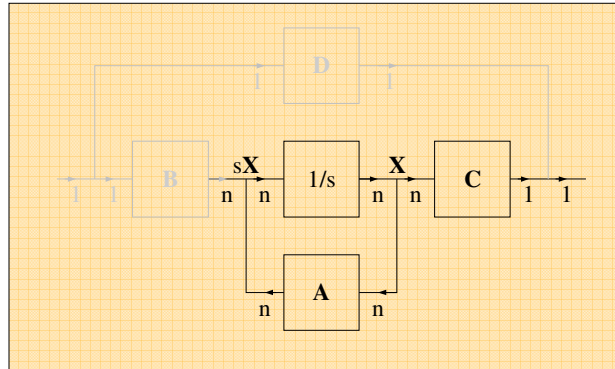
Schaling van ruisoverdrachten

Voor witte ruispectra:

maak ruisbijdragen integratoren a.d. uitgang v.h. filter gelijk.

$$\mathbf{G} = (g_1 \quad \dots \quad g_n) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$$

G geeft de overdrachten ingang-integratoren naar uitgang-filter



$$H(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

Vermogenoverdrachten:


$$\mathbf{W} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \mathbf{G}\mathbf{G}^* d\omega$$

(\mathbf{W} : observability Gramian matrix)

Diagonaal elementen geven overdrachten van (ruis)vermogen a.d. ingang van de integratoren naar de uitgang v.h.filter.

Minimaliseren ruis via \mathbf{W} en maximaliseren uitsturing via \mathbf{K} vereist wijziging topologie!

Fundamentele limiet

Optimale verdeling beschikbare capaciteit  ruis integratoren
Maximalisatie uitsturing integratoren
Minimalisatie ruisbijdrage integratoren

$$DR_{opt} = \frac{V_{max}^2 C}{4kT\xi Q} \cdot f(H(j\omega))$$

V_{max} : voedingsspanning
 C : totale capaciteit
 Q : kwaliteitsfactor filter
 $H(j\omega)$: filteroverdracht
 ξ : Ruisfactor