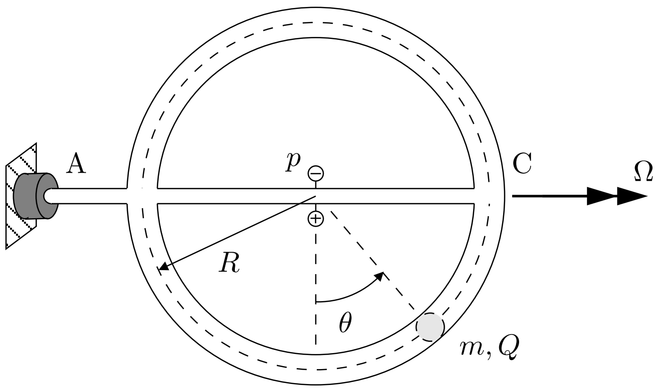
Delft University of Technology — Faculty of Aerospace Engineering

Dynamics and Stability AE3-914

April 13, 2006 9:00–12:00

There are 5 problems Dutch translation attached

Problem 1 (weight 2.5)



The shaft AC is connected to a smooth, massless tube of radius R. An electric dipole with electric moment p (> 0) is attached to the shaft at the centre of the tube. The whole system rotates with constant angular rate Ω as shown. The motion of a particle with mass m and electric charge Q within the tube is described by the generalised coordinate θ. The potential energy of the particle is expressed in terms of θ by the expression

$$V = \frac{pQ\cos\theta}{4\pi\varepsilon_a R^2}$$

where ε_a (> 0) is the averaged absolute dielectric permittivity of the environment. Gravity and magnetic effects due to the motion of electric charges are neglected.

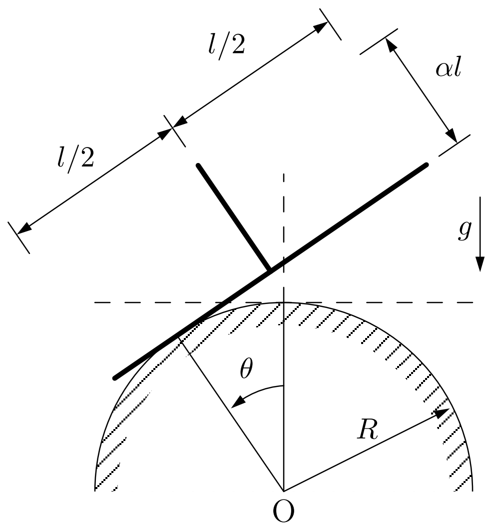
a. Set up the Lagrangian.

b. Find the equation of motion for coordinate θ.

c. Calculate the condition in Ω so that $\theta = 0$ be a stable equilibrium point, *making use of the linearisation method.* Comment on the solution with regard to the sign of the charge Q.

Problem 2 (weight 2)

The represented assembly of rods *rolls without slipping* on the cylindrical surface with radius R. The rods have uniform cross section A, uniform density ρ and length l and αl respectively, where α is a coefficient. The configuration of the system is described by the generalised coordinate θ and the acceleration of gravity is g.



a. Set up the potential energy of the system in terms of R, l, α, A, ρ, g and θ. Choose the zero level at the horizontal line through the centre O.

Consider now the particular case with $R = 1\,\text{m}$, $A = 4\times10^{-4}\,\text{m}^2$, $\rho = 2500\,\text{kg/m}^3$, $l = 2\,\text{m}$ and $g = 10\,\text{m/s}^2$. This leads to the expression

$$V(\theta) = 20\left[(1+\alpha+\alpha^2)\cos\theta + (1+\alpha)\theta\sin\theta\right]$$

for the potential energy of the system (expressed in joule).

b. Calculate the admissible values of the coefficient α for which the position $\theta = 0$ (indicated by the dashed lines) furnishes a stable equilibrium configuration. Comment on the validity of the algebraic solutions.

Problem 3 (weight 1)

The motion of a particle with mass m is described by two generalised coordinates r and s. The kinetic energy is of the form

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \dot{s}^2) + \beta(r)\dot{s} + \gamma(r)$$

where $\beta(r)$ and $\gamma(r)$ are given differentiable functions of coordinate r. The potential energy depends on r only, i.e.,

$$V = V(r).$$

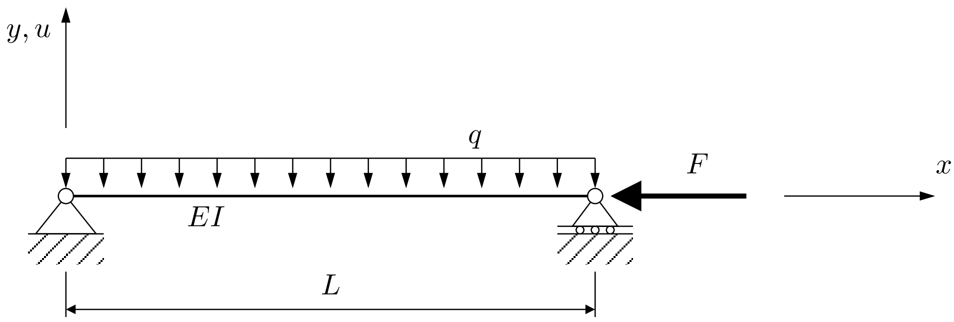
No other forces are applied.

a. Find two integrals of motion of this system.

b. Set up the Routhian.

c. Find an effective potential based on the Routhian.

Problem 4 (weight 2.5)



The energy functional of the represented beam loaded by a transverse homogeneous distributed force q and a normal, compressive force F is given by

$$V(u) = \int_0^L \left(\frac{1}{2} EI \left[u''(x)\right]^2 - \frac{1}{2} F \left[u'(x)\right]^2 + q\, u(x) \right) dx,$$

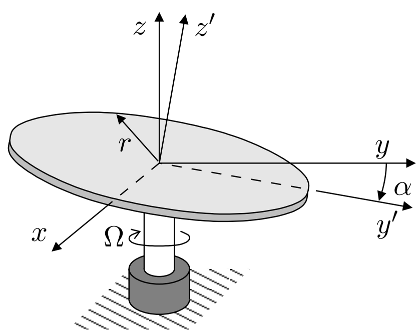
where $u(x)$ is the deflection. Axial deformations are neglected.

a. Identify the essential boundary conditions for $u(x)$ at $x = 0$ and $x = L$.

b. Make use of Ritz's method to find an approximate solution of the deflection $u(x)$ with the shape functions

$$h_1(x) = 1 \qquad h_2(x) = x \qquad h_3(x) = x^2$$

Problem 5 (weight 2)



The represented circular disc of mass m and radius r is mounted on the shaft with a little misalignment given by angle α between its plane and the plane perpendicular to the shaft. The disc rotates with constant rate Ω about the shaft in the indicated sense.

Calculate the magnitude and sign of the components of the moment acting *on* the shaft due to the rotation of the disc.

Hint: The moments of inertia of a disk with respect to the mass centre are $\frac{1}{4}mr^2$ about an axis contained in the disk plane and $\frac{1}{2}mr^2$ about an axis perpendicular to the disk plane.

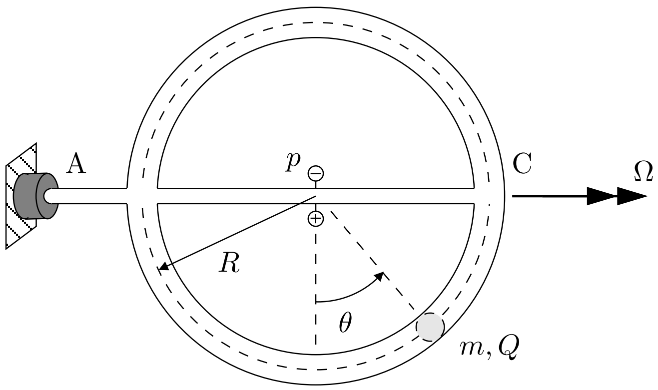
Technische Universiteit Delft   Faculteit Luchtvaart- en Ruimtevaarttechniek

Dynamics and Stability AE3-914

13 april 2006   9:00–12:00

Er zijn 5 opgaven

Opgave 1 (gewicht 2,5)



De as AC is verbonden met een glade massaloze buis met straal R. Een elektrische dipool met elektrisch moment p (> 0) is vebonden met de as in het middelpunt van de buis. Het hele system draait met een constante hoeksnelheid Ω, zoals aangegeven. De beweging van een puntmassa, met massa m en elektrische lading Q, in de buis wordt beschreven met de gegeneraliseerde coördinaat θ. De potentiele energie van de puntmassa, afhankelijk van θ, is gegeven door

$$V = \frac{pQ\cos\theta}{4\pi\varepsilon_a R^2}$$

waar ε_a (> 0) de gemiddelde absolute diëlektrische constante is van de omgeving. Zwaartekracht en magnetische effecten door de beweging van de elektrische lading worden verwaarloosd.

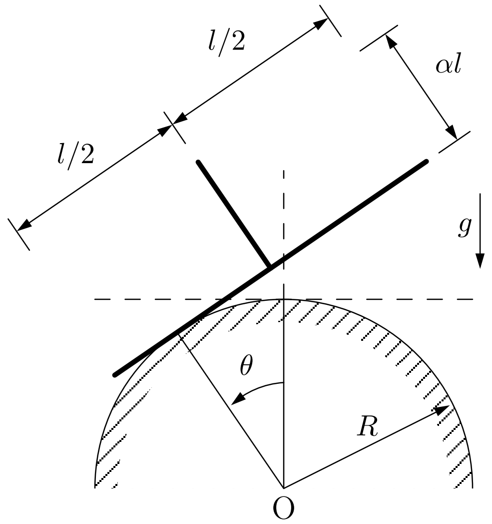
where ε_a (> 0) is the averaged absolute dielectric permittivity of the environment. Gravity and magnetic effects due to the motion of electric charges are neglected.

a. Construeer de Lagrangiaan.

b. Vind de bewegingsvergelijking voor de coördinaat θ.

c. Bereken de voorwaarde voor Ω zodat $\theta = 0$ een stabiel evenwichtspunt is, *met behulp van de linearisatie methode.* Geef commentaar op de oplossing met betrekking tot het teken van de lading Q.

Opgave 2 (gewicht 2)



De weergegeven constructie van staven rolt zonder te slippen op het cylindrische opervlak mer straal R. De staven hebben een uniforme doorsnede A, uniforme dichtheid ρ en lengte l en αl respectivelijk, waarbij α een coëfficient is. De configuratie van het system word beschreven met de gegeneraliseerde coördinaat θ en de zwaartekrachtsversnelling is g.

a. Construeer de potentiele energie van het system, uitgedrukt in R, l, α, A, ρ, g and θ. Kies als nul-niveau de horizontale lijn door het middelpunt O.

Beschouw het specifieke geval met $R = 1\,\text{m}$, $A = 4 \times 10^{-4}\,\text{m}^2$, $\rho = 2\,500\,\text{kg/m}^3$, $l = 2\,\text{m}$ and $g = 10\,\text{m/s}^2$. Dit geeft de volgende vergelijking

$$V(\theta) = 20\left[(1 + \alpha + \alpha^2)\cos\theta + (1 + \alpha)\theta\sin\theta\right]$$

voor de potentiële energie (in joule).

b. Bereken de toelaatbare waarden voor de coëfficient α waarvoor de positie $\theta = 0$ (aangegeven met de streepjes lijn) een stabiel evenwichtstoestand is. Geef commentaar op de geldigheid van de algebraische oplossingen.

Opgave 3 (gewicht 1)

De beweging van een puntmassa met massa m wordt beschreven met twee gegeneraliseerde coördinaten r en s. De kinetische energie heeft de vorm

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \dot{s}^2) + \beta(r)\dot{s} + \gamma(r)$$

waar $\beta(r)$ en $\gamma(r)$ gegeven differentieerbare functies in r zijn. De potentiële energie is alleen afhankelijk van r, namelijk,

$$V = V(r).$$

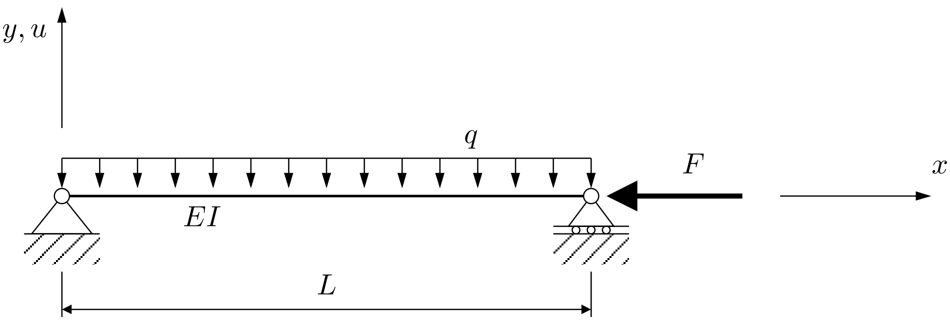
Er zijn geen andere krachten op de puntmassa.

a. Vind twee constantes van de beweging (integrals of motion) van dit systeem.

b. Construeer de Routhiaan.

c. Geef een effectieve potentiaal gebaseerd op de Routhiaan.

Opgave 4 (gewicht 2,5)



De energiefunctionaal van de weergegeven balk, belast door een verdeelde homogene kracht q en een drukkracht F , is gegeven door

$$V(u) = \int_0^L \left(\frac{1}{2} EI \left[u''(x) \right]^2 - \frac{1}{2} F \left[u'(x) \right]^2 + q\, u(x) \right) dx,$$

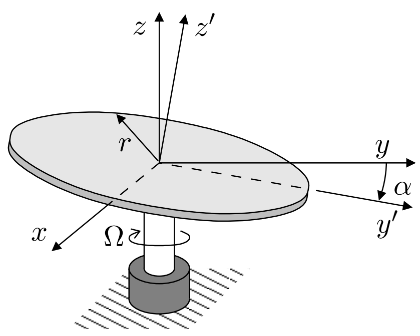
waar $u(x)$ de verticale verplaatsing is. Axiale vervormingen worden verwaarloosd.

a. Identificeer de essentiele randvoorwaarden voor $u(x)$ op $x = 0$ en $x = L$.

b. Maak gebruik van de Ritz methode om een benaderende oplossing te vinden voor de verplaatsing $u(x)$. Gebruik de volgende vormfuncties:

$$h_1(x) = 1 \qquad h_2(x) = x \qquad h_3(x) = x^2$$

Opgave 5 (gewicht 2)



De weergegeven circelvormige schijf, met massa m en straal r, is gemonteerd op de as met een kleine uilijningsfout. Het verschil tussen het vlak van de schijf en het vlak loodrecht op de as is geven door α. De schijf roteert met constante hoeksnelheid Ω rond de as zoals aangegeven.

Bereken de grootte en het teken van de componenten van het moment *op* de as door de rotatie van de schijf.

Hint: De traagheidsmomenten van een schijf ten opzichte van het massamiddelpunt zijn $\frac{1}{4}mr^2$ om een as in het vlak van de schijf en $\frac{1}{2}mr^2$ om de as loodracht op het vlak van de schijf.