Delft University of Technology **Faculty of Aerospace Engineering**

Dynamics and Stability AE3-914

August 21, 2006 9:00–12:00

There are 5 problems Dutch translation attached

Problem 1 (weight 1.5)

Consider the variational problem corresponding to the functional I defined as

$$I(y) = \int_a^b F(y, y')\, dx$$

with the essential boundary conditions $y(a) = y_a$ and $y(b) = y_b$.

a. Derive the Euler-Lagrange equation for this variational problem. Indicate whether there are any natural boundary conditions.

b. As the integrand F does not depend on x explicitly, i.e., $F = F(y, y')$, show that the extremals of I are also a solution of the first-order differential equation

$$F - \frac{\partial F}{\partial y'}\, y' = C,$$

where C is a constant.

Problem 2 (weight 2.5)

The motion of a particle with mass m in a horizontal plane is described by the polar coordinates (r, θ). The particle is submitted to a potential $V = kr^\alpha$ with $k, \alpha \in \mathbb{R}$.

a. Construct the Lagrangian in terms of the generalised coordinates (r, θ).

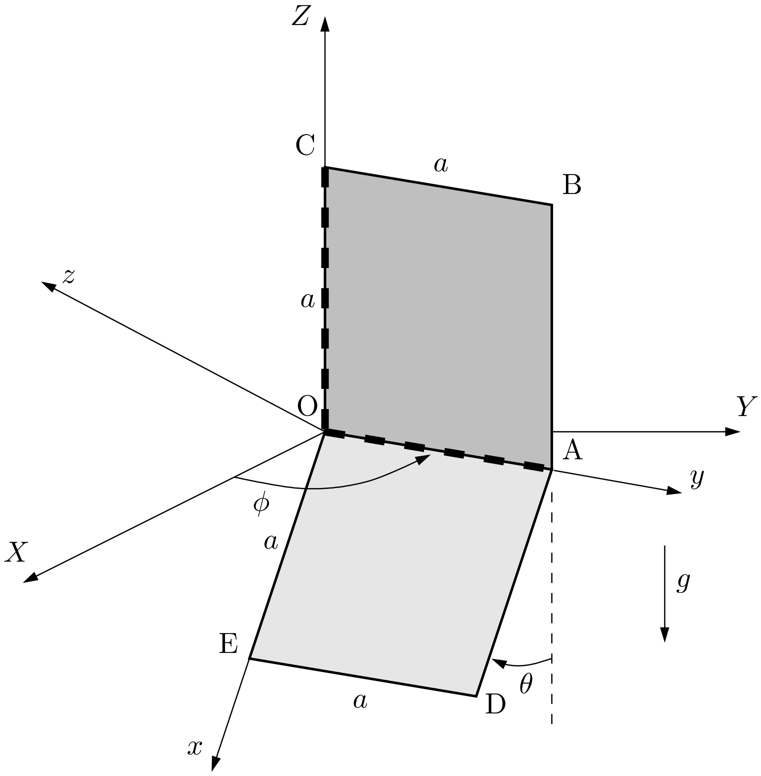
b. Identify any ignorable coordinate and find the corresponding integral of motion.

c. Find the equation of motion for the explicit coordinate and the conditions for steady motion. Comment in particular on the required sign of k, depending on the sign of α, for the steady motion to be possible.

d. Calculate the range of values of α for which the steady motion is stable.

Problem 3 (weight 3)

The thin square homogeneous plates OABC and OADE are mutually hinged along edge OA. Plate OABC is hinged to the Z-axis of the fixed XYZ-reference frame along edge OC. The xyz-reference frame is attached to plate OADE. The motion of the system is described by the generalised coordinates ϕ and θ as shown. Both plates have mass m and sides a. The acceleration of gravity is g.



a. Calculate the inertia tensor for plate OADE, with respect to the xyz-reference frame.

b. Set up the Lagrangian. Choose the XY-plane as zero level for the potential energy.

Consider the particular case with $m = 1\,\mathrm{kg}$, $a = 6\,\mathrm{m}$ and $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$. This leads to the expression

$$L = 6\left[\dot{\phi}^2(2+\sin^2\theta)+\dot{\theta}^2\right] + 3(10-3\dot{\phi}\dot{\theta})\cos\theta$$

for the Lagrangian of the system (expressed in joule).

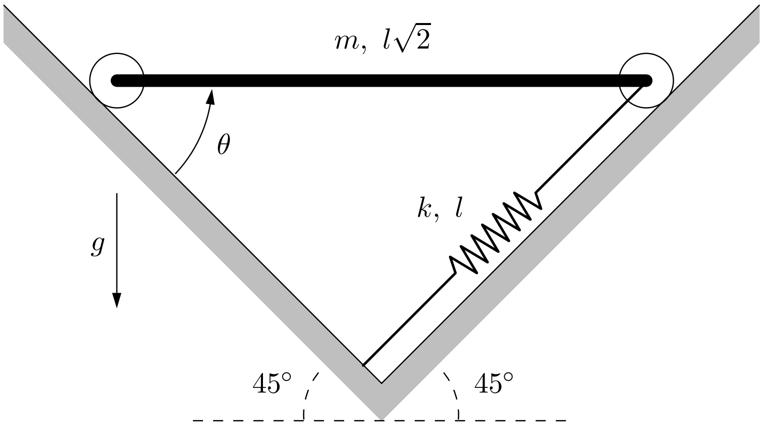
c. Find the equations of motion of the system.

d. Write two different integrals of motion of the system.

Hints:

- The moment of inertia of a bar of length l is $\frac{1}{3}ml^2$ about an endpoint.
- Steiner's theorem for products of inertia reads $I_{\xi\eta} = \bar{I}_{\xi\eta} + m\,\xi_G\eta_G$, where $\bar{I}_{\xi\eta}$ denotes the product of inertia with respect to the generic parallel ξ- and η-axes through the mass centre and ξ_G and η_G are the coordinates of the mass centre.
- Plates are *flat, thin* bodies.

Problem 4 (weight 2)



The endpoints of the represented homogeneous bar with mass m and length $l\sqrt{2}$ can freely slide in the guide. The position of the bar is characterised by the generalised coordinate θ. In order to keep the bar horizontal ($\theta = 45°$) a linear spring with constant k and natural length l is used. The acceleration of gravity is g and the dimension and mass of the rollers can be neglected.

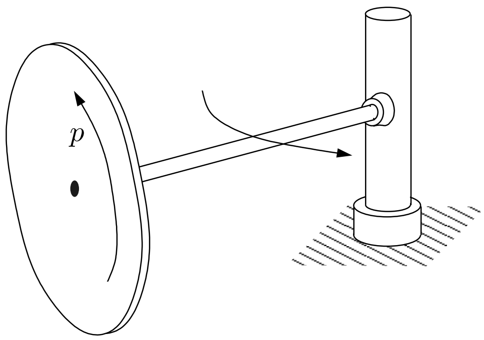
a. Show that the horizontal position ($\theta = 45°$) is indeed an equilibrium configuration.

b. Calculate the required elastic constant k in the spring for the horizontal position to be stable.

Problem 5 (weight 1)

The represented homogeneous disc is rotating freely on the horizontal shaft with high angular speed p as shown. The shaft is caused to rotate about the vertical axis in the sense indicated. Gravity is neglected.

Make use of free-body and kinetic diagrams, *without calculations,* to predict the sign of the bending moment in the shaft ($\smile$ is positive, $\frown$ is negative). *Answers without explanation will not be graded!*



Technische Universiteit Delft **Faculteit Luchtvaart- en Ruimtevaarttechniek**

Dynamics and Stability AE3-914

21 augustus 2006 9:00–12:00

Er zijn 5 opgaven

Opgave 1 (gewicht 1,5)

Beschouw het variationele probleem behorende bij de functionaal I gedefineerd als

$$I(y) = \int_a^b F(y, y')\, dx$$

met de essentiële randvoorwaarden $y(a) = y_a$ en $y(b) = y_b$.

a. Leid de Euler-Lagrange vergelijking af voor dit variationele probleem. Geef aan of er natuurlijke randvoorwaarden zijn.

b. Aangezien de integrand F niet expliciet afhangt van x, d.w.z., $F = F(y, y')$, bewijs dat de extremalen van I ook een oplossing zijn van de eerste-orde differentiaalvergelijking

$$F - \frac{\partial F}{\partial y'}\, y' = C,$$

waar C een constante is.

Opgave 2 (gewicht 2,5)

De beweging van een deeltje met massa m in een horizantaal vlak is beschreven met behulp van de poolcoördinaten (r, θ). Het deeltje is onderworpen aan een potentiaal $V = kr^\alpha$ met $k, \alpha \in \mathbb{R}$.

a. Bepaal de Lagrangiaan in termen van de gegeneraliseerde coördinaten (r, θ).

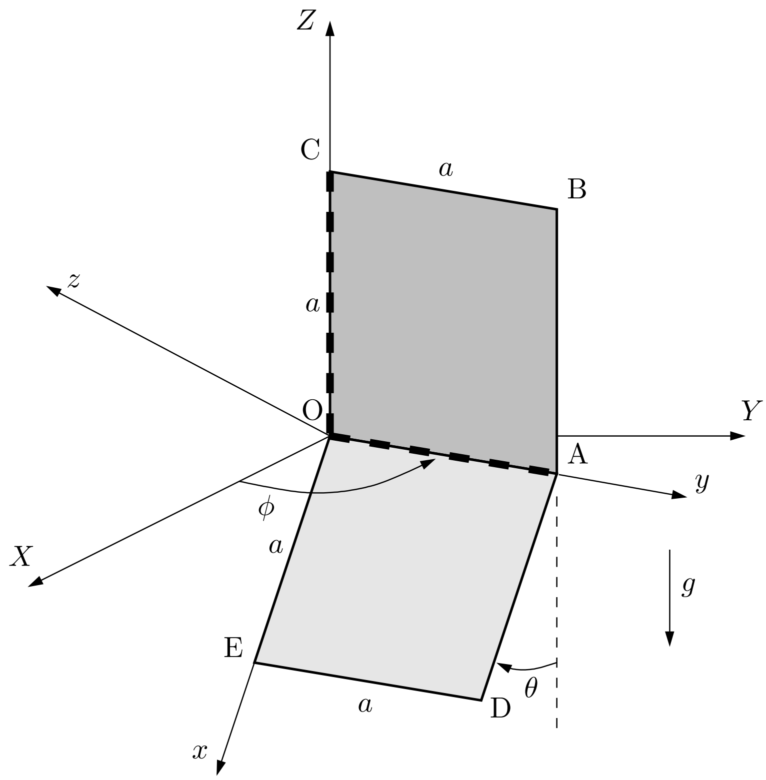
b. Onderscheid de mogelijke cyclische coördinaat (ignorable coordinate) en vind de bijbehorende constante van de beweging (integral of motion).

c. Vind de bewegingsvergelijking voor de niet-cyclische coördinaat en bepaal de voorwaarden voor de stationaire beweging (steady motion). Bespreek in het bijzonder het benodigde teken van k, afhankelijk van het teken van α, zodat de stationaire beweging mogelijk is.

d. Bereken de marge van waarden van α waarvoor de stationaire beweging stabiel is.

Opgave 3 (gewicht 3)

De dunne vierkante homogene platen OABC en OADE zijn scharnierend met elkaar verbonden langs de rand OA. De plaat OABC is scharnierend verbonden met de Z-as van het vaste XYZ-assenstelsel langs de rand OC. Het xyz-assenstelsel is verbonden met de plaat OADE. De beweging van het systeem wordt beschreven door de gegeneraliseerde coördinaten ϕ en θ zoals getoond. Beide platen hebben massa m en zijdes a. De zwaartekrachtversnelling is g.



a. Bereken de traagheidstensor voor de plaat OADE ten opzichte van het xyz-assenstelsel.

b. Bepaal de Lagrangiaan. Maak daarbij gebruik van het XY-vlak als nul-niveau voor de potentiële energie.

Beschouw nu het geval met $m = 1\,\mathrm{kg}$, $a = 6\,\mathrm{m}$ en $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$. Dit leidt tot de uitdrukking

$$L = 6\left[\dot{\phi}^2(2 + \sin^2\theta) + \dot{\theta}^2\right] + 3(10 - 3\dot{\phi}\dot{\theta})\cos\theta$$

voor de Lagrangiaan (in joule).

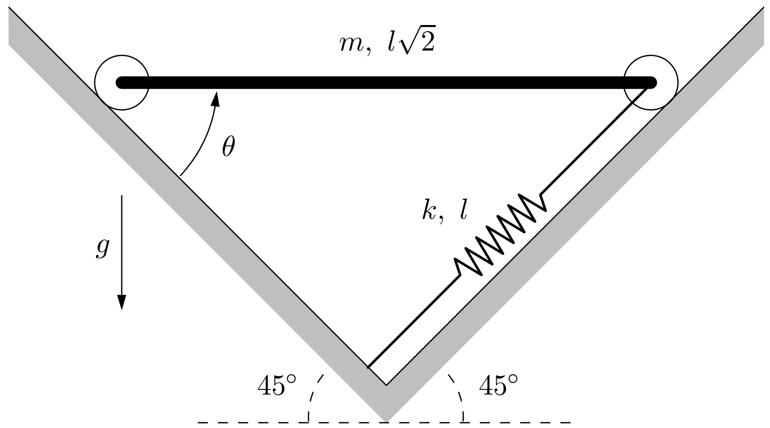
c. Vind de bewegingsvergelijkingen van het systeem.

d. Vind twee verschillende constanten van de beweging (integrals of motion) van het systeem.

Hints:

- Het traagheidsmoment om het eindpunt van een staaf met lengte l is $\frac{1}{3}ml^2$.
- De Steinerstelling voor traagheidsproducten is $I_{\xi\eta} = \bar{I}_{\xi\eta} + m\,\xi_G\eta_G$, waarbij $\bar{I}_{\xi\eta}$ staat voor het traagheidsproduct ten opzichte van generieke parallelle ξ- en η-assen door het massamiddelpunt en ξ_G en η_G zijn de coördinaten van het massamiddelpunt.
- Platen zijn *vlakke, dunne* lichamen

Opgave 4 (gewicht 2)



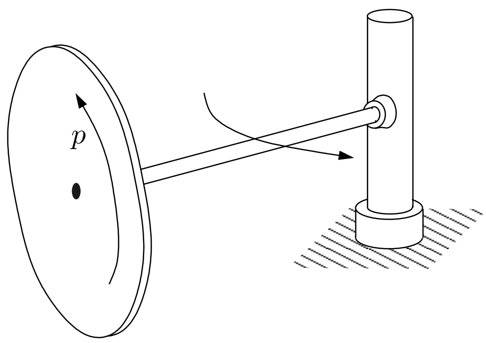
De eindpunten van de afgebeelde homogene staaf met massa m en lengte $l\sqrt{2}$ kunnen vrij schuiven op de aangegeven baan. De plaats van de staaf wordt bepaald door de gegeneraliseerde coördinaat θ. Teneinde de staaf horizontaal te houden ($\theta = 45°$) wordt er een lineaire veer gebruikt met constante k en natuurlijke lengte l. De versnelling van de zwaartekracht is g en de afmetingen en massa's van de rollers kunnen worden verwaarloosd.

a. Toon aan dat de horizontale stand ($\theta = 45°$) inderdaad een evenwichtsconfiguratie is.

b. Bereken de benodigde elastische constante k van de veer zodat het evenwicht stabiel is.

Opgave 5 (gewicht 1)

De afgebeelde homogene schijf draait met hoge hoeksnelheid p om de horizontale as zoals getoond in de figuur. De as wordt gedraaid om de kolom in de aangegeven richting. De zwaartekracht wordt buiten beschouwing gelaten.



Maak gebruik van vrijgemaakt lichaamdiagrammen en kinetische diagrammen (free-body and kinetic diagrams), *zonder berekeningen,* om het teken van het buigend moment in de as te voorspellen ($\smile$ is positief, $\frown$ is negatief). *Antwoorden zonder motivatie worden niet gehonoreerd!*