

## Dynamics and Stability AE3-914

August 20, 2007

14:00–17:00

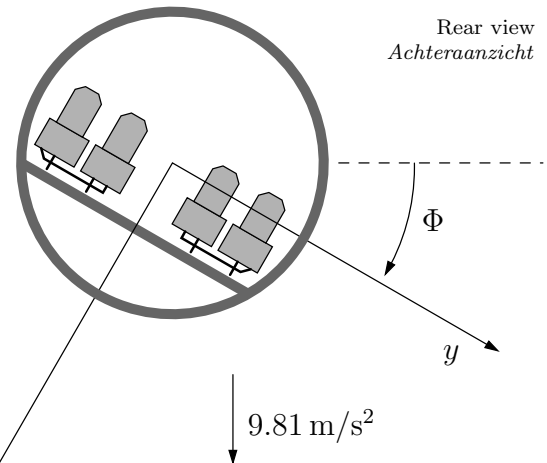
There are 5 problems

Dutch translation attached

**Problem 1** (weight 2)

A single-aisle aircraft is performing a coordinated turn to the right with standard turn rate  $3^\circ s^{-1}$  at a constant speed of 900 km/h. The represented, right-handed reference frame is attached to the aircraft. The acceleration of gravity is  $9.81 \text{ m/s}^2$  (*Hint: Watch the units!*).

- Calculate the radius of the turn.
- Express the acceleration vector of the reference frame in terms of the angle of bank  $\Phi$ .
- Calculate the angle of bank  $\Phi$  for which a person standing in the aisle and aligned with the  $z$ -axis will not experience any transversal force (i.e., no force in the  $y$ -direction).
- Calculate the additional acceleration experienced by this person while walking aft at a constant speed of 4 km/h.

**Problem 2** (weight 1.5)

Derive the general expression of the kinetic energy for a rigid body  $\mathcal{V}$

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{I}_G \boldsymbol{\omega},$$

where  $m$  is the mass,  $v_G$  is the speed of the mass centre,  $\mathbf{I}_G$  is the inertia tensor with respect to the mass center and  $\boldsymbol{\omega}$  is the angular velocity vector, departing from the generic expression of the kinetic energy

$$T = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \, dm,$$

where  $\mathbf{v}$  is the velocity of an arbitrary point of the body.

**Problem 3** (weight 2.5)

Apply Ritz's method to find an approximate solution of the variational problem

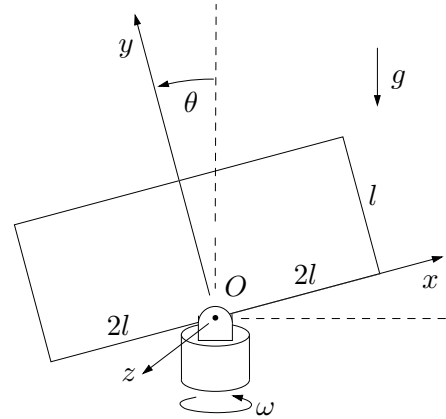
$$I[y] = \int_0^1 [y + y' + yy' + (y')^2] \, dx,$$

with the essential boundary condition  $y(0) = 0$ , making use of the shape functions

$$h_1(x) = 1; \quad h_2(x) = x; \quad h_3(x) = x^2.$$

**Problem 4** (weight 2.5)

The represented homogeneous plate with mass  $m$  is contained within the  $xy$ -plane and is free to rotate at pivot  $O$  about the  $z$ -axis, which motion is described by the generalised coordinate  $\theta$ . The pivot is attached to a platform, which rotates at constant angular velocity  $\omega$ . Dimensions can be read from the figure and the acceleration of gravity is  $g$ .



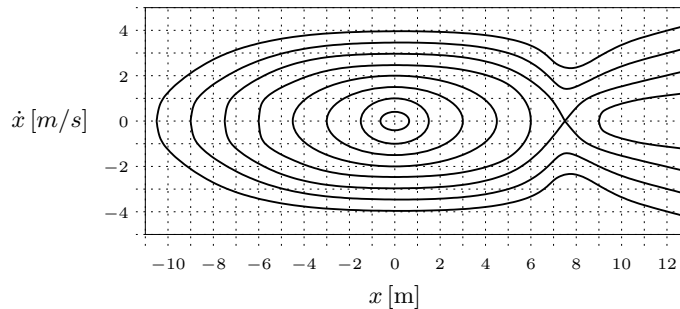
- Give the inertia tensor of the plate with respect to point  $O$  about the represented  $xyz$ -axes, in terms of  $m$  and  $l$ .
- Show that the kinetic energy of the system amounts to

$$T = ml^2 \left[ \frac{5}{6} \dot{\theta}^2 + \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cos^2 \theta \right) \omega^2 \right].$$

Specify all the steps of your calculation.

- Determine the Lagrangian, the Jacobi energy integral and the effective potential.
- Find the requirements on the angular velocity  $\omega$  for the equilibrium position  $\theta = 0$  to be stable, making use of any method of your choice.

**Problem 5** (weight 1.5)



The figure represents part of the phase portrait of a dynamical system described by the generalised coordinate  $x$ . Provide a justified answer to the following questions.

- Indicate the values of  $x$  for which an equilibrium point is found. Indicate also whether the point is stable or unstable.
- Indicate two different sets of initial conditions in  $x$  and  $\dot{x}$  for which  $x$  will reach the value 6 m with zero velocity.
- Given the initial condition  $x = 12$  m, indicate a value of the initial condition in  $\dot{x}$  to ensure that  $x$  will attain a negative value.

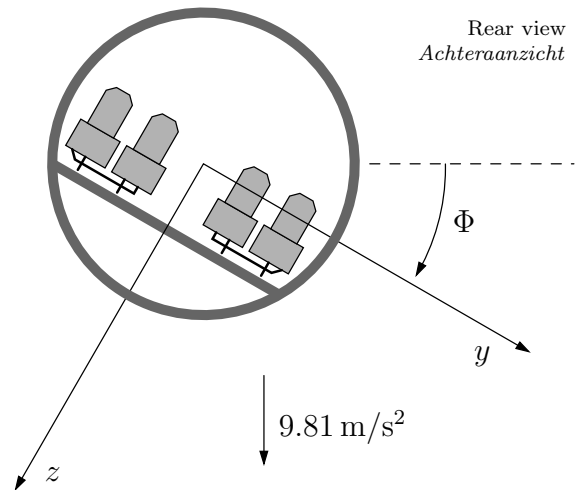
Dynamics and Stability AE3-914

20 augustus 2007 14:00–17:00

Er zijn 5 opgaven

**Opgave 1** (gewicht 2)

Een enkel-gangs vliegtuig maakt een gecoördineerde bocht naar rechts met hoeksnelheid  $3^\circ\text{s}^{-1}$  bij een constante snelheid van 900 km/h. Het afgebeelde, rechtshandig assenstelsel zit vast aan het vliegtuig. De versnelling van de zwaartekracht is  $9.81\text{ m/s}^2$  (*Hint*: Let op de eenheden!).



- Bereken de straal van de bocht.
- Druk de versnellingsvector van het assenstelsel uit in de hellingshoek  $\Phi$
- Bereken de hellingshoek  $\Phi$  waarvoor een persoon, rechtop staande in de gang, geen kracht in dwarsrichting zal ervaren (d.w.z. geen kracht in de  $y$ -richting).
- Bereken de extra versnelling die deze persoon zal ervaren door naar achter te lopen met een constante snelheid van 4 km/h.

**Opgave 2** (gewicht 1.5)

Leid de algemene uitdrukking af voor de kinetische energie van een star lichaam  $\mathcal{V}$

$$T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{I}_G \boldsymbol{\omega},$$

waarbij  $m$  de massa van het lichaam is,  $v_G$  de snelheid van het zwaartepunt,  $\mathbf{I}_G$  de massatraagheidstensor ten opzichte van het zwaartepunt en de vector  $\boldsymbol{\omega}$  de hoeksnelheid. Neem als uitgangspunt de algemene uitdrukking voor de kinetische energie

$$T = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \, dm,$$

waarbij  $\mathbf{v}$  de snelheid van een willekeurig punt van het lichaam is.

**Opgave 3** (gewicht 2.5)

Maak gebruik van Ritz methode om een benaderende oplossing te vinden van het variationele probleem

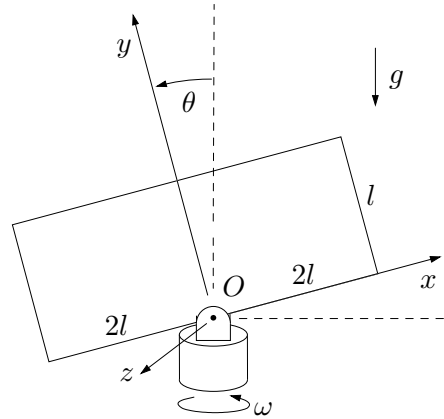
$$I[y] = \int_0^1 [y + y' + yy' + (y')^2] \, dx,$$

met de essentiële randvoorwaarde  $y(0) = 0$ . Gebruik daarbij de vormfuncties

$$h_1(x) = 1; \quad h_2(x) = x; \quad h_3(x) = x^2.$$

**Opgave 4** (gewicht 2.5)

De afgebeelde homogene rechthoekige plaat met massa  $m$  bevindt zich in het  $xy$ -vlak en kan vrij roteren om de  $z$ -as bij het scharnier  $O$ , waarvan de beweging beschreven wordt door middel van de gegeneraliseerde coördinaat  $\theta$ . Het scharnier is bevestigd op een platform dat roteert met constante hoeksnelheid  $\omega$ . Afmetingen kunnen uit de figuur worden afgelezen en de versnelling van de zwaartekracht is  $g$ .



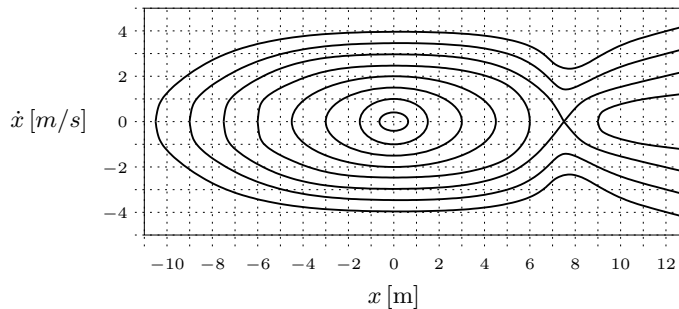
- Geef de traagheidstensor van de constructie t.o.v. punt  $O$  om het afgebeelde  $xyz$ -assenstelsel, uitgedrukt in  $m$  en  $l$ .
- Toon aan dat de kinetische energie van het systeem gegeven is door

$$T = ml^2 \left[ \frac{5}{6} \dot{\theta}^2 + \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cos^2 \theta \right) \omega^2 \right].$$

Beschrijf alle stappen van de berekening.

- Bepaal de Lagrangiaan, de Jacobi-integraal en de effectieve potentiaal.
- Vind de voorwaarden waaraan de hoeksnelheid  $\omega$  dient te voldoen opdat de evenwichtspositie  $\theta = 0$  stabiel is. Maak daarbij gebruik van de methode van uw voorkeur.

**Opgave 5** (gewicht 1.5)



De figuur beeldt het fase-diagram af van een dynamisch systeem welk beschreven wordt door de gegeneraliseerde coördinaat  $x$ . Geef een gemotiveerd antwoord op de volgende vragen.

- Geef de waarden van  $x$  aan waarvoor een evenwichtspunt gevonden wordt. Geef ook aan of het punt stabiel danwel onstabiel is.
- Geef twee verschillende sets van initiële voorwaarden voor  $x$  en  $\dot{x}$  waarvoor  $x$  de waarde 6 m zal bereiken met nul snelheid.
- Gegeven de initiële voorwaarde  $x = 12$  m, geef een waarde aan van de initiële voorwaarde voor  $\dot{x}$  om er zeker van te zijn dat  $x$  een negatieve waarde zal bereiken.