Delft University of Technology **Faculty of Aerospace Engineering**

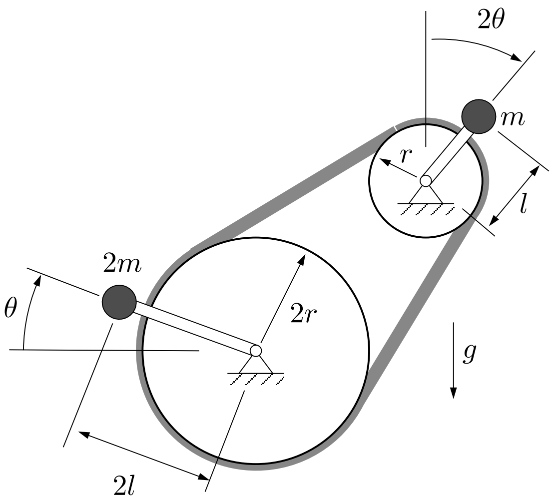
Dynamics and Stability AE3-914

February 2, 2006 14:00–17:00

There are 5 problems Dutch translation attached

Problem 1 (weight 2)

Two particles with mass m and $2m$ are attached to the represented homogeneous pulleys through two massless bars of length l and $2l$ respectively. The pulleys are connected by a belt as shown. No slipping can occur between pulleys and belt, so the system is described by a single generalised coordinate θ as shown. The particles do not collide for any value of θ and the acceleration of gravity is g.



Determine the equilibrium configurations of the represented system and identify in each case whether the equilibrium is stable or unstable

Hints: To decide whether a function $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ such that $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ is a maximum, a minimum or an inflection point at x_0, one must check the higher-order derivatives until a non-zero derivative $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ is found. Then there are three possibilities:

a. If n is odd then $f(x_0)$ is an inflection point.

b. If n is even and $f^{(n)}(x_0) > 0$ then $f(x_0)$ is a minimum.

c. If n is even and $f^{(n)}(x_0) < 0$ then $f(x_0)$ is a maximum.

Some useful trigonometry:

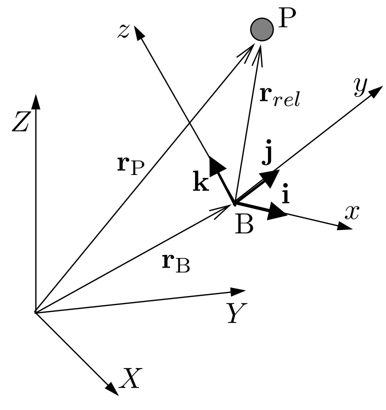
$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \end{aligned}$$

Problem 2 (weight 1)

Consider an fixed reference system XYZ and a non-inertial reference system xyz with velocity $\mathbf{v}_\mathrm{B}$ and angular velocity $\boldsymbol{\omega}$. The relative position and velocity of a point P with respect to the xyz-system are expressed as

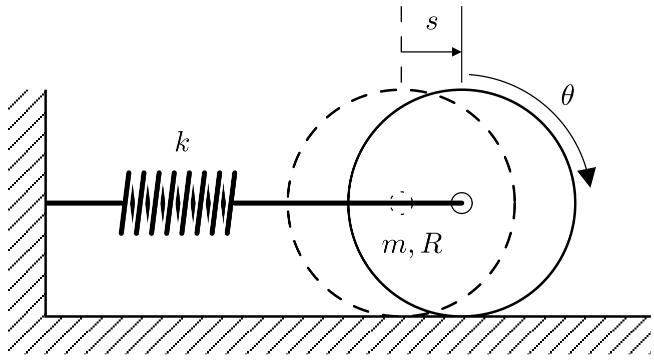
$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{rel} &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \\ \mathbf{v}_{rel} &= \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k} \end{aligned}$$

where the unit vectors $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ and $\mathbf{k}$ are attached to the xyz-axes.



Derive the expression of the absolute velocity $\mathbf{v}_\mathrm{P}$ in terms of $\mathbf{v}_\mathrm{B}$, $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{r}_{rel}$ and $\mathbf{v}_{rel}$.

Problem 3 (weight 2,5)



The represented system consists of a homogeneous disc with mass m and radius R and a linear spring with stiffness k. The motion is described by two generalised coordinates s and θ such that the spring is unstretched when $s = 0$. The disc rolls without slipping on the horizontal surface, which is imposed through the constraint

$$s = R\theta.$$

The mass moment of inertia of a homogeneous disc is given by $I = \frac{1}{2}mR^2$.

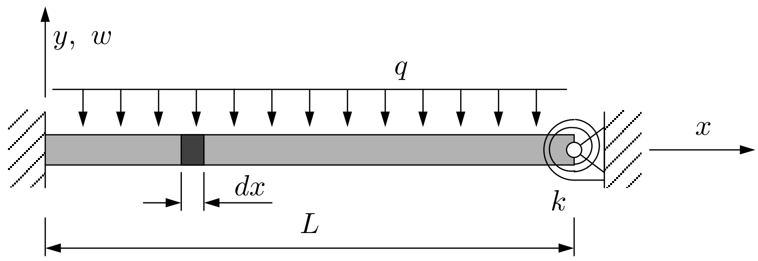
a. Indicate the number of degrees-of-freedom of the system.

b. Set up the Lagrangian in terms of the generalised coordinates s and θ.

c. Find the equations of motion of the system making use of the Lagrange multiplier method.

d. Explain the physical meaning of the Lagrange multiplier in the equations obtained above.

Problem 4 (weight 2,5)



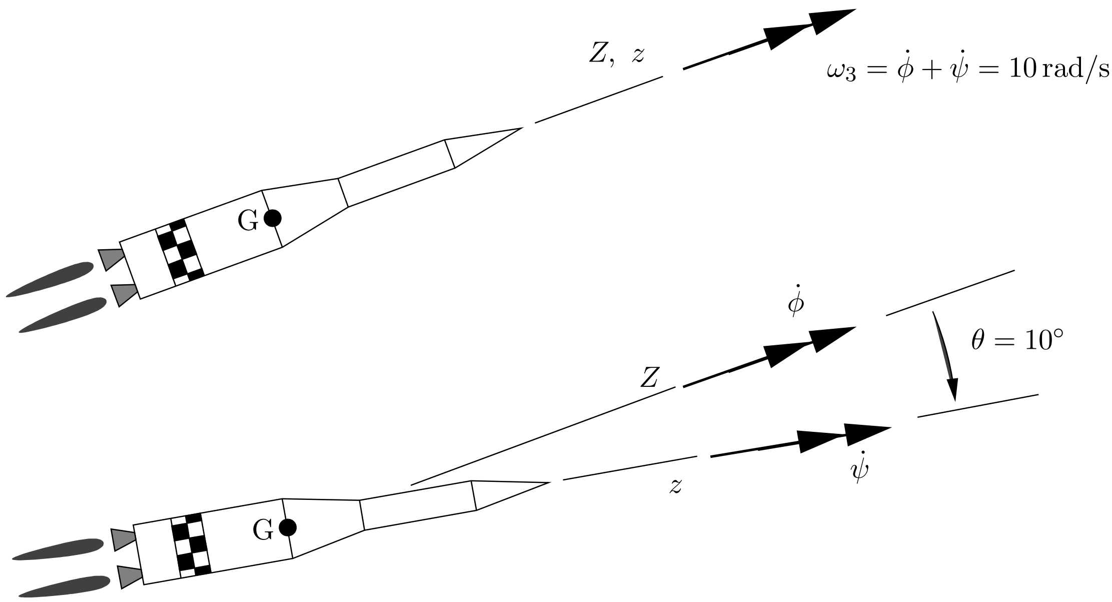
The represented beam is fixed at $x = 0$ and hinged at $x = L$ with a linear rotational spring of stiffness k that is unstretched when the rotation of the beam is zero. The beam is loaded by a homogeneous distributed load q as shown. Let $w(x)$ be the deflection from equilibrium of a point of the beam in the vertical direction. The own mass of the beam is neglected and the flexural rigidity is constant and amounts to $E\mathcal{I}$.

a. Find the generalised potential dV_g corresponding to the distributed load q for an infinitesimal element of the beam.

b. Set up the potential V of the system (*Hints:* The elastic potential energy in an infinitesimal element of the beam is expressed in terms of the second derivative of the deflection as $dV_e = \frac{1}{2}E\mathcal{I}w''^2\,dx$. The rotation of a beam is given by the first derivative of the deflection w').

c. Find the differential equation for static deflection $w(x)$ of the beam and the natural boundary condition at $x = L$.

Problem 5 (weight 2)



The represented rocket is spinning with a rate $\omega_3 = \dot\phi + \dot\psi = 10\,\mathrm{rad/s}$ about its symmetry axis when due to a malfunction of the guidance system this axis experiences a deviation quantified by the nutation angle $\theta = 10°$. The mass moments of inertia about the symmetry axis and any other transverse axis trough the mass centre G are $1\,000\,\mathrm{kg\,m^2}$ and $50\,000\,\mathrm{kg\,m^2}$ respectively. The line of action of the thrust goes through the mass centre G.

a. Explain why neither the thrust nor gravity have influence in the rotational dynamics of this system.

b. Identify the ignorable coordinates of the system and write the corresponding integrals of motion.

c. Calculate the precession $\dot\phi$ and the spin $\dot\psi$ after the nutation angle $\theta = 10°$ has been reached.

Hint: The kinetic energy of a free rotating solid with axial symmetry is expressed in terms of the Euler angles as

$$T = \frac{1}{2}\left[I(\dot\phi^2 \sin^2\theta + \dot\theta^2) + I_s(\dot\phi\cos\theta + \dot\psi)^2\right]$$

where I_s is the moment of inertia about the symmetry axis and I is the moment of inertia about a transverse axis through the mass centre.

Technische Universiteit Delft **Faculteit Luchtvaart- en Ruimtevaarttechniek**

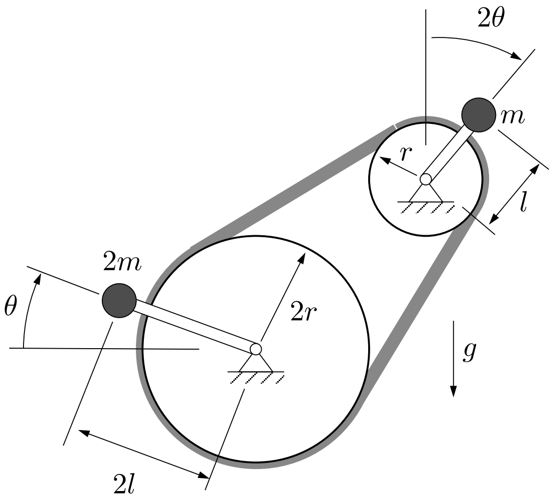
Dynamics and Stability AE3-914

2 februari 2005 **14:00–17:00**

Er zijn 5 opgaven

Opgave 1 (gewicht 2)

Twee deeltjes met massa m en $2m$ zijn zijn bevestigd aan de afgebeelde homogene katrollen door middel van twee massaloze staven met lengte l en $2l$. De katrollen zijn verbonden door een snaar zoals weergegeven in de afbeelding. Er kan geen slip optreden tussen katrollen en snaar, waardoor het systeem beschreven kan worden door een enkele gegeneraliseerde coördinaat θ. De deeltjes kunnen niet met elkaar botsen en de versnelling van de zwaartekracht is g.



Bepaal de evenwichtsconfiguraties van het afgebeelde systeem en ga voor elk geval na of het evenwicht stabiel dan wel instabiel is.

Hint: Om te bepalen of een functie $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ waarvoor geldt dat $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ een maximum, en minimum of een buigpunt bereikt op x_0, dient men de hogere orde afgeleiden te controleren tot er een niet-nul zijnde afgeleide $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ gevonden wordt. Er zijn dan drie mogelijkheden:

a. Als n oneven is dan is $f(x_0)$ een buigpunt.

b. Als n even is en $f^{(n)}(x_0) > 0$ dan is $f(x_0)$ een minimum.

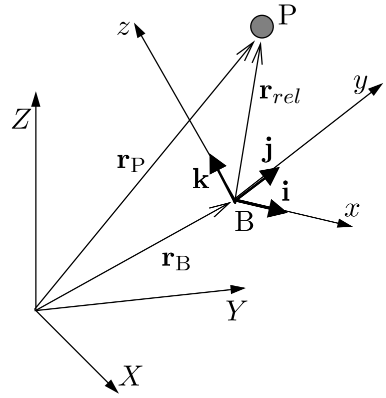
c. Als n even is en $f^{(n)}(x_0) < 0$ dan is $f(x_0)$ een maximum.

Nuttige trigonometrie: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

Opgave 2 (gewicht 1)

Beschouw een vast assenstelsel XYZ en een niet-inertieel assenstelsel xyz met snelheid $\mathbf{v}_\mathrm{B}$ en hoeksnelheid $\boldsymbol{\omega}$. De relatieve plaats en snelheid van een punt P ten opzichte van het xyz-assenstelsel worden uitgedrukt als

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{rel} &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}\\ \mathbf{v}_{rel} &= \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}\end{aligned}$$

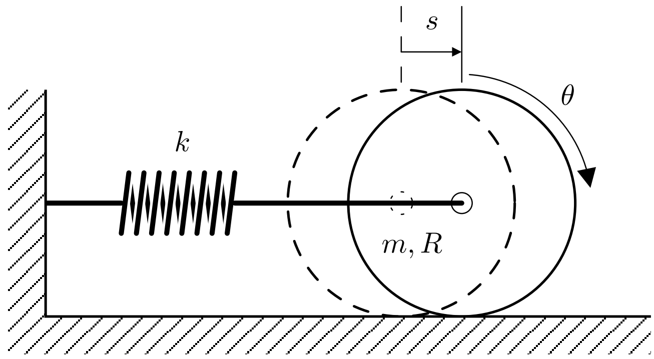


waarbij de eenheidsvectoren $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ and $\mathbf{k}$ vast zitten aan het xyz-stelsel.

Leid de formule af van de absolute snelheid $\mathbf{v}_\mathrm{P}$ uitgedrukt in $\mathbf{v}_\mathrm{B}$, $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{r}_{rel}$ en $\mathbf{v}_{rel}$.

Opgave 3 (gewicht 2,5)

Het afgebeelde systeem bestaat uit een homogene schijf met massa m en straal R en een lineair veer met stijfheid k. De beweging wordt beschreven door twee gegeneraliseerde coördinaten s en θ zodanig dat het veer is ontspannen voor $s = 0$. De schijf rolt zonder te slippen over het horizontale vlak, hetgeen opgelegd wordt door middel van de nevenvoorwaarde



$$s = R\theta.$$

Het massatraagheidsmoment van een homogene schijf is $I = \frac{1}{2}mR^2$.

a. Geef het aantal vrijheidsgraden aan.

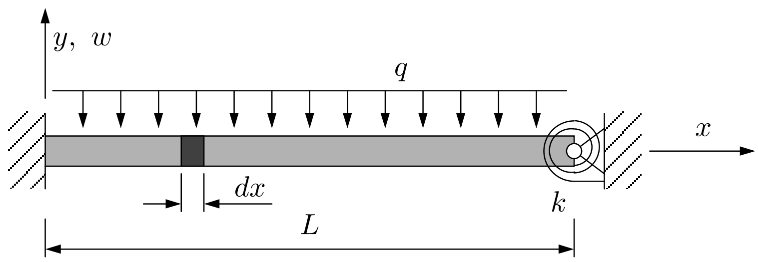
b. Bepaal de Lagrangiaan, uitgedrukt in de gegeneraliseerde coördinaten s en θ.

c. Vind de bewegingsvergelijkingen door middel van de Lagrange-multiplicatorenmethode.

d. Leg de fysische betekenis uit van de Lagrange-multiplicator in de vergelijkingen verkregen in deelvraag **c.**

Opgave 4 (gewicht 2,5)

De afgebeelde balk is ingeklemd op $x = 0$ en scharnierend opgelegd op $x = L$ met een lineair rotatieveer met stijfheid k, dat is ontspannen wanneer de rotatie van de balk nul is. De balk wordt belast door een homogeen verdeelde belasting q zoals aangegeven in de figuur. Laat $w(x)$ de verplaatsing van een punt van de balk zijn ten opzichte van de evenwichtspositie. De eigen massa van de balk wordt genegeerd en de buigstijfheid is overal $E\mathcal{I}$.

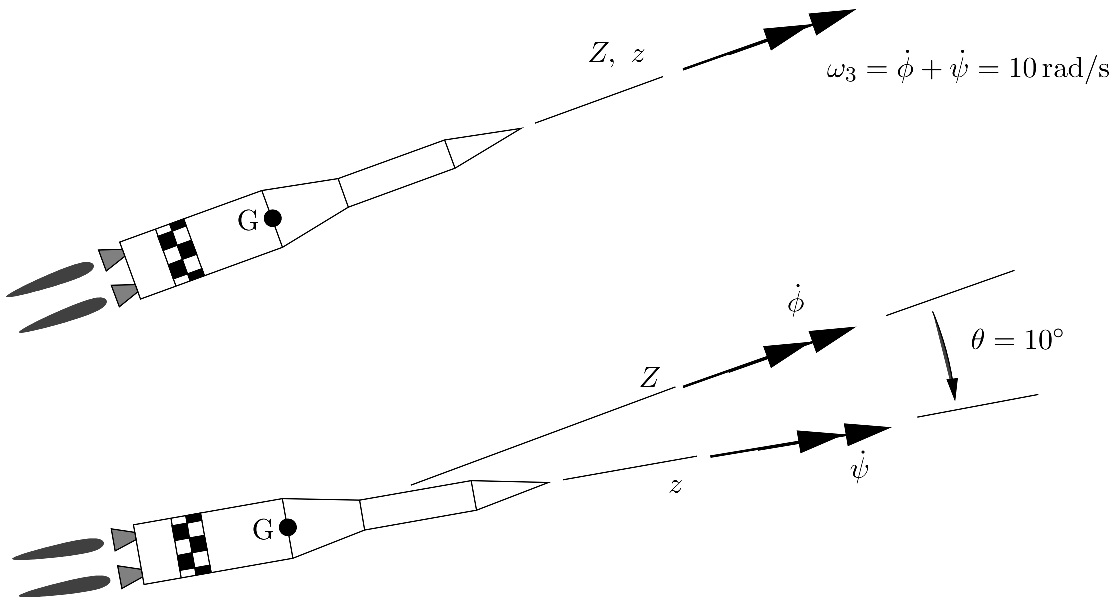


a. Vind de gegeneraliseerde potentiaal dV_g die hoort bij verdeelde belasting q voor een infinitesimaal element van de balk.

b. Bepaal de potentiaal V van het systeem (*Hints:* De elastische potentiële energie in een infinitesimaal element van de balk wordt uitgedrukt in termen van de tweede afgeleide van de verplaatsing als $dV_e = \frac{1}{2}E\mathcal{I}w''^2\,dx$. De rotatie van een balk wordt gegeven door de eerste afgeleide van de verplaatsing w').

c. Vind de differentiaalvergelijking voor statische vervorming van de balk $w(x)$ en de natuurlijke randvoorwaarde op $x = L$.

Opgave 5 (gewicht 2)



Het afgebeelde raket spint met ratio $\omega_3 = \dot{\phi} + \dot{\psi} = 10\,\mathrm{rad/s}$ om zijn symmetrieas. Door een storing in het geleidingssysteem ontwikkelt deze as een afwijking gekwantificeerd door de nutatiehoek $\theta = 10°$. De massatraagheidsmomenten om de symmetrieas en om elke transversale as door het zwaartepunt G zijn $1\,000\,\mathrm{kg\,m^2}$ en $50\,000\,\mathrm{kg\,m^2}$ respectievelijk. De werklijn van de stuwkracht gaat door het zwaartepunt G.

a. Leg uit waarom stuwkracht noch zwaartekracht invloed hebben op de rotatiedynamica van dit systeem.

b. Identificeer de cyclische coördinaten (ignorable coordinates) van het systeem en schrijf de bijbehorende constanten van de beweging (integrals of motion).

c. Bereken de precessie $\dot{\phi}$ en de spin $\dot{\psi}$ nadat de nutatiehoek $\theta = 10°$ bereikt is.

Hint: De kinetische energie van een vrij roterend lichaam met axiale symmetrie wordt uitgedrukt als een functie van de Eulerhoeken als

$$T = \frac{1}{2}\left[I(\dot{\phi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + I_s(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})^2\right]$$

waarbij I_s het traagheidsmoment is om de symmetrieas en I het traagheidsmoment is om een transversale as door het zwaartepunt.