Dynamics and Stability AE3-914

January 9, 2004 14:00–17:00

Please use a new sheet for each problem.
The neatness of your work is evaluated as well.
There are 5 problems and a Dutch translation has been included.

Problem 1 (weight 1,5; max. 30 min.)
Derive the general expression of the kinetic energy for a rigid body $\mathcal{V}$

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{I}_G \, \boldsymbol{\omega},$$

where m is the mass, v_G is the speed of the mass centre, $\mathbf{I}_G$ is the inertia tensor with respect to the mass center and $\boldsymbol{\omega}$ is the angular velocity vector, departing from the generic expression of the kinetic energy

$$T = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \, dm,$$

where $\mathbf{v}$ is the velocity of an arbitrary point of the body.

Problem 2 (weight 2; approx. 35 min.)
The motion of particle with mass m in a horizontal plane is described by the polar coordinates (r, θ). The particle is submitted to a potential $V = -mk/r^3$.

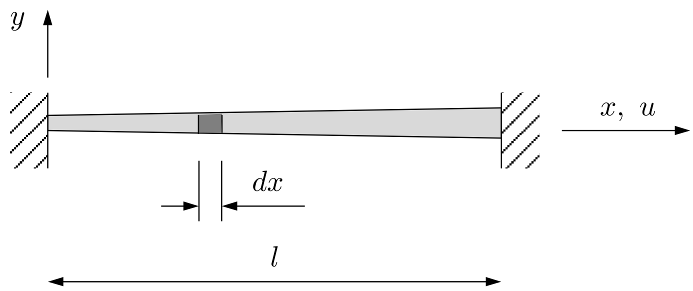
a. Construct the Lagrangian in terms of the generalised coordinates (r, θ).

b. Identify any ignorable coordinate and find the corresponding integral of motion. Indicate also the physical meaning of the integral of motion found.

c. Find the equation of motion for the non-ignorable coordinate and the conditions for steady motion.

d. Investigate the stability of the steady motion.

Problem 3 (weight 2; approx. 35 min.)



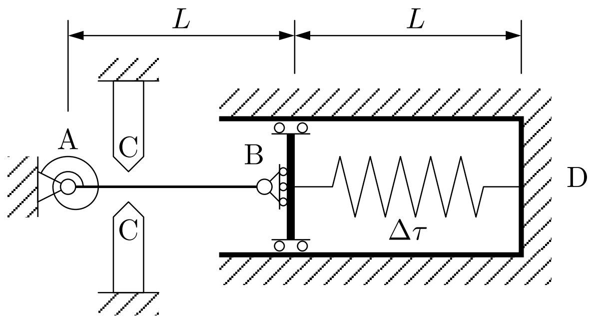
Consider a string that is stretched over an interval $0 \leq x \leq l$ of the x-axis. Let $u(x,t)$ be the displacement from equilibrium of a point along the string in the x-direction. The string has constant density ρ [kg/m^3] and elasticity modulus E [N/m^2]. The cross-section of the string is a circle with radius $r(x) = r_0 + \frac{x}{l} r_1$ [m].

a. Find the Lagrangian dL for an infinitesimal element of the string in terms of the displacement u and its derivatives (*Hint:* The elastic potential energy in an infinitesimal element of the string is expressed in terms of the strain as $dV = \frac{1}{2} EA\varepsilon^2\, dx$).

b. Set up the action integral for the string.

c. Find the equations of motion of the string making use of Hamilton's principle.

Problem 4 (weight 2,5; approx. 45 min.)



A thermal switch consists of the represented rigid bar AB with a torsional spring in A and a linear spring BD which will expand as a consequence of a temperature increment $\Delta\tau$. The switch is designed to make contact at points C when a temperature increment is reached in the spring BD such that the horizontal position of AB represented in the figure becomes unstable. The bar AB has a moment of inertia I_A about point A. The torsional spring has stiffness K_A and is unstressed in the represented configuration. The linear spring has stiffness K_{BD} and natural length $(1 + \alpha\Delta\tau)L$ with α the coefficient of thermal expansion. Gravity is not taken into account and the dimensions of the slider at B are neglected.

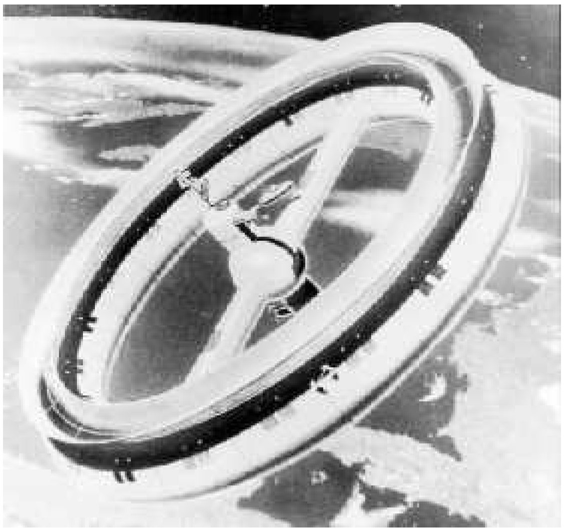
a. Choose an adequate generalised coordinate and find the Lagrangian of the system for a given temperature increment $\Delta\tau$.

b. Find the equation of motion of the bar AB.

c. Determine the temperature increment $\Delta\tau$ for which the horizontal position of the bar AB becomes unstable.

Problem 5 (weight 2; approx. 35 min.)

In the early 1950s, Wernher von Braun designed a permanent space station with the shape of a wheel. Artificial gravity can be created by rotating the wheel with a certain spin $\dot{\psi}$ about the axis perpendicular to the wheel's plane. In order to make sure that all parts of the wheel are equally illuminated by sunlight, the wheel is given a certain precession $\dot{\phi}$ with nutation angle θ. The wheel has mass M and radii of gyration k_s (about the axis perpendicular to the wheel's plane) and k (about any axis contained in the wheel's plane).



a. Find the equation of motion for the non-ignorable coordinate, departing from the given expression for the kinetic energy in the Euler angles (ϕ, θ, ψ),

$$T = \frac{1}{2}\left[I(\dot{\phi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + I_s(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})^2\right]$$

b. Find the relation between $\dot{\phi}$, θ and $\dot{\psi}$ so that steady motion is possible.

c. The illumination of the wheel is optimal when the nutation angle is 10° and the precession period is six hours. Calculate the required relation between the radii of gyration k_s and k so that the spin period equals two hours.

Dynamics and Stability AE3-914

9 januari 2004 14:00–17:00

Gebruik voor iedere opgave een nieuw blad a.u.b.
De netheid van het werk wordt ook beoordeeld.
Er zijn 5 opgaven.

Opgave 1 (gewicht 1,5; max. 30 min.)
Leid de algemene uitdrukking af voor de kinetische energie van een star lichaam $\mathcal{V}$

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{I}_G \, \boldsymbol{\omega},$$

waarbij m de massa van het lichaam is, v_G de snelheid van het zwaartepunt, $\mathbf{I}_G$ de massatraagheidstensor ten opzichte van het zwaartepunt en vector $\boldsymbol{\omega}$ de hoeksnelheid. Ga uit van de algemene uitdrukking voor de kinetische energie

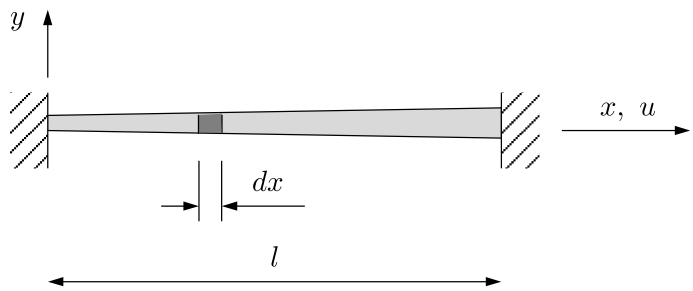
$$T = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \, dm,$$

waarbij $\mathbf{v}$ de snelheid van een willekeurig punt van het lichaam is.

Opgave 2 (gewicht 2; ong. 35 min.)
De beweging van een deeltje met massa m in een horizantaal vlak is beschreven met behulp van de poolcoördinaten (r, θ). Het deeltje is onderworpen aan een potentiaal $V = -mk/r^3$.

- **a**. Bepaal de Lagrangiaan in termen van de gegeneraliseerde coördinaten (r, θ).
- **b**. Onderscheid de mogelijke cyclische coördinaat (ignorable coordinate) en vind de bijbehorende constante van de beweging (integral of motion). Geef ook de fysische betekenis van de gevonden constante van de beweging.
- **c**. Vind de bewegingsvergelijking voor de niet-cyclische coördinaat en bepaal de voorwaarden voor de stationaire beweging (steady motion).
- **d**. Onderzoek de stabiliteit van de stationaire beweging.

Opgave 3 (gewicht 2; ong. 35 min.)



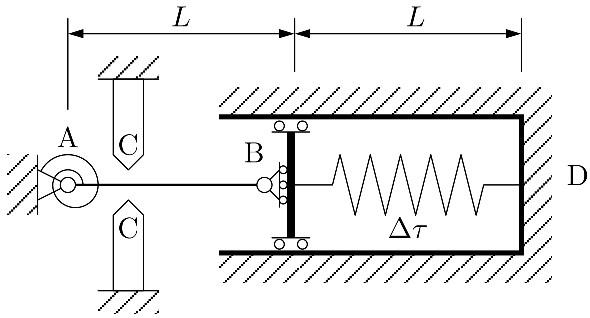
Beschouw een gespannen snaar over een interval $0 \leq x \leq l$ van de x-as. Laat $u(x,t)$ de verplaatsing van een punt op de snaar zijn ten opzichte van de evenwichtstoestand in de x-richting. De snaar heeft een constante dichtheid ρ [kg/m^3] en een elasticiteitsmodulus E [N/m^2]. De dwarsdoorsnede is een cirkel met straal $r(x) = r_0 + \frac{x}{l} r_1$ [m].

a. Vind de Lagrangiaan dL voor een infinitesimaal element van de snaar in termen van de verplaatsing u en zijn afgeleiden (*Hint:* De elastische potentiaal energie in een infinitesimaal element van de snaar kan worden uitgedrukt in termen van de rek als $dV = \frac{1}{2} E A \varepsilon^2 \, dx$).

b. Stel de actie integraal voor de snaar op.

c. Vind de bewegingsvergelijkingen voor de snaar door gebruik te maken van het principe van Hamilton.

Opgave 4 (gewicht 2,5; ong. 45 min.)



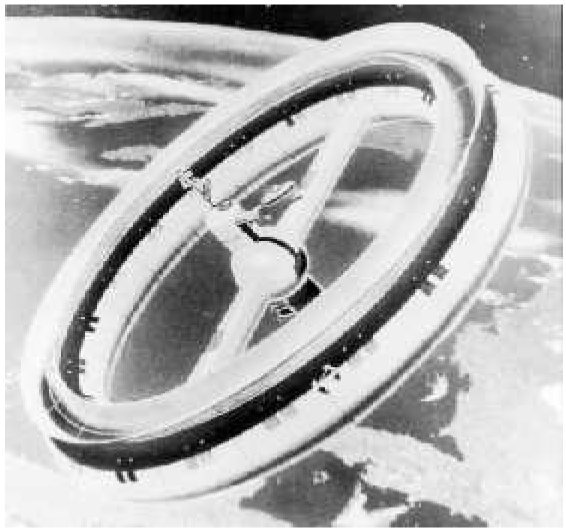
Een thermische schakelaar bestaat uit de oneindig stijve staaf AB met een torsie veer in A en een lineaire veer BD die uit zal zetten ten gevolge van een temperatuursstijging $\Delta\tau$. De schakelaar is zo ontworpen dat de staaf AB contact maakt met de punten C wanneer de temperatuursstijging in de veer BD zodanig is dat de afgebeelde horizontale positie van AB in de figuur instabiel wordt. De staaf AB heeft een massatraagheid I_A ten opzichte van punt A. De torsieveer heeft een stijfheid K_A en is spanningsloos in de afgebeelde positie. De lineaire veer heeft een stijfheid K_{BD} en een natuurlijke lengte $(1 + \alpha\Delta\tau)L$ waarbij α de uitzettingscoëfficient is. De zwaartekracht en de afmetingen van de geleider B mogen worden verwaarloosd.

a. Kies een geschikte gegeneraliseerde coördinaat en vind de Lagrangiaan van het systeem voor een gegeven temperatuursstijging $\Delta\tau$.

b. Vind de bewegingsvergelijking van de staaf AB.

c. Bepaal de temperatuursstijging $\Delta\tau$ waarvoor de horizontale positie van de staaf AB instabiel wordt.

Opgave 5 (gewicht 2; ong. 35 min.)



In de vroege jaren ‘50 van de vorige eeuw bedacht Wernher von Braun een ruimtestation voor permanente bewoning in de vorm van een wiel. Door het wiel te laten roteren met een zekere spin $\dot{\psi}$ om de as van het wiel wordt er een kunstmatige zwaartekracht opgewekt. Om alle kanten van het ruimtestation voldoende te laten belichten door het zonlicht, heeft het wiel een bepaalde precessie $\dot{\phi}$ met nutatie hoek θ. De massa van het wiel is M en de massatraagheidsstralen zijn k_s (om de as van het wiel) en k (om elke as in het vlak van het wiel).

a. Vind de bewegingsvergelijking voor de niet-cyclische coördinaat (non-ignorable coordinate), uitgaande van de gegeven uitdrukking voor de kinetische energie in de Eulerhoeken (ϕ, θ, ψ),

$$T = \frac{1}{2}\left[I(\dot{\phi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + I_s(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})^2\right]$$

b. Vind de verhouding tussen $\dot{\phi}$, θ en $\dot{\psi}$ waarvoor een stationaire beweging (steady motion) mogelijk is.

c. De belichting van het wiel is optimaal wanneer de nutatie hoek 10° is en de precessie periode zes uur bedraagt. Bereken de verhouding tussen de traagheidsstralen k_s and k zodat de periode van de spin twee uur is.