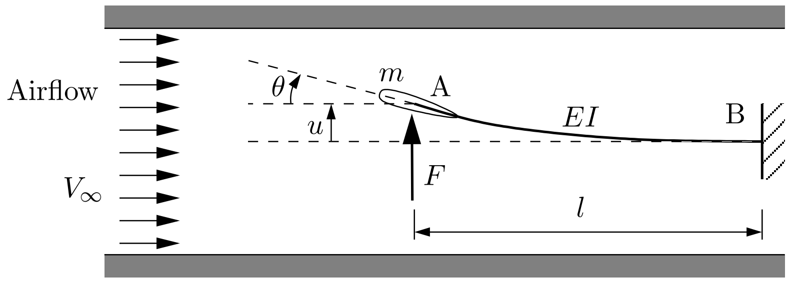
Delft University of Technology **Faculty of Aerospace Engineering**

Dynamics and Stability AE3-914

January 20, 2005 9:00–12:00

There are 5 problems Dutch translation attached

Problem 1 (weight 2)



An airfoil is being tested in a wind tunnel. The airfoil is modelled as a particle with mass m and is firmly attached to the support AB, which has length l and flexural rigidity EI. The flow produces a vertical aeroelastic load

$$F = c\,(V_\infty\,\theta - \dot{u})$$

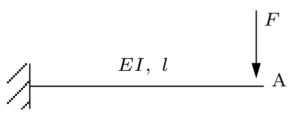
on the airfoil, where c is an aerodynamic coefficient and V_∞ is the freestream flow velocity. Gravity is neglected.

a. Find the relation between the generalised coordinate u and the angle of attack θ.

b. Set up the Lagrangian and find the equations of motion of the airfoil using the deflection u as a generalised coordinate.

c. Calculate the freestream flow velocity V_∞ for which the equilibrium position $u = 0$ becomes unstable.

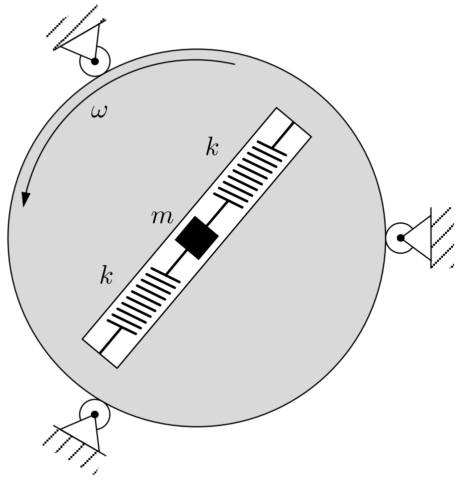
Hint:



$$\theta_A = \frac{Fl^2}{2EI} \qquad u_A = \frac{Fl^3}{3EI}$$

Problem 2 (weight 2,5)

A spring-mass system is embedded in a smooth slot on a massless disc as shown. The disc rotates in a horizontal plane with constant angular velocity ω. The springs have identical elastic constant k and are unstretched when the mass m is at the midpoint of the slot.



a. Choose an adequate generalised coordinate and construct the Lagrangian of the spring-mass system.

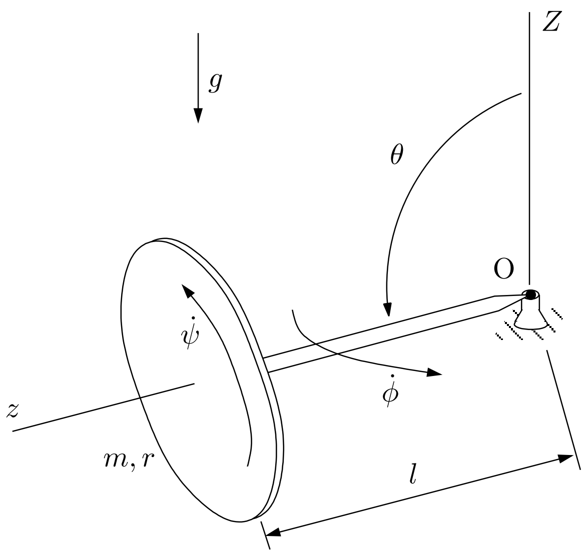
b. Find an integral of motion for the spring-mass system.

c. Construct an effective potential for the spring-mass system.

d. Calculate the angular velocity ω for which the position of the mass at the midpoint of the slot becomes unstable.

Problem 3 (weight 2)

A homogeneous disk of radius r and mass m is mounted on a massless axle of length l. The axle is pivoted at a fixed point O. The acceleration of gravity is g.



a. Find the relation between the precession $\dot{\phi}$ and the spin $\dot{\psi}$ so that there is steady motion with a nutation angle $\theta = 90°$.

b. Repeat question **a** with a nutation angle $\theta = 60°$. Calculate also the minimum spin $\dot{\psi}$ for which steady motion is possible in this case.

Hints:

The kinetic energy of a solid with axial symmetry is expressed in terms of the Euler angles as

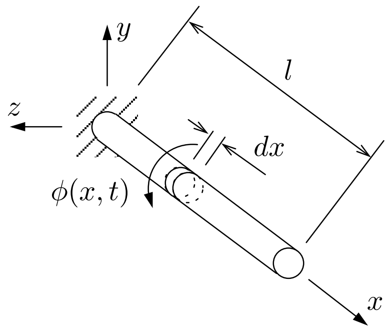
$$T = \frac{1}{2}\left[I(\dot{\phi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + I_s(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})^2\right]$$

where I_s is the moment of inertia about the symmetry axis and I is the moment of inertia about a transverse axis through the fixed point O.

The moments of inertia of a disk *with respect to the mass centre* are $\frac{1}{4}mr^2$ about an axis contained in the disk plane and $\frac{1}{2}mr^2$ about an axis perpendicular to the disk plane.

Problem 4 (weight 2,5)

Consider a shaft in the interval $0 \leq x \leq l$ of the x-axis. Let $\phi(x,t)$ be the rotation of a section of the shaft about the x-axis. The shaft has constant density ρ and shear modulus G. The cross-section is circular with radius r. The rotation of the shaft is fixed for $x = 0$ and free for $x = l$. Only torsional deformations of the shaft are considered.



a. Construct the Lagrangian dL for an element of length dx in terms of the rotation ϕ and its derivatives. Make use of the hints provided below if necessary.

b. Indicate any essential boundary condition present in the system.

c. Consider a time interval $[t_a, t_b]$. Make use of Hamilton's principle to find the equation of motion of the rotation ϕ and the natural boundary condition regarding $\phi(l,t)$ (*Remark:* Specify all the steps of your derivation and notice that no conditions regarding $\phi(x,t_a)$ and $\phi(x,t_b)$ are asked for).

Hints:

The mass moment of inertia of an element with circular cross section with radius r and length dx is

$$\frac{1}{2}\rho\pi r^4 dx.$$

The elastic potential energy within an element of length dx of a circular shaft loaded in torsion is given by

$$dV = \frac{1}{2} G I_p \phi_x^2 dx,$$

where the subindex x indicates the partial derivative with respect to x and I_p is the polar moment of inertia of the section, given by

$$\frac{1}{2}\pi r^4.$$

Problem 5 (weight 1)

A system consists of three masses placed at the given coordinates in space:

$$\begin{array}{lll} 2m & \text{at} & (a,-a,a) \\ 4m & \text{at} & (-a,a,0) \\ 3m & \text{at} & (a,a,-a) \end{array}$$

Determine the inertia tensor of the system with respect to the coordinate axes.

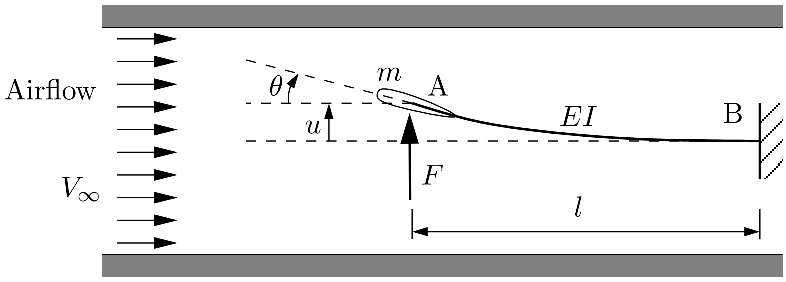
Technische Universiteit Delft   Faculteit Luchtvaart- en Ruimtevaarttechniek

Dynamics and Stability AE3-914

20 januari 2005   9:00–12:00

Er zijn 5 opgaven

Opgave 1 (gewicht 2)



Een vleugelprofiel wordt getest in een windtunnel. Het vleugelprofiel wordt gemodelleerd als een deeltje met massa m en is stevig bevestigd aan de staaf AB, met lengte l en stijfheid EI. De stroming produceert een verticale aeroelastische kracht

$$F = c\,(V_\infty\,\theta - \dot{u})$$

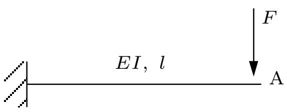
op het vleugelprofiel, c is een aerodynamische coefficient en V_∞ is de vrije aanstroomsnelheid. De zwaartekracht wordt verwaarloosd.

a. Bepaal de relatie tussen de gegeneraliseerde coordinaat u en de invalshoek θ.

b. Stel de Lagrangiaan op en bepaal de bewegingsvergelijking voor het vleugelprofiel. Gebruik daarbij de uitwijking u als gegeneraliseerde coördinaat.

c. Bereken de vrije aanstroomsnelheid V_∞ waarvoor het evenwichtspunt $u = 0$ instabiel wordt.

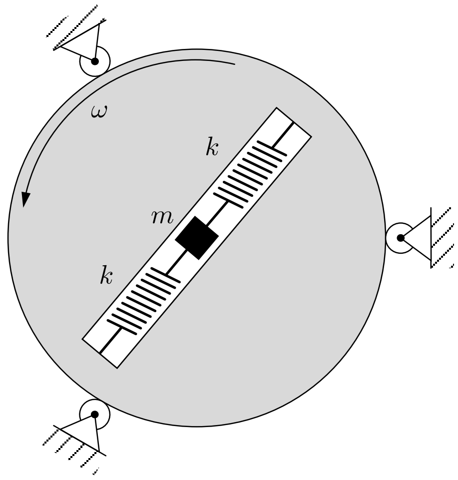
Hint:



$$\theta_A = \frac{Fl^2}{2EI} \qquad u_A = \frac{Fl^3}{3EI}$$

Opgave 2 (gewicht 2,5)

Een massa-veer systeem is ingesloten in een glade sleuf in een massaloze schijf, zoals aangegeven in het figuur. De schijf roteert in een horizontale vlak met een constante hoeksnelheid ω. De veren hebben een identieke stijfheid k en zijn ontspannen wanneer de massa m in het middenpunt is.



a. Kies een geschikte gegeneraliseerde coördinaat en formuleer de Lagrangiaan van het massa-veer systeem

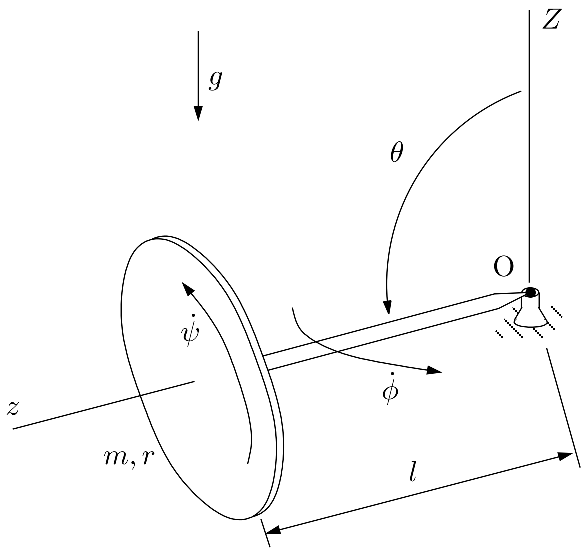
b. Vind een constante van de beweging (integral of motion) van het massa-veer systeem.

c. Formuleer een effectieve potentiaal voor het massa-veer systeem

d. Bereken de hoeksnelheid ω waarvoor het middenpunt een instabiele positie van de massa wordt.

Opgave 3 (gewicht 2)

Een homogene schijf met straal r en massa m is gemonteerd op een massaloze as met lengte l. De as is verbonden aan het vaste punt O door middel van een kogelscharnier. De zwaartekrachtsversnelling is g.



a. Bepaal de relatie tussen de precessie $\dot{\phi}$ en de spin $\dot{\psi}$ zodat er een stationaire beweging (steady motion) is met een nutatie hoek $\theta = 90°$.

b. Herhaal vraag **a** met een nutatie hoek $\theta = 60°$. Bereken ook de minimum spin $\dot{\psi}$ waarvoor de stationaire beweging mogelijk is.

Hints:

De kinetische energie van een axiaal-symmetrisch lichaam wordt uitgedrukt in de Eulerhoeken als

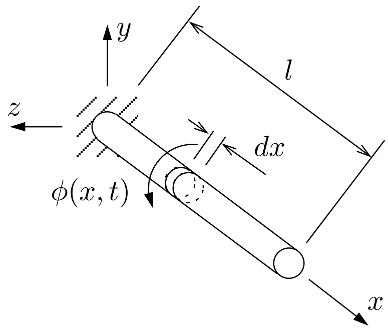
$$T = \frac{1}{2}\left[I(\dot{\phi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + I_s(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})^2\right]$$

waarbij I_s het traagheidsmoment om de symmetrie as is en I het traagheidsmoment om een transversaal as door het vaste punt O is.

Het traagheidsmoment *ten opzichte van het massamiddelpunt* van een schijf is $\frac{1}{4}mr^2$ om een as in het vlak van de schijf en $\frac{1}{2}mr^2$om een as loodrecht op de schijf.

Opgave 4 (gewicht 2,5)

Beschouw een staaf in het interval $0 \leq x \leq l$ van de x-as. Laat $\phi(x,t)$ de rotatie zijn van een dwarsdoorsnede van de staaf om de x-as. De staaf heeft een constante dichtheid ρ en glijdingsmodulus G. De dwarsdoorsnede is een cirkel met straal r. De rotatie van de staaf is vast op $x = 0$ en vrij op $x = l$. Alleen torsie van de staaf wordt beschouwd.



a. Formuleer de Lagrangiaan dL voor een element met lengte dx in termen van de rotatie ϕ en zijn afgeleiden. Maak eventueel gebruik van de hints die onderaan gegeven zijn.

b. Geef de essentiele randvoorwaarden van het systeem

c. Beschouw een tijdsinterval $[t_a, t_b]$. Maak gebruik van principe van Hamilton om de bewegingsvergelijking voor de rotatie ϕ en de natuurlijke randvoorwaarde op $\phi(l,t)$ te vinden (*Opmerking:* Laat alle stappen van de afleiding zien en let op dat er geen randvoorwaarden worden gevraagd voor $\phi(x, t_a)$ en $\phi(x, t_b)$).

Hints:

Het massatraagheidsmoment voor een element met cirkelvormige dwarsdoorsnede met straal r en lengte dx is

$$\frac{1}{2}\rho\pi r^4 dx.$$

De elastische potentiële energie in een element van lengte dx van een cirkelvormige staaf belast in torsie is

$$dV = \frac{1}{2} G I_p \phi_x^2 dx,$$

waar de subscript x een partiële afgeleide naar x aangeeft en I_p het polaire traagheidsmoment van de doorsnede is, gegeven door

$$\frac{1}{2}\pi r^4.$$

Opgave 5 (gewicht 1)

Een systeem bestaat uit drie puntmassa's geplaatst op de gegeven coördinaten in de ruimte:

$$\begin{array}{lll} 2m & \text{op} & (a, -a, a) \\ 4m & \text{op} & (-a, a, 0) \\ 3m & \text{op} & (a, a, -a) \end{array}$$

Bepaal de traagheidstensor ten opzichte van het assenstelsel.