Dynamics and Stability AE3-914

June 22, 2004 9:00–12:00

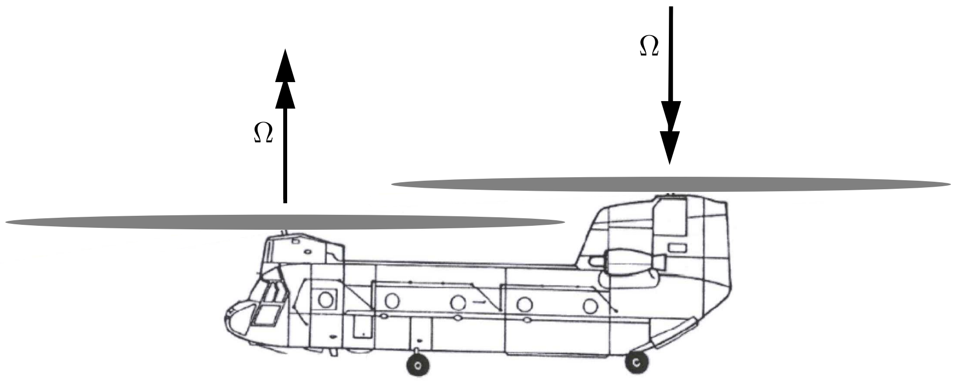
Please use a new sheet for each problem.
The neatness of your work is evaluated as well.
There are 5 problems and a Dutch translation has been included.

Problem 1 (weight 0,6)
Show that if a force field $\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$ defined in $\mathbb{R}^3$ is conservative then necessarily

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

.

Problem 2 (weight 2,3)



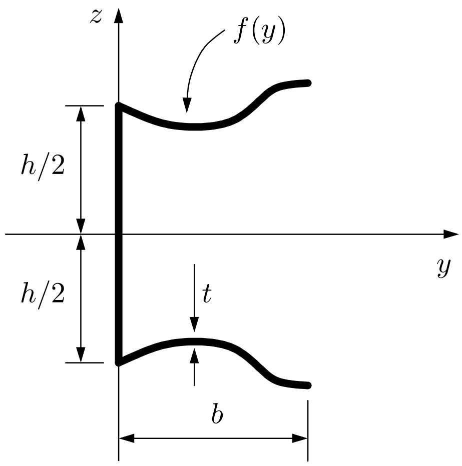
The rotors of the represented tandem helicopter consist of three identical and equally spaced blades. Each blade is modelled by a bar with moment of inertia I_b about the rotor shaft. Both rotors are turning in opposite sense at a rate Ω as shown in the figure. During a short interval the helicopter rolls to the left (as seen by the pilot) at a constant rate ω_r.

a. What are the principal moments of inertia of the rotors in terms of I_b? Provide a brief justification of your answer.

b. Calculate the bending moment in the helicopter's body during the roll, including the proper sign ($\smile$ is positive, $\frown$ is negative).

Problem 3 (weight 2,3)

You are required to design a thin-walled channel section as represented in the figure, according to the following specifications:



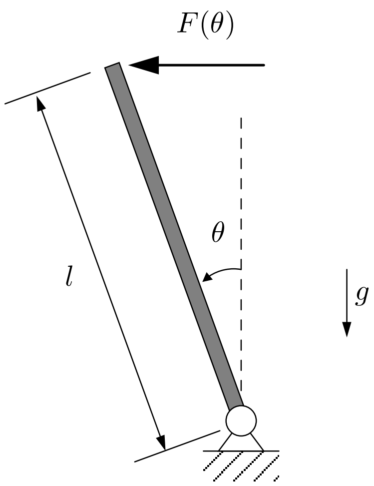
- The section is symmetric about the y-axis.
- The height of the web is h.
- The width of the section is b and the wall thickness is t
- The shape $f(y)$ of the flanges is such that the moment of inertia about the y-axis is a minimum

a. Find the differential equation of the shape $f(y)$ of the flanges such that the moment of inertia is a minimum (*Hint:* A differential element of area of the flange of a thin-walled section can be written as $dA = t\sqrt{1+[f'(y)]^2}\,dy$).

b. Derive the natural boundary condition for $f(y)$ at the tip of the flanges.

Problem 4 (weight 2,3)

The position of a homogeneous bar of length l and mass m is controlled by a horizontal force $F(\theta)$ applied to the bar tip as shown. The acceleration of gravity is g.



a. Express the controlling force $F(\theta)$ as a generalised force associated with coordinate θ. What is the physical nature of this generalised force?

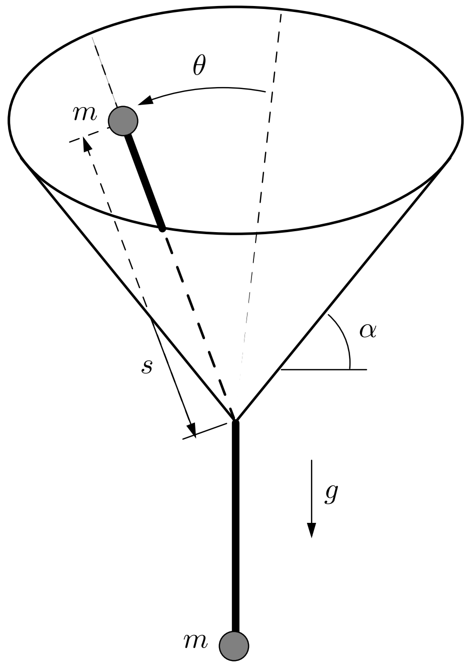
b. Construct the Lagrangian and find the equation of motion of the bar.

c. Find the required condition for $F(\theta)$ for the bar to be in equilibrium when $\theta = 0$.

d. Find the required condition for $F'(\theta)$ for the bar to be in *stable* equilibrium when $\theta = 0$

Problem 5 (weight 2,5)

Two particles with mass m are joined by a chord of length L. One of the masses is free to slide on the surface of a funnel as shown. The acceleration of gravity is g.



a. Construct the Lagrangian in terms of the generalised coordinates s and θ.

b. Identify any ignorable coordinate and find the corresponding integral of motion. Indicate also the physical meaning of the integral of motion found.

c. Find the equation of motion for the non-ignorable coordinate and the conditions for steady motion.

d. Investigate the stability of the steady motion

Dynamics and Stability AE3-914

22 juni 2004 9:00–12:00

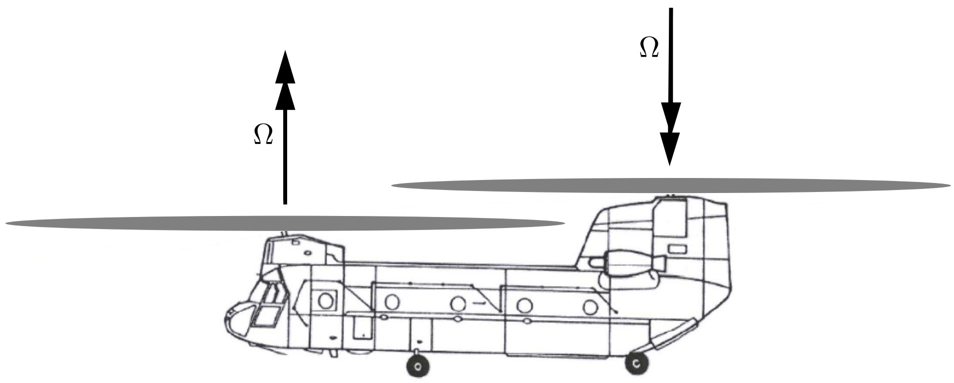
Gebruik voor iedere opgave een nieuw blad a.u.b.
De netheid van het werk wordt ook beoordeeld.
Er zijn 5 opgaven.

Opgave 1 (gewicht 0,6)
Toon aan dat wanneer het krachtenveld $\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$ in $\mathbb{R}^3$ conservatief is, noodzakelijkerwijs moet gelden:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}\,.$$

.

Opgave 2 (gewicht 2,3)



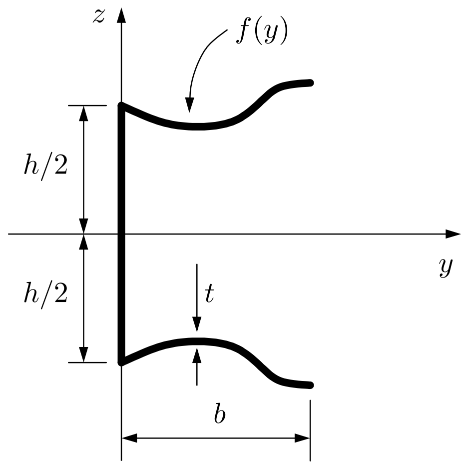
De rotors van de afgebeelde tandem-helicopter bestaan elk uit drie identieke en met gelijke tussenhoeken gemonteerde bladen. Elk blad kan worden gemodelleerd als een balk met traagheidsmoment I_b om de as van de rotor. De rotors draaien in tegengestelde richting met hoeksnelheid Ω zoals aangegeven in de figuur. Gedurende een korte periode rolt de helicopter linksom (zoals gezien door de piloot) met een constante hoeksnelheid ω_r.

a. Wat zijn de hoofdtraagheidsmomenten van de rotors in termen van I_b? Geef een korte motivatie van je antwoord.

b. Bereken het buigend moment in de romp van de helicopter tijdens de rol, incusief het juiste teken ($\smile$ is positief, $\frown$ is negatief).

Opgave 3 (gewicht 2,3)

Ontwerp een dunwandige doorsnede zoals aangegeven in de figuur, die voldoet aan de volgende specificaties:



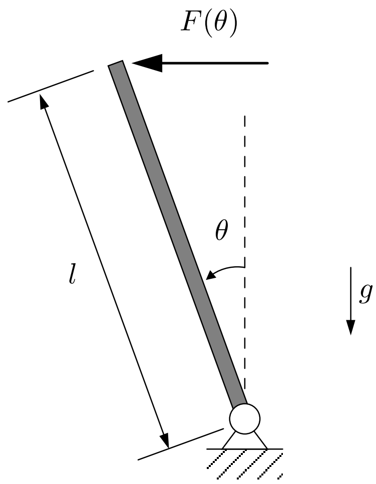
- De doorsnede is symmetrisch om de y-as.
- De hoogte van het lijf is h.
- De breedte van de doorsnede is b en de wanddikte is t.
- De vorm $f(y)$ van de flenzen is zodanig dat het traagheidsmoment om de y-as minimaal is.

a. Vind de differentiaalvergelijking van de vorm $f(y)$ van de flenzen zodat het traagheidsmoment minimaal is (*Hint:* Een differentiaal oppervlakte element van de flens van een dunwandige doorsnede kan worden geschreven als $dA = t\sqrt{1 + [f'(y)]^2}\, dy$).

b. Leid de natuurlijke randvoorwaarde af voor $f(y)$ aan de tip van de flens.

Opgave 4 (gewicht 2,3)

De positie van een homogene staaf met lengte l en massa m wordt gecontrolleerd door een horizontale kracht $F(\theta)$ die is aangebracht aan de tip van de staaf zoals aangegeven in de figuur. De gravitatieversnelling is g.



a. Druk de controllerende kracht $F(\theta)$ uit als een gegeneraliseerde kracht geassocieerd met coördinaat θ. Wat is de fysische aard van deze gegeneraliseerde kracht?

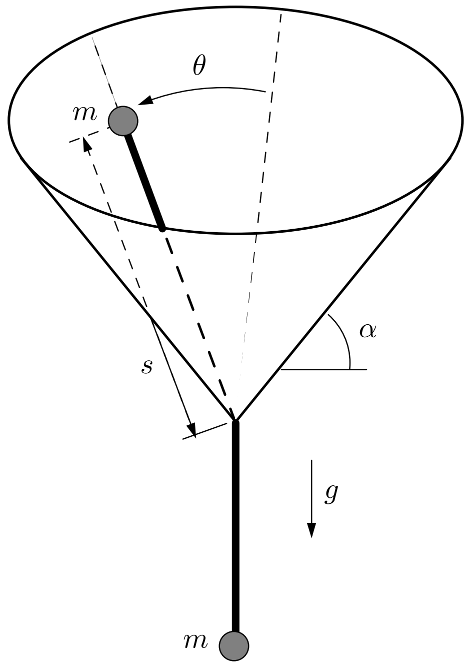
b. Stel de Lagrangiaan op en vind de bewegingsvergelijking voor de balk.

c. Vind de noodzakelijke voorwaarde voor $F(\theta)$ zodat de balk in evenwicht is als $\theta = 0$.

d. Vind de noodzakelijke voorwaarde voor $F'(\theta)$ zodat de balk in een *stabiel* evenwicht is als $\theta = 0$.

Opgave 5 (gewicht 2,5)

Twee puntmassa's m zijn verbonden door een koord met lengte L. Een van de massa's kan vrij glijden over het oppervlak van een trechter zoals getoond in de figuur. De gravitatieversnelling is g.



a. Bepaal de Lagrangiaan in termen van de gegeneraliseerde coördinaten s en θ.

b. Onderscheid de mogelijke cyclische coördinaat (ignorable coordinate) en vind de bijbehorende constante van de beweging (integral of motion). Geef ook de fysische betekenis van de gevonden constante van de beweging.

c. Vind de bewegingsvergelijking voor de niet-cyclische coördinaat en bepaal de voorwaarden voor de stationaire beweging (steady motion).

d. Onderzoek de stabiliteit van de stationaire beweging.