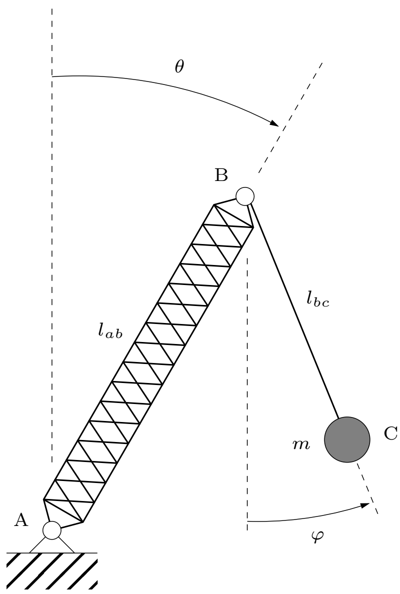
Dynamics and Stability AE3-914

June 24, 2008 14:00–17:00

There are 5 problems Dutch translation attached

Problem 1 (weight 2.5)

The represented wrecking ball is being used to demolish a burnt down university building. The motion of the ball C, which has mass m, is described by the generalised coordinates θ and φ as represented. The length of the crane AB is l_{ab} and that of cable BC is l_{bc}. Their mass is neglected and the acceleration of gravity is g.



a. Set up the Lagrangian.

Consider the case with $l_{ab} = 50\,\mathrm{m}$, $l_{bc} = 25\,\mathrm{m}$, $m = 4\,000\,\mathrm{kg}$ and $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$. This leads to the expression

$$L = (5\dot{\theta}^2 + 1.250\dot{\phi}^2 + 5\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\theta+\phi) - 2\cos\theta + \cos\phi) \times 10^6$$

b. Find the equations of motion.

During demolition the crane AB is actuated according to the expression

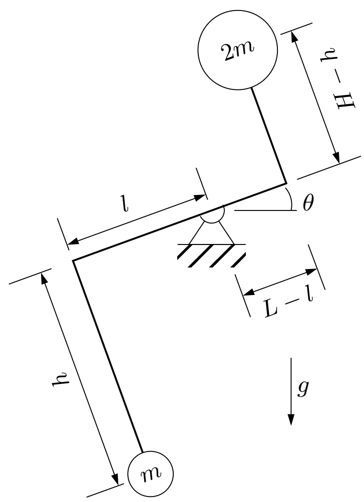
$$\theta(t) = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{18}\sin\frac{\pi t}{4}$$

c. Set up the Jacobi energy integral during demolition

d. Indicate whether (and why) the obtained Jacobi energy is an integral of motion or not.

Problem 2 (weight 1.5)

The represented assembly is free to pivot about the support. The acceleration of gravity is g.

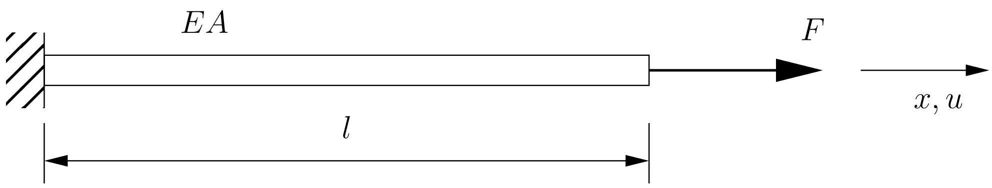


a. Set up the potential energy of the assembly in terms of θ.

b. Calculate the value of l for which $\theta = 0$ is an equilibrium point.

c. Calculate the range of values of h for which $\theta = 0$ is a stable equilibrium point.

Problem 3 (weight 2.5)



Consider a homogeneous bar with rigidity EA over the interval $0 \leq x \leq l$ of the x-axis. Let $u(x)$ be the horizontal displacement of a point along the bar in an equilibrium configuration. A force F is applied at $x = l$. The elastic potential energy functional is given by

$$V^e = \int_0^l \frac{1}{2} EA u'^2 \, dx$$

a. Find the generalised potential associated to the applied force F.

b. Find an approximation of the equilibrium solution $u(x)$ making use of Ritz's method and the shape functions $\{1, x, x^2\}$.

c. Explain what (and why) the extra computed coefficients would have been if the shape functions x^3, x^4, x^5 and so on had also been included in the approximation.

Problem 4 (weight 1.5)

Assess the stability of all equilibrium points in the interval $[0, 2\pi]$ for the dynamical system governed by the differential equation

$$\ddot{x} + \dot{x} + \sqrt{2}(\cos x - \sin x) = 0$$

Problem 5 (weight 2)

The kinetic energy of a free solid with axial symmetry is expressed in terms of the Euler angles as

$$T = \frac{1}{2} \left[I(\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + I_s(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 \right]$$

where I_s is the moment of inertia about the symmetry axis and I is the moment of inertia about a transverse axis through the mass centre G.

a. Find the relation between the precession $\dot{\phi}$, the spin $\dot{\psi}$ and the nutation angle θ in terms of I_s and I in steady motion conditions.

b. Show that the relation between the spin $\dot{\psi}$ and the angular velocity about the symmetry axis $\omega_3 = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}$ equals

$$\dot{\psi} = \frac{I - I_s}{I} \omega_3$$

c. Apply the above result to calculate the spin and precession of earth, with polar radius $R_p = 6\,356\,\text{km}$, equatorial radius $R_e = 6\,378\,\text{km}$, mass $m = 5.976 \cdot 10^{24}\,\text{kg}$, nutation angle $\theta = 0$ and angular velocity $\omega_3 = 2\pi\,\text{rad/day}$.

Hint: The moments of inertia of an ellipsoid with mass m and semi-axes a_1, a_2 and a_3 are

$$I_1 = \frac{1}{5} m(a_2^2 + a_3^2) \quad I_2 = \frac{1}{5} m(a_1^2 + a_3^2) \quad I_3 = \frac{1}{5} m(a_1^2 + a_2^2)$$

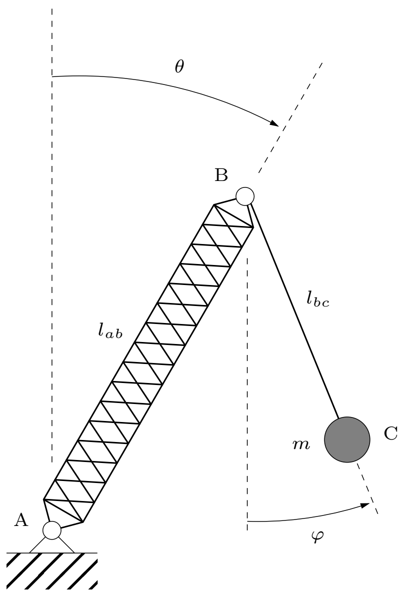
Dynamics and Stability AE3-914

24 juni 2008 14:00–17:00

Er zijn 5 opgaven

Problem 1 (weight 2.5)

De afgebeelde kogel wordt gebruikt om een uitgebrand universiteitsgebouw te slopen. De beweging van de kogel C, met massa m, wordt beschreven door de gegeneraliseerde coördinaten θ en φ zoals afgebeeld. De lengte van de kraan AB is l_{ab} en die van de kabel BC is l_{bc}. Hun massa wordt verwaarloosd en de zwaartekrachtsversnelling is g.



a. Construeer de Lagrangiaan.

Beschouw het geval met $l_{ab} = 50\,\mathrm{m}$, $l_{bc} = 25\,\mathrm{m}$, $m = 4\,000\,\mathrm{kg}$ en $g = 10\,\mathrm{m/s}^2$. Dit leidt tot de uitdrukking

$$L = (5\dot{\theta}^2 + 1.250\dot{\phi}^2 + 5\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\theta+\phi) - 2\cos\theta + \cos\phi) \times 10^6$$

b. Vind de bewegingsvergelijkingen.

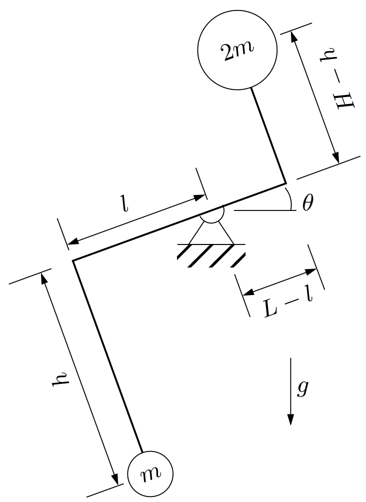
Tijdens de sloop wordt de kraan AB aangedreven volgens de uitdrukking

$$\theta(t) = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{18}\sin\frac{\pi t}{4}$$

c. Construeer de Jacobi energie-integraal tijdens de sloop

d. Geef aan of (en waarom) de verkregen energie een constante van de beweging is of niet.

Problem 2 (weight 1.5) Het afgebeelde stelsel is vrij gescharnierd op het steunpunt. De versnelling van de zwaartekracht is g.

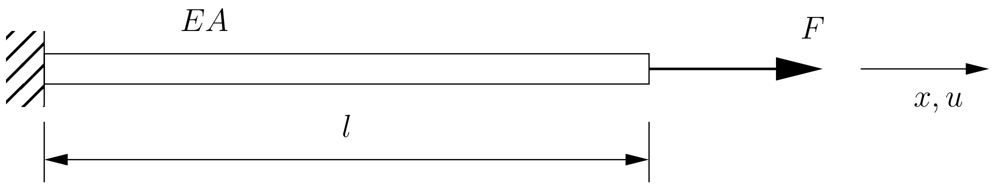


a. Construeer de potentiële energie van het stelsel, uitgedrukt in θ.

b. Bereken de waarde van l waarvoor $\theta = 0$ een evenwichtspunt is.

c. Bereken het interval van waarden voor h waarvoor $\theta = 0$ een stabiel evenwichtspunt is.

Problem 3 (weight 2.5)



Beschouw een homogene staaf met stijfheid EA langs het interval $0 \leq x \leq l$ van de x-as. Zij $u(x)$ de horizontale verplaatsing van een punt van de staaf in de evenwichtsconfiguratie. Een kracht F wordt uitgeoefend op $x = l$. De functionaal van de elastische potentiële energie wordt gegeven door

$$V^e = \int_0^l \frac{1}{2} EAu'^2 \, dx$$

a. Vind de gegeneraliseerde potentiaal behorende bij de opgelegde kracht F.

b. Vind een benadering van de evenwichtsoplossing $u(x)$ door middel van de methode van Ritz en de vormfuncties $\{1, x, x^2\}$.

c. Leg uit wat (en waarom) de waarde van de extra berekende coëfficienten was geweest als de vormfuncties x^3, x^4, x^5 enzovoort ook opgenomen waren geweest in de benadering.

Problem 4 (weight 1.5) Beoordeel de stabiliteit van alle evenwichtspunten in het interval $[0, 2\pi]$ voor het dynamische systeem met differentiaalvergelijking

$$\ddot{x} + \dot{x} + \sqrt{2}(\cos x - \sin x) = 0$$

Problem 5 (weight 2)

De kinetische energie van een vrij lichaam met axiale symmetrie wordt uitgedrukt in de Eulerhoeken als

$$T = \frac{1}{2} \left[I(\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + I_s(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 \right]$$

waarbij I_s het traagheidsmoment om de symmetrieas is en I het traagheidsmoment om een transversaal as door het zwaartepunt is.

a. Vind de verhouding tussen de precessie $\dot{\phi}$, de spin $\dot{\psi}$ en de nutatiehoek θ uitgedrukt in I_s en I onder stationaire bewegingsomstandigheden.

b. Toon aan dat de verhouding tussen de spin $\dot{\psi}$ en de hoeksnelheid om de symmetrieas $\omega_3 = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}$

$$\dot{\psi} = \frac{I - I_s}{I} \omega_3$$

is.

c. Pas het vorige resultaat toe op de berekening van de precessie en de spin van de aarde, met polair straal $R_p = 6\,356\,\text{km}$, equatoriaal straal $R_e = 6\,378\,\text{km}$, massa $m = 5.976 \cdot 10^{24}\,\text{kg}$, nutatiehoek $\theta = 0$ en hoeksnelheid $\omega_3 = 2\pi\,\text{rad/dag}$.

Hint: De traagheidsmomenten van een ellipsoïde met massa m en half-assen a_1, a_2 en a_3 zijn

$$I_1 = \frac{1}{5} m(a_2^2 + a_3^2) \quad I_2 = \frac{1}{5} m(a_1^2 + a_3^2) \quad I_3 = \frac{1}{5} m(a_1^2 + a_2^2)$$