Delft University of Technology **Faculty of Aerospace Engineering**

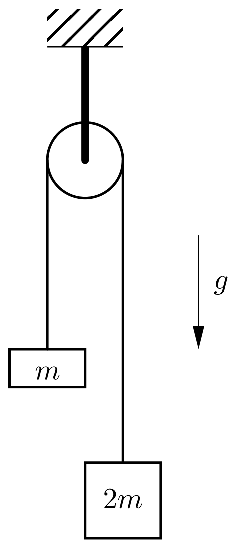
Dynamics and Stability AE3-914

March 27, 2008 9:00–12:00

There are 5 problems Dutch translation attached

Problem 1 (weight 2.5)

Consider the represented one-degree-of-freedom system of two particles with mass m and $2m$ connected by a string of length l. The dimensions and mass of the pulley are neglected and the string is unstretchable. Motion takes place in de vertical direction only and the acceleration of gravity is g. Obtain the equations of motion in the two following situations:



- **a**. By modelling the system by means of a single, convenient generalised coordinate.
- **b**. By modelling the motion of each particle by means of two different, convenient generalised coordinates, introducing a constraint and making use of the Lagrange multiplier method.

Problem 2 (weight 1.5)

Derive the expression of the kinetic energy for a rigid solid V with a fixed point O,

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{I}_O\, \boldsymbol{\omega},$$

where $\boldsymbol{\omega}$ is the angular velocity vector and $\mathbf{I}_O$ is the inertia tensor with respect to point O, departing from the generic expression of the kinetic energy

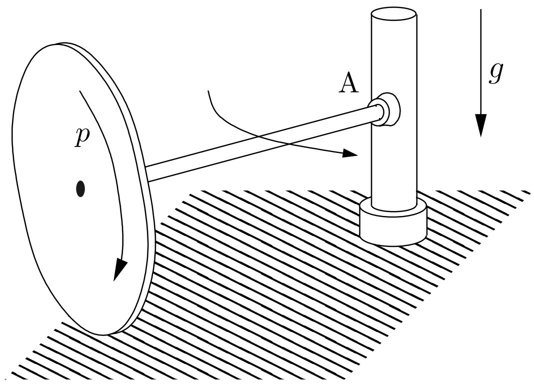
$$T = \frac{1}{2}\int_V \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\, dm,$$

where $\mathbf{v}$ is the velocity of an arbitrary point of the body .

Problem 3 (weight 1)

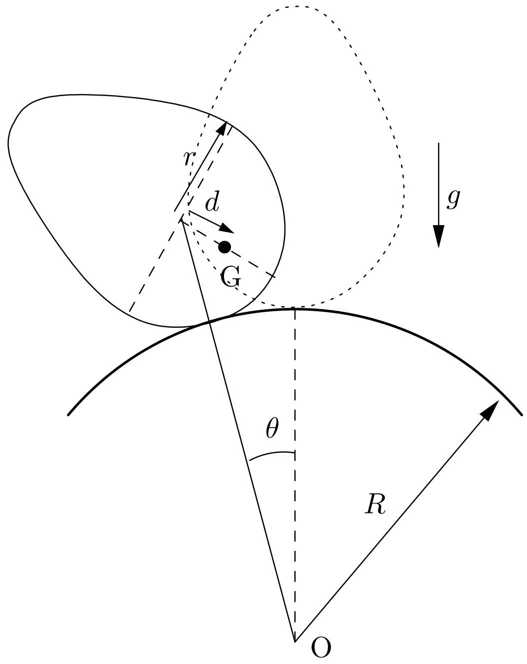
The represented homogeneous disc is rolling without slipping on a horizontal plane with angular speed p as shown. The connection at point A is a hinge.

Make use of free-body and kinetic diagrams, *without calculations,* to predict whether the vertical reaction at the contact point between the disc and the plane will be larger or smaller than the static reaction. *Answers without explanation will not be graded!*



Problem 4 (weight 2.5)

The represented Columbus Egg with mass m *rolls without slipping* on the spherical surface with radius R. The lower part of the egg is hemispherical with radius r. The mass centre G is located at a distance d below the centre of the hemisphere. The system is modelled as being two-dimensional and is described by the generalised coordinate θ. The acceleration of gravity is g.



a. Set up the potential energy of the system in terms of R, r, d, m, g and θ. Choose the zero level at the horizontal line through the centre O.

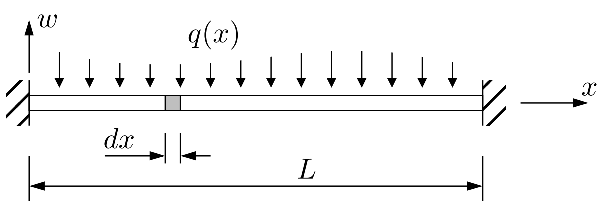
Consider now the particular case with $R = 0.042\,\text{m}$, $r = 0.021\,\text{m}$, $m = 0.05\,\text{kg}$ and $g = 10\,\text{m/s}^2$. This leads to the expression

$$V(\theta) = 0.5\,(0.063\cos\theta - d\cos 3\theta)$$

for the potential energy of the system (expressed in joule).

b. Calculate the admissible values of the distance d for which the position $\theta = 0$ (indicated by the dashed contour) furnishes a stable equilibrium configuration.

Problem 5 (weight 2.5)



The picture represents a flexible pipeline conveying aviation fuel. This results in a non-conservative distributed load $q(x) = cw_{xx}(x,t)$, with c a hydrodynamic constant depending on the fuel velocity. The rigidity of the pipeline is EI, the cross-sectional area is A and the density is ρ. Fixed supports are present at $x = 0$ and $x = L$.

a. Indicate whether a generalised potential density can be found for the given distributed load $q(x)$. If so, provide its expression. If not, explain how to proceed to incorporate the load in the model.

b. Set up the Lagrangian density for the pipeline (*Hint:* The elastic potential energy density for a beam in bending is $\mathcal{V}_e = \frac{1}{2}EIw_{xx}^2$).

c. Find the equation of motion for the deflection $w(x,t)$ of the pipeline making use of Hamilton's principle.

Technische Universiteit Delft **Faculteit Luchtvaart- en Ruimtevaarttechniek**

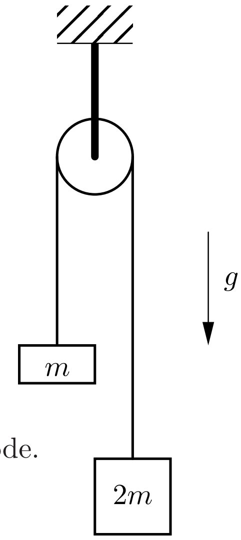
Dynamics and Stability AE3-914

27 maart 2008 **9:00–12:00**

Er zijn 5 opgaven

Opgave 1 (gewicht 2,5)

Beschouw het afgebeelde één-vrijheidsgraadsysteem van twee deeltjes met massa m en $2m$ verbonden door een koord met lengte l. De afmetingen en massa van de katrol mogen worden verwaarloosd en het koord is onrekbaar. De beweging vindt uitsluitend plaats in de verticale richting en de zwaartekrachtversnelling is g. Vind de bewegingsvergelijkingen in de volgende twee situaties:



a. Door het systeem te modelleren met een enkele, goed gekozen gegeneraliseerde coördinaat.

b. Door de beweging van elk deeltje met twee verschillende, goed gekozen gegeneraliseerde coördinaten te modelleren, tezamen met een nevenvoorwaarde en de Lagrange-multiplicatoren methode.

Opgave 2 (gewicht 1,5)

Leid de uitdrukking af voor de kinetische energie van een star lichaam V met een vast punt O,

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{I}_O \, \boldsymbol{\omega},$$

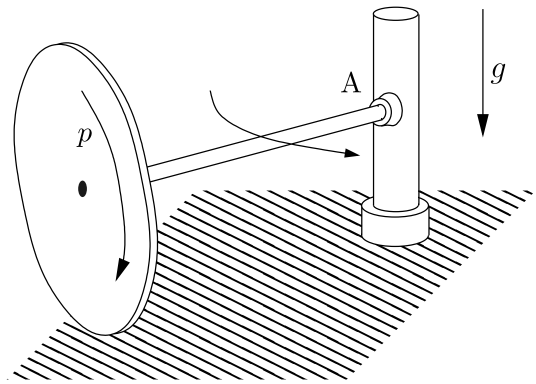
waarbij $\boldsymbol{\omega}$ de hoeksnelheidsvector is en $\mathbf{I}_O$ de massatraagheidstensor ten opzichte van punt O. Neem als uitgangspunt de algemene uitdrukking voor de kinetische energie

$$T = \frac{1}{2}\int_V \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\, dm,$$

waarbij $\mathbf{v}$ de snelheid van een willekeurig punt van het lichaam is.

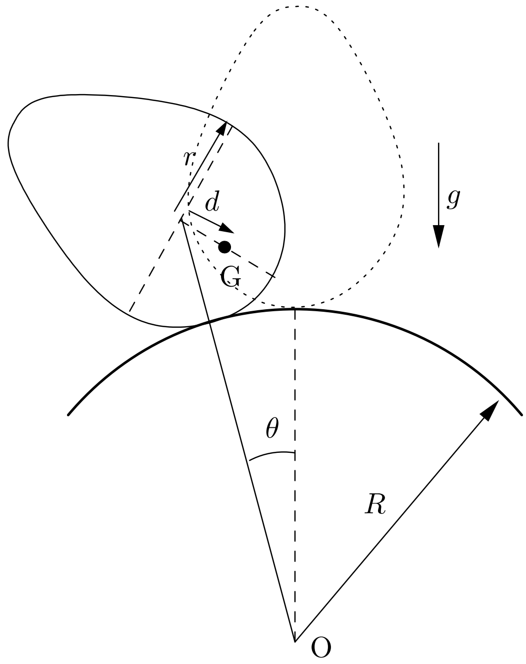
Opgave 3 (gewicht 1)

De afgebeelde homogene schijf rolt zonder te slippen met hoeksnelheid p op een horizontaal vlak zoals getoond in de figuur. De verbinding in A is een scharnier



Maak gebruik van vrijgemaakt lichaamdiagrammen en kinetische diagrammen (free-body and kinetic diagrams), *zonder berekeningen,* om te voorspellen of de verticale reactie in het contactpunt tussen schijf en vlak groter danwel kleiner is dan de statische reactie. *Antwoorden zonder motivatie worden niet gehonoreerd!*

Opgave 4 (gewicht 2,5)



Het afgebeelde Ei van Columbus met massa m rolt zonder te slippen op het sferische oppervlak met straal R. De onderkant van het ei is half-sferisch met straal r. Het zwaartepunt G bevindt zich op een afstand d onder de halfsfeer. Het systeem wordt gemodelleerd als twee-dimensioneel en wordt beschreven door de gegeneraliseerde coördinaat θ. De versnelling van de zwaartekracht is g.

a. Construeer de potentiële energie van het system, uitgedrukt in R, r, d, m, g en θ. Kies als nul-niveau de horizontale lijn door het middelpunt O.

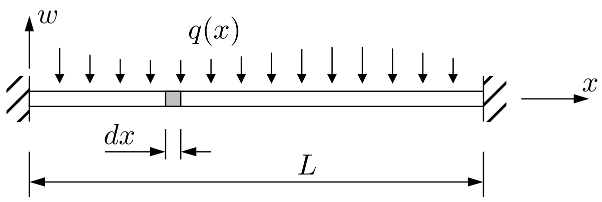
Beschouw het specifieke geval met $R = 0.042\,\text{m}$, $r = 0.021\,\text{m}$, $m = 0.05\,\text{kg}$ en $g = 10\,\text{m/s}^2$. Dit geeft de volgende vergelijking

$$V(\theta) = 0.5\,(0.063\cos\theta - d\cos 3\theta)$$

voor de potentiële energie (in joule).

b. Bereken de toelaatbare waarden voor de afstand d waarvoor de positie $\theta = 0$ (aangegeven met de streepjes contour) een stabiel evenwichtstoestand is.

Opgave 5 (weight 2,5)



De afbeelding geeft een flexibele pijplijn weer die luchtvaartbrandstof overbrengt. Dit leidt tot een niet-conservatieve verdeelde belasting $q(x) = cw_{xx}(x,t)$ waarbij c een hydrodynamisch coëfficiënt is die van de brandstofsnelheid afhangt. De stijfheid van de pijplijn is EI, de doorsnede is A en de dichtheid is ρ. Op $x = 0$ en $x = L$ worden inklemmingen gebruikt.

a. Geef aan of een gegeneraliseerd potentiaaldichtheid gevonden kan worden voor de gegeven verdeelde belasting $q(x)$. Zo ja, geef de uitdrukking aan. Zo niet, geef aan hoe men dient te handelen om de belasting in het model mee te nemen.

b. Formuleer de Lagrange-dichtheid voor de pijplijn (*Hint:* De elastische potentiële energie voor een staaf in buiging is $\mathcal{V}_e = \frac{1}{2}EIw_{xx}^2$).

c. Vind de bewegingsvergelijking voor de doorbuiging $w(x,t)$ van de pijplijn door middel van Hamilton's principe.