Dynamics and Stability AE3-914

November 1, 2004 19:00–22:00

Please use a new sheet for each problem.
The neatness of your work will be considered in the marking.
There are 5 problems and a Dutch translation has been included.

Problem 1 (weight 0,5)
Consider a Lagrangian system with one degree-of-freedom. Show that if the Lagrangian function does not depend on time explicitly, i.e.,

$$L = L(q, \dot{q}),$$

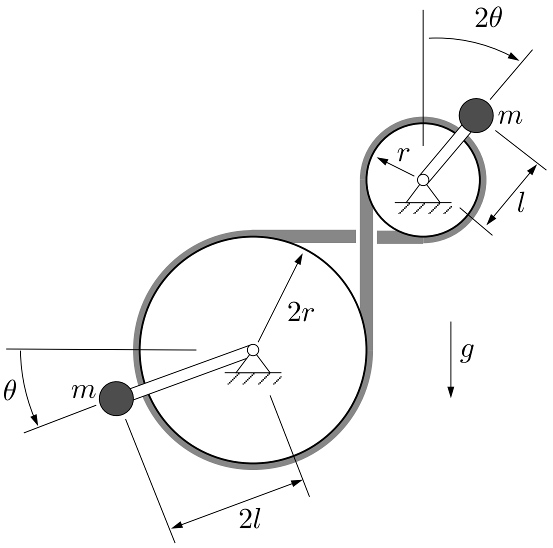
then the Jacobi energy integral

$$h(q, \dot{q}) = \dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L$$

is an integral of motion, i.e.,

$$h(q, \dot{q}) = C \quad \text{or equivalently} \quad \frac{dh(q, \dot{q})}{dt} = 0$$

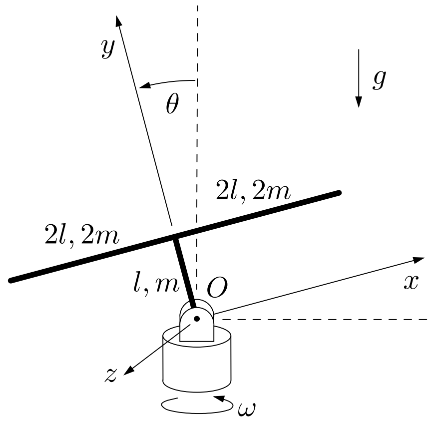
Problem 2 (weight 2,5)
Two particles with mass m are are attached to the represented homogeneous pulleys through two massless bars of length l and $2l$ respectively. The pulleys are connected by a belt as shown. No slipping can occur between pulleys and belt, so the system is described by a single generalised coordinate θ as shown. The particles do not collide for any value of θ and the acceleration of gravity is g.



a. Which *qualitative* condition must be satisfied by the potential energy of a system on a stable equilibrium configuration?

b. Determine the equilibrium configurations of the represented system and identify in each case whether the equilibrium is stable or unstable (*Hint:* There are four equilibrium configurations).

Problem 3 (weight 2,5)



The represented rigid assembly of bars is contained within the xy-plane and is free to rotate at pivot O about the z-axis, which motion is described by the generalised coordinate θ. The pivot is attached to a platform, which rotates at constant angular velocity ω. Dimensions and mass can be read from the figure and the acceleration of gravity is g.

a. Write the inertia tensor of the assembly with respect to point O about the represented xyz-axes, in terms of m and l.

b. Show that the kinetic energy of the system amounts to

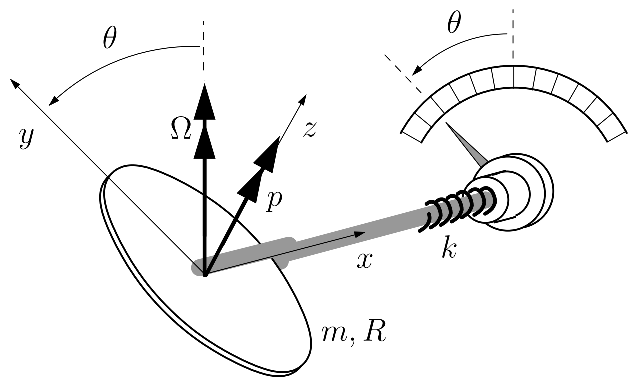
$$T = ml^2 \left[\frac{29}{6} \dot{\theta}^2 + \left(\frac{13}{6} + \frac{1}{2} \cos^2 \theta \right) \omega^2 \right].$$

Specify all the steps of your calculation.

c. Determine the Lagrangian and find the equation of motion.

d. Find the requirements on the angular velocity ω for the equilibrium position $\theta = 0$ to be stable, making use of any method of your choice.

Problem 4 (weight 1,5)



A schematic representation of a turn indicator is shown. The disc spins with constant rate p and is attached to a dial by means of a horizontal rod through a torsional spring with constant k. The spring is unstretched when $\theta = 0$, that is, when the xy-plane in which the disc is contained is vertical, which position corresponds to a straight flight path. When the aircraft initiates a turn with constant rate Ω, the disc abandons the vertical plane and adopts an equilibrium position quantified by the angle θ. The aircraft remains horizontal during the turn. The disc is homogeneous with mass m and radius R. *Only equilibrium positions of θ are considered.*

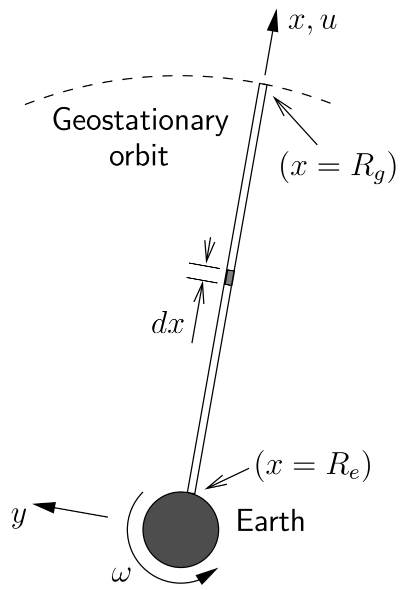
a. Which condition is satisfied by the angular accelerations $\dot{\omega}_1, \dot{\omega}_2, \dot{\omega}_3$ of a body spinning with angular velocity $\mathbf{p} = p\mathbf{k}$ when a generic rotation $\mathbf{\Omega} = \Omega_1\mathbf{i} + \Omega_2\mathbf{j} + \Omega_3\mathbf{k}$ is superposed? (The xyz-axes are attached to the body).

b. Identify the actual expression of all terms involved in Euler equations of motion for the particular turn with rate Ω considered in the statement. Neglect all terms including Ω^2 and solve for the rate of turn Ω as a function of the angle θ.

c. Find the rate of turn for a particular case with $m = 200\,\text{g}$, $R = 50\,\text{mm}$, $p = 1000\,\text{rad/s}$ and $k = 6,25 \times 10^{-3}\,\text{Nm}$, provided that the dial is indicating $\theta = 60°$.

Problem 5 (weight 3)

In his novel *The Fountains of Paradise,* Arthur C. Clarke describes the construction of a tower rising from the ground ($x = R_e$) to the geostationary orbit ($x = R_g$). Such a structure would be used to raise payloads to orbit using elevators rather than rockets. The rotating xy-axes shown are attached to the Earth and the tower. The tower has constant density ρ [kg/m^3] and cross-sectional area A [m^2]. The Earth rotates with constant rate ω and the acceleration of gravity depends on the x-coordinate according to the function $g(x) = k/x^2$. The centre of Earth is considered to be a fixed point.



a. Show that the total force (including actual and fictitious forces) applied to an infinitesimal element of the tower in the x-direction, as measured by an observer on the Earth-tower system, amounts to

$$dF(x) = \rho A \left(\omega^2 x - \frac{k}{x^2}\right) dx.$$

Specify all the steps of your calculation.

Let $u(x,t)$ represent the displacement from equilibrium of a point of the tower along the x-direction. The elasticity modulus of the tower is E [N/m^2]. Only small axial displacements of the tower are considered and the Earth is considered to be rigid. The observer is on the Earth-tower system.

b. Find the generalised potential dV_{gen} associated with the force dF found in the previous question.

c. Determine the Lagrangian dL for an infinitesimal element of the tower in terms of the displacement u and its derivatives (*Hint:* The elastic potential energy in an infinitesimal element of the tower is expressed in terms of the strain as $dV_{el} = \frac{1}{2}EA\varepsilon^2 dx$).

d. What is the boundary condition regarding the displacement $u(R_e, t)$? How is this kind of boundary condition called?

e. Consider a time interval $[t_a, t_b]$. Make use of Hamilton's principle to find the equation of motion of the displacement u and the boundary condition regarding $u(R_g, t)$. How is this kind of boundary condition called? (*Remark:* Notice that the boundary conditions regarding $u(x, t_a)$ and $u(x, t_b)$ are not asked for).

f. Considering that, according to the variational analysis carried out above, each point of the tower experiences a velocity $u_t(x, t)$ along the x-axis, calculate the additional fictitious force that would be applied to an infinitesimal element of the tower. Specify the direction and sense of this additional fictitious force.

Dynamics and Stability AE3-914

1 November 2004 19:00–22:00

Gebruik voor iedere opgave een nieuw blad a.u.b.
De netheid van presentatie wordt ook betrokken in de beoordeling.
Er zijn 5 opgaven.

Opgave 1 (gewicht 0,5)
Beschouw een Lagrange-systeem met één vrijheidsgraad. Toon aan dat als de Lagrangiaan niet expliciet afhangt van de tijd, d.w.z.,

$$L = L(q, \dot{q}),$$

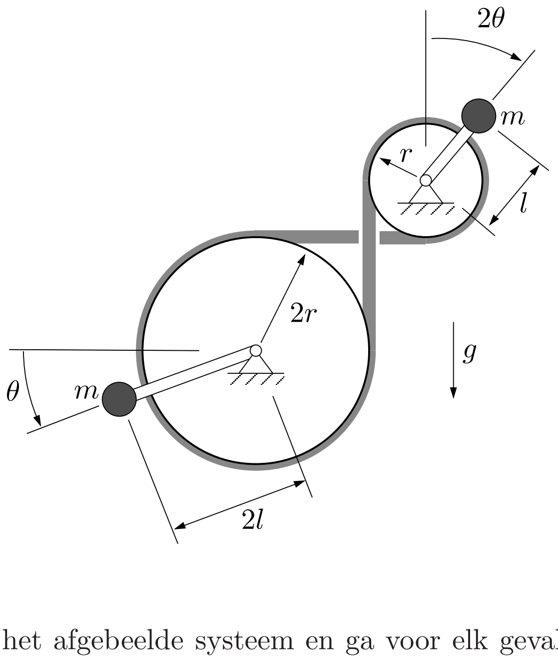
de Jacobi energie-integraal

$$h(q, \dot{q}) = \dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L$$

een constante is van de beweging, d.w.z.,

$$h(q, \dot{q}) = C \quad \text{dan wel} \quad \frac{dh(q, \dot{q})}{dt} = 0$$

Opgave 2 (gewicht 2,5)
Twee deeltjes met massa m zijn bevestigd aan de afgebeelde katrollen door middel van twee massaloze staven met lengte l and $2l$. De katrollen zijn verbonden door een snaar zoals weergegeven in de afbeelding. Er kan geen slip optreden tussen katrollen en snaar, waardoor het systeem beschreven kan worden door een enkele gegeneraliseerde coördinaat θ. De deeltjes kunnen niet met elkaar botsen en de versnelling van de zwaartekracht is g.

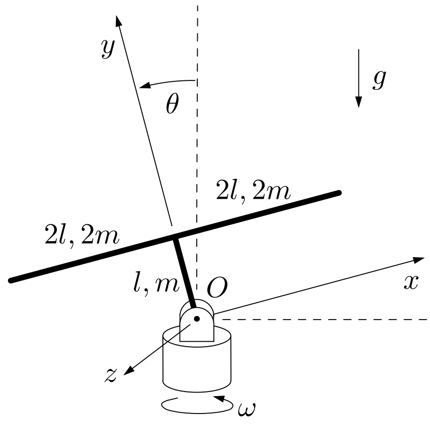


a. Aan welke *kwalitatieve* voorwaarde moet de potentiële energie van een systeem voldoen in een stabiel evenwichtsconfiguratie?

b. Bepaal de evenwichtsconfiguraties van het afgebeelde systeem en ga voor elk geval na of het evenwicht stabiel dan wel instabiel is (*Let op:* Er zijn vier evenwichtsconfiguraties).

Opgave 3 (gewicht 2,5)

De afgebeelde constructie bestaande uit twee gelaste staven bevindt zich in het xy-vlak en kan vrij roteren om de z-as bij de scharnier O, welke beweging beschreven wordt door middel van de gegeneraliseerde coördinaat θ. De scharnier is bevestigd op een platform dat roteert met constante hoeksnelheid ω. Afmetingen en massa kunnen uit het figuur gelezen worden en de versnelling van de zwaartekracht is g.



a. Schrijf de traagheidstensor van de constructie t.o.v. punt O om de afgebeelde xyz-assenstelsel, uitgedrukt in m en l.

b. Toon aan dat de kinetische energie van het systeem gegeven is door

$$T = ml^2 \left[\frac{29}{6}\dot{\theta}^2 + \left(\frac{13}{6} + \frac{1}{2}\cos^2\theta \right) \omega^2 \right].$$

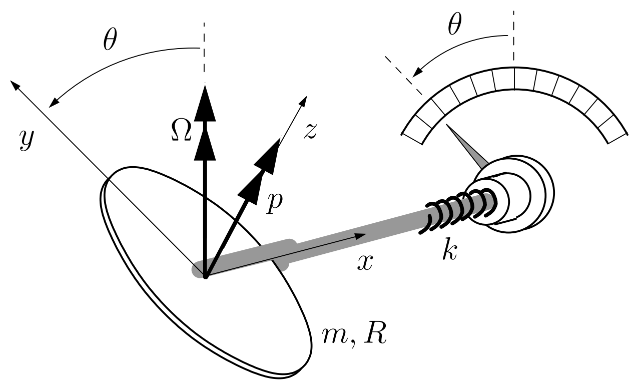
Beschrijf alle stappen van de berekening.

c. Bepaal de Lagrangiaan en vind de bewegingsvergelijkingen.

d. Vind de voorwaarden waaraan de hoeksnelheid ω dient te voldoen opdat de evenwichtspositie $\theta = 0$ stabiel is. Maak daarbij gebruik van uw voorkeursmethode.

Opgave 4 (gewicht 1,5)

Een schematische weergave van een bochtindicator is afgebeeld. De schijf spint met constante hoeksnelheid p en is bevestigd aan een wijzerplaat door middel van een horizontale staaf en een torsieveer met constante k. De veer is ontspannen voor $\theta = 0$, d.w.z., als het xy-vlak waarin de schijf zich bevindt verticaal is, welke positie aangenomen wordt tijdens een rechte vlucht. Als het vliegtuig een bocht inzet met constante hoeksnelheid Ω, dan verlaat de schijf het verticale vlak en neemt een nieuwe evenwichtspositie aan, welke gekwantificeerd wordt door de hoek θ. Het vliegtuig blijft horizontaal tijdens de bocht. De schijf is homogeen met massa m en straal R. *Er worden uitsluitend de evenwichtsposities van θ bestudeerd.*

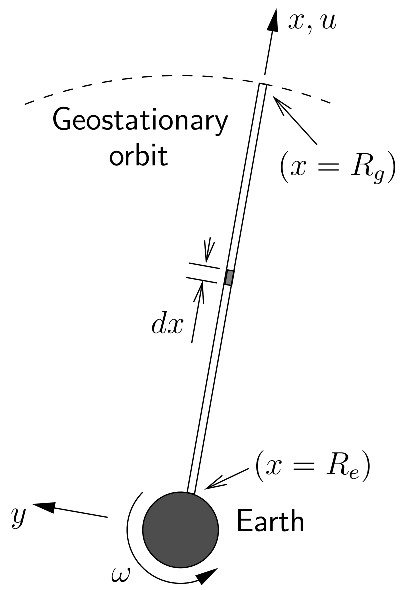


a. Aan welke voorwaarde voldoen de hoek versnellingen $\dot{\omega}_1, \dot{\omega}_2, \dot{\omega}_3$ van een lichaam dat spint met hoeksnelheid $\mathbf{p} = p\mathbf{k}$ als er een generieke rotatie $\boldsymbol{\Omega} = \Omega_1\mathbf{i} + \Omega_2\mathbf{j} + \Omega_3\mathbf{k}$ opgelegd wordt? (Het xyz-assenstelsel zit vast aan het lichaam).

b. Bepaal de werkelijke uitdrukking van alle termen in de Eulersvergelijkingen voor de bocht met hoeksnelheid Ω beschouwd in de opgave. Verwaarloos alle termen met Ω^2 en los voor Ω op als een functie van θ.

c. Bereken de hoeksnelheid van het vliegtuig in de bocht voor het bijzonder geval met $m = 200\,\text{g}$, $R = 50\,\text{mm}$, $p = 1000\,\text{rad/s}$ en $k = 6,25 \times 10^{-3}\,\text{Nm}$, als de wijzerplaat $\theta = 60^\circ$ aangeeft.

Opgave 5 (gewicht 3)



In zijn roman *The Fountains of Paradise,* beschrift Arthur C. Clarke de bouw van een toren van de grond ($x = R_e$) tot de geostationaire baan ($x = R_g$). Dergelijke constructie zou gebruikt worden om payloads in een baan om de Aarde te brengen met behulp van liften i.p.v. raketten. Het roterende xy-assenstelsel is bevestigd aan de Aarde en de toren. De toren heeft constante dichtheid ρ [kg/m^3] en doorsnede A [m^2]. De Aarde roteert met constante hoeksnelheid ω en de versnelling van de zwaartekracht is afhankelijk van de x-coördinaat volgens de functie $g(x) = k/x^2$. Het middelpunt van de Aarde wordt beschouwd als een vast punt.

a. Toon aan dat de totale kracht (inclusief werkelijke en fictieve krachten) op een infinitesimaal element van de toren in de x-richting, gezien door een waarnemer op het Aarde-toren systeem, gegeven wordt door

$$dF(x) = \rho A \left(\omega^2 x - \frac{k}{x^2} \right) dx.$$

Beschrijf alle stappen van de berekening.

Laat $u(x,t)$ de verplaatsing van een punt op de toren zijn ten opzichte van de evenwichtstoestand in de x-richting. De elasticiteitsmodulus van de toren is E [N/m^2]. Er worden uitsluitend kleine axiale verplaatsingen van de toren beschouwd en de Aarde wordt verondersteld oneindig stijf te zijn. De waarnemer bevindt zich steeds op het Aarde-toren systeem.

b. Vind de gegeneraliseerde potentiaal dV_{gen} die hoort bij de kracht dF gevonden in de vorige deelvraag.

c. Bepaal de Lagrangiaan dL voor een infinitesimaal element van de toren in termen van de verplaatsing u en zijn afgeleiden (*Hint:* De elastische potentiële energie in een infinitesimaal element van de toren kan worden uitgedrukt in termen van de rek als $dV_{el} = \frac{1}{2} E A \varepsilon^2 dx$).

d. Wat is de randvoorwaarde wat betreft de verplaatsing $u(R_e, t)$? Hoe heet dit soort randvoorwaarde?

e. Beschouw een tijdsinterval $[t_a, t_b]$. Vind de bewegingsvergelijkingen voor de verplaatsing u en de randvoorwaarde voor $u(R_g, t)$ door gebruik te maken van het principe van Hamilton. Hoe heet dit soort randvoorwaarde? (*Let op:* De randvoorwaarden voor $u(x, t_a)$ en $u(x, t_b)$ worden niet gevraagd).

f. Aangezien dat, volgens de vorige berekeningen, elk punt van de toren een snelheid $u_t(x,t)$ zal hebben langs de x-as, bereken de extra fictieve kracht die zou werken op een infinitesimaal element van de toren. Specificeer de richting en het teken van deze extra fictieve kracht.