



Introduction to Aerospace Engineering

Exams

English

Question 1 – Flight mechanics (30 points)

A subsonic jet aircraft is flying at sea level in the International Standard Atmosphere ($\rho_0 = 1.225 \text{ kg/m}^3$). It is assumed that **thrust is independent of the airspeed**. Data for this aircraft are given in Table 1.

Aircraft weight (W)	50 [kN]
Wing area (S)	20 [m ²]
Maximum lift coefficient ($C_{L\max}$)	1.35
Zero lift drag (C_{D0})	0.02
Aspect Ratio (A)	9
Oswald factor (e)	0.8
Maximum thrust at sea level (T_0)	10 [kN]
Parabolic lift drag polar	$C_D = C_{D_0} + \frac{C_L^2}{\pi A e}$

Table 1: Aircraft data

In horizontal steady flight, the equations of motion are $L = W$ and $T = D$.

- Calculate the minimum airspeed in horizontal steady flight
- Calculate the minimum drag (D_{\min}) of this aircraft by taking the following steps. First derive for which ratio of $(C_L^x/C_D^y)_{\max}$ minimum drag is achieved. Then derive which value of C_L actually maximizes the ratio C_L^x/C_D^y . Third, show that this corresponds with an airspeed equal to 78 m/s. Finally calculate the value of minimum drag.

The pilot decides to perform a steep **steady, straight and symmetric climb** at the **maximum achievable climb angle** γ to avoid flying into a region of mountains in the distance.

- Draw the Free Body Diagram (FBD) and the Kinetic Diagram (KD) visualizing all forces and accelerations that act on the aircraft for this flight condition. Draw the aircraft with a certain pitch angle θ , flight path angle γ and angle of attack α . Also indicate the direction of the velocity vector. The thrust can be assumed in the direction of the velocity vector ($\alpha_T = 0$)
- Derive the corresponding equations of motion for this flight condition using the FBD and KD. Clearly state the assumptions that you make (if any).
- Based on these equations of motion, calculate the maximum climb angle γ that can be achieved in this steady, straight and symmetric climb

Nederlands

Vraag 1 – Vliegmechanica (30 punten)

Een subsoon straalvliegtuig vliegt op zeeniveau in de internationale standaard atmosfeer ($\rho_0 = 1,225 \text{ kg/m}^3$). Er kan worden aangenomen dat de **stuwkracht onafhankelijk is van de vliegsnelheid**. Data voor dit vliegtuig is gegeven in tabel 1.

Vliegtuig gewicht (W)	50 [kN]
Vleugel oppervlak (S)	20 [m ²]
Maximale lift coëfficiënt ($C_{L\max}$)	1,35
Zero lift weerstandscoëfficiënt (C_{D0})	0.02
Aspect Ratio (A)	9
Oswald factor (e)	0.8
Maximale stuwkracht op zee niveau (T_0)	10 [kN]
Parabolische vliegtuigkarakteristiek	$C_D = C_{D_0} + \frac{C_L^2}{\pi A e}$

Table 1: Aircraft data

De bewegingsvergelijkingen in de horizontale stationaire vlucht zijn: $L = W$ en $T = D$.

- Bereken de minimale vliegsnelheid in de horizontale stationaire vlucht
- Bereken de minimale weerstand (D_{\min}) van dit vliegtuig met de volgende stappen. Ten eerste, leid af voor welke verhouding van $(C_L^x/C_D^y)_{\max}$ minimale weerstand wordt bereikt. Leid vervolgens af voor welke waarde van C_L de verhouding C_L^x/C_D^y gemaximaliseerd wordt. Ten derde, laat zien dat dit overeen komt met een vliegsnelheid van 78 m/s. Tot slot, bereken de minimale weerstand.

De piloot besluit om een steile **stationaire, rechtlijnige en symmetrische klimvlucht** uit te voeren met de **maximale baanhoek** γ om er zeker van te zijn dat een gebied met bergen in de verte wordt vermeden.

- Teken het 'Free Body Diagram' (FBD) en het kinetische diagram (KD) met daarin alle krachten en acceleraties op/van dit vliegtuig voor deze vliegconditie. Teken het vliegtuig met een standhoek θ , baanhoek γ en invalshoek α . Geef ook de richting van de vliegsnelheidsvector duidelijk aan. Er kan worden aangenomen dat de stuwkracht in de richting van de vliegsnelheidsvector werkt. ($\alpha_T = 0$)
- Leid de bijbehorende bewegingsvergelijkingen af voor deze vliegconditie aan de hand van het FBD en KD. Als je aannames maakt, geef deze dan duidelijk aan.
- Aan de hand van de bewegingsvergelijkingen, bereken de maximale baanhoek γ in deze stationaire rechtlijnige vlucht.

Answers:

Question a. (4 points)

$$L = W$$

$$C_L \frac{1}{2} \rho V^2 S = W$$

$$V = \sqrt{\frac{W}{S} \frac{2}{\rho} \frac{1}{C_L}}$$

(2 points)

The minimum airspeed can be obtained when the lift coefficient is maximal because air density, wing surface area and aircraft weight are all constants.

$$V_{\min} = \sqrt{\frac{W}{S} \frac{2}{\rho} \frac{1}{C_{L,\max}}} = \sqrt{\frac{50000}{20} \frac{2}{1.225} \frac{1}{1.35}} = 55 \text{ [m/s]}$$

(2 points)

Note:

A calculation error is acceptable if the corresponding result looks reasonable. So if one finds that the minimum airspeed equals Mach 2 then the student should realize that a mistake is made.

Question b. (10 points)

Step 1: condition for minimum drag (2 points)

$$L = W$$

$$D = D \frac{L}{L} = \frac{D}{L} W = \frac{C_D}{C_L} W$$

$$\left(\begin{array}{l} L = C_L \frac{1}{2} \rho V^2 S \\ D = C_D \frac{1}{2} \rho V^2 S \end{array} \right)$$

So minimum drag is obtained at maximum C_L / C_D

Step 2: Calculation of corresponding C_L (3 points)

$$\frac{d}{dC_L} \left(\frac{C_L}{C_D} \right) = 0 \quad \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{g(x)}{h(x)} \right) = \frac{hg' - gh'}{h^2} \right)$$

$$\frac{C_D \cdot 1 - C_L \cdot \frac{dC_D}{dC_L}}{C_D^2} = 0$$

$$\frac{dC_D}{dC_L} = \frac{C_D}{C_L}$$

$$\frac{2C_L}{\pi A e} = \frac{C_{D_0} + \frac{C_L^2}{\pi A e}}{C_L}$$

$$C_L = \sqrt{C_{D_0} \pi A e} = \sqrt{0.02 \cdot \pi \cdot 9 \cdot 0.8} = 0.67$$

Step 3: Corresponding airspeed (2 point)

$$V = \sqrt{\frac{W}{S} \frac{2}{\rho} \frac{1}{C_L}} = \sqrt{\frac{50000}{20} \frac{2}{1.225} \frac{1}{0.67}} = 78 \text{ [m/s]}$$

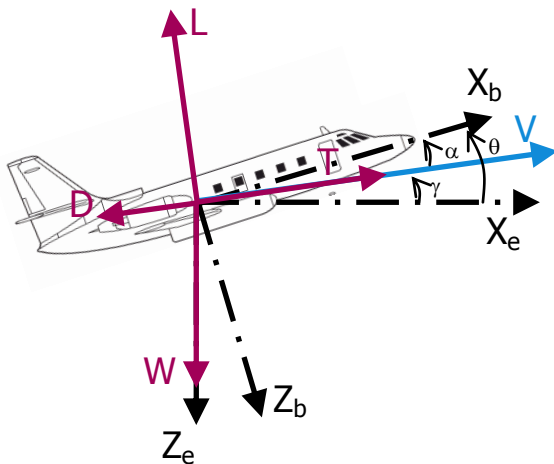
Step 4: Calculation of minimum drag (3 points)

$$C_D = C_{D_0} + \frac{C_L^2}{\pi A e} = 0.02 + \frac{0.67^2}{\pi \cdot 9 \cdot 0.8} = 0.04$$

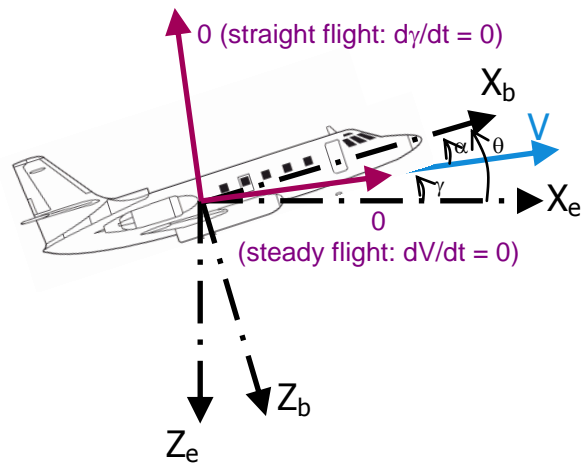
$$D = \frac{C_D}{C_L} W = \frac{0.04}{0.67} 50000 = 2985 \text{ [N]}$$

Question c. (8 points)

FBD (5 points)



KD (3 points)



Note: 1 point is deducted for each mistake

Question d. (4 points)

$$\sum F_{//V} : 0 = T - D - W \sin \gamma$$

$$\sum F_{\perp V} : 0 = L - W \cos \gamma$$

The flight path angle can be assumed small but nonzero therefore $\cos \gamma = 1$
(however $\sin \gamma \neq 0$)

$$T - D - W \sin \gamma = 0$$

$$L = W$$

2 points are awarded for each correct derivation of an equation of motion

Question e. (4 points)

$$T - D - W \sin \gamma = 0$$

$$\sin \gamma = \frac{T - D}{W}$$

The thrust is independent of airspeed and the aircraft weight is constant. The maximum climb angle will therefore be achieved at the airspeed for minimum drag with maximum thrust.

$$\gamma_{\max} = \sin^{-1} \left(\frac{T_{\max} - D_{\min}}{W} \right) = \sin^{-1} \left(\frac{10000 - 2895}{50000} \right) = 8^\circ$$