Introduction to Aerospace Engineering

Exams

English

Question 1 – Flight mechanics (30 points)
A glider is flying at 2,000 m altitude in the International Standard Atmosphere (ρ_0 = 1.0065 kg/m^3). Data for this glider are given in Table 1.

Aircraft weight (W)	4000 [N]
Wing area (S)	10 [m^2]
Maximum lift coefficient (C_{Lmax})	1.5
Zero lift drag (C_{D0})	0.012
Factor k	0.02
Parabolic lift drag polar	$C_D = C_{D_0} + kC_L^2$

Table 1: Aircraft data

Figure 1: Glider

The glider is performing a **steady straight descending flight**.

a. Draw the Free Body Diagram (FBD) and the Kinetic Diagram (KD) visualizing all forces and accelerations that act on the aircraft for this particular flight condition. Draw the aircraft with a certain pitch angle θ, flight path angle γ and angle of attack α. Also indicate the direction of the velocity vector.
b. Derive the corresponding equations of motion for this flight condition using the FBD and KD. Clearly state the assumptions that you make (if any).

Normally speaking, gliders can climb in pockets of warm rising air, called thermals. Unfortunately there are no thermals present in the area. Nevertheless, the pilot really enjoys flying and would therefore like to stay in the air for as long as possible. The pilot therefore decides to descend at the **minimum rate of descent**.

c. Based on the equations of motion, prove that the minimum rate of descent in gliding flight is obtained at the minimum power required condition
d. Calculate the minimum power required ($P_{r,min)}$ of this aircraft by taking the following steps. First derive for which ratio of $(C_L^x/C_D^y)_{max}$ minimum power required is achieved. Then derive which value of C_L actually maximizes the ratio C_L^x/C_D^y. Third, show that this corresponds with an airspeed equal to 24 m/s. Finally calculate the value of minimum power required.
e. Calculate the minimum rate of descent in this steady straight gliding flight.
f. Will the minimum rate of descent increase, decrease or remain the same when the aircraft flies at a lower altitude? Give a clear explanation with your answer.

Nederlands

Vraag 1 – Vliegmechanica (30 punten)

Een zweefvliegtuig vliegt op 2000 m hoogte in de internationale standaard atmosfeer (ρ_0 = 1,0065 kg/m^3). Gegevens voor dit zweefvliegtuig zijn samengevat in tabel 1.

Vliegtuig gewicht (W)	4000 [N]
Vleugel oppervlak (S)	10 [m^2]
Maximale lift coëfficiënt (C_{Lmax})	1,5
Parasitaire weerstandscoëfficiënt (C_{D0})	0,012
Factor k	0,02
Parabolische vliegtuigkarakteristiek	$C_D = C_{D_0} + kC_L^2$

Tabel 1: Vliegtuig gegevens

Figuure 1: Zweefvliegtuig

Het zweefvliegtuig voert een **stationaire rechtlijnige daalvlucht** uit.

a. Teken het ‘Free Body Diagram’ (FBD) en het Kinetisch Diagram (KD) met daarin alle krachten en versnellingen die werken op het vliegtuig voor deze vliegtoestand. Teken het vliegtuig met een standhoek θ, baanhoek γen invalshoek α. Teken ook de richting van de vliegsnelheidvector.

b. Leid de bewegingsvergelijkingen af voor deze vliegtoestand, gebruik makend van het FBD en KD. Geef hierbij duidelijk aan welke aannames je maakt.

Normaal gesproken kunnen zweefvliegtuigen klimmen in warme stijgende lucht, ook wel thermiek genoemd. Helaas is er geen thermiek. De piloot wil toch graag zo lang mogelijk in de lucht blijven om te genieten van de vlucht. Daarom besluit de piloot om te dalen bij de **minimale daalsnelheid**.

c. Laat zien, m.b.v. de bewegingsvergelijkingen dat de minimale daalsnelheid (rate of descent) in de glijvlucht wordt behaald bij de conditie voor minimaal benodigd vermogen.

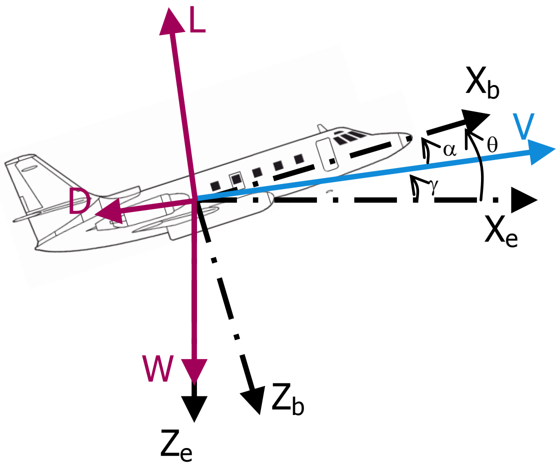
d. Bereken het minimale benodigde vermogen ($P_{r,min)}$ van dit vliegtuig met de volgende stappen. Leid eerst af voor welke verhouding van $(C_L^x/C_D^y)_{max}$ minimaal benodigd vermogen wordt behaald. Leid vervolgens af welke waarde van C_L de verhouding C_L^x/C_D^y maximaliseert. Laat dan zien dat dit overeen komt met een vliegsnelheid van 24 m/s. Tot slot, bereken het minimale benodigde vermogen.

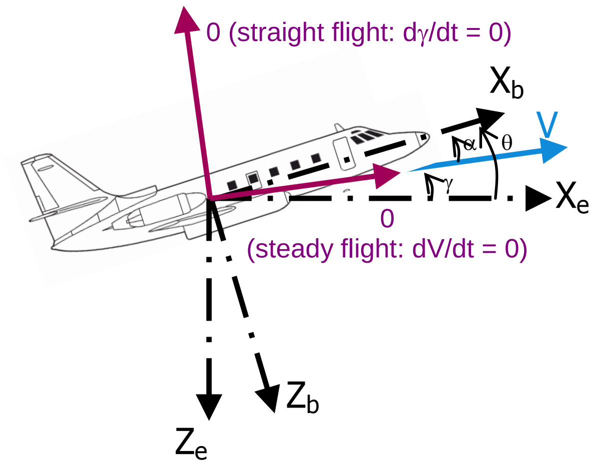
e. Bereken de minimale daalsnelheid in deze stationaire, rechtlijnige daalvlucht.

f. Zal de minimale daalsnelheid toenemen, afnemen of gelijk blijven op een lagere hoogte. Geef een duidelijke uitleg bij je antwoord.

Answers:
Question a.

FBD KD





Note: 1 point is deducted for each mistake

Question b

$$\sum F_{//V} : 0 = -D - W \sin\gamma$$
$$\sum F_{\perp V} : 0 = L - W \cos\gamma$$

The flight path angle can be assumed small but nonzero therefore cos $\gamma = 1$ (however, sin $\gamma \neq 0$)

$$-D - W\sin\gamma = 0$$
$$L = W$$

2 points are awarded for each correct derivation of an equation of motion

Question c.

$$-DV - WV\sin\gamma = 0$$
$$V\sin\gamma = \frac{-DV}{W} = -\frac{P_r}{W}$$
$$RD = -V\sin\gamma = \frac{P_r}{W}$$

So, to obtain a minimum rate of descent, power required should be minimum

Question d

$$P_r = DV = \frac{C_D}{C_L} W \sqrt{\frac{W}{S}\frac{2}{\rho}\frac{1}{C_L}} = \sqrt{\frac{W^3}{S}\frac{2}{\rho}\frac{C_D^2}{C_L^3}}$$

So, to minimize P_r one should find the maximum ratio of C_L^3 / C_D^2

$$\frac{d}{dC_L}\left(\frac{C_L^3}{C_D^2}\right)=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{g(x)}{h(x)}\right)=\frac{hg'-gh'}{h^2}$$

$$\frac{C_D^2\cdot 3C_L^2-C_L^3\cdot 2C_D\,\dfrac{dC_D}{dC_L}}{C_D^4}=0$$

$$\frac{dC_D}{dC_L}=\frac{3}{2}\frac{C_D}{C_L}$$

$$2kC_L=\tfrac{3}{2}\frac{C_{D_0}+kC_L^2}{C_L}$$

$$\tfrac{1}{2}kC_L^2=\tfrac{3}{2}C_{D_0}$$

$$C_L=\sqrt{3\frac{C_{D_0}}{k}}=\sqrt{3\frac{0.012}{0.02}}=1.34$$

So the pilot should fly at C_L = 1.34.

The corresponding airspeed can be obtained from the L = W relation.

$$L=W$$

$$V=\sqrt{\frac{W}{S}\frac{2}{\rho}\frac{1}{C_L}}=\sqrt{\frac{4000}{10}\frac{2}{1.0065}\frac{1}{1.34}}=24.4\text{ m/s}$$

The power required can also be calculated

$$C_D=C_{D_0}+kC_L^2=0.012+0.02\cdot 1.34^2=0.048$$

$$P_{r,\min}=DV=\sqrt{\frac{W^3}{S}\frac{2}{\rho}\frac{C_D^2}{C_L^3}}=\sqrt{\frac{4000^3}{10}\frac{2}{1.0065}\frac{C_D^2}{C_L^3}}=3490\text{ J/s}$$

<u>Question e.</u>
Finally, the minimum rate of descent can be calculated

$$RD=\frac{P_{r,\min}}{W}=\frac{3490}{4000}=0.87\text{ m/s}$$

<u>Question f</u>

$$RD=\frac{P_r}{W}=\sqrt{\frac{W}{S}\frac{2}{\rho}\frac{C_D^2}{C_L^3}}$$

So, clearly the air density is in the equation whilst all other parameters remain the same. The air density **increases** at a lower altitude and thus the rate of descent **decreases**