

7. Geohydrologie

7.1 Inleiding

Een gedeelte van het water dat infiltreert aan het oppervlak van de aarde stroomt langzaam als grondwater door de ondergrond naar rivieren, meren en zeeën. Zoet grondwater is de belangrijkste bron voor drink- en irrigatiewater op aarde; op vele plekken in de wereld is het zelfs de enige zoetwaterbron. Grondwater wordt opgepompt uit putten met een diepte van enkele meters tot honderden meters. De zoete grondwatervoorraden lopen gevaar doordat er te veel onttrokken wordt en/of doordat het bevuild raakt met chemicaliën die aan het maaiveld gebruikt worden en naar het grondwater sijpelen. Inzicht in de stroming van grondwater is daarom cruciaal om duurzaam gebruik van het grondwater mogelijk te maken. Daarnaast speelt grondwater een belangrijke rol in de hydrologische cyclus. Grondwater zorgt er voor dat rivieren blijven stromen ook als het een tijdje niet geregend heeft; in vele gebieden is de ondiepe grondwaterspiegel de redding voor bomen en gewassen in tijden dat het lang niet regent.

Het vakgebied van de grondwaterstroming wordt de geohydrologie genoemd. De basisprincipes van de grondwaterstroming door poreuze media zoals zand, leem en klei worden hier besproken. Gedetailleerde colleges in de geohydrologie worden gegeven in de Masters opleiding Water Management (vakken Geohydrologie I en II). Vergeleken met andere deelgebieden van de hydrologie, zijn de wiskundige vergelijkingen die stroming in de ondergrond beschrijven goed bekend. Dat wil echter nog niet zeggen dat het gemakkelijk is om goede voorspellingen te doen over de grondwaterstroming, omdat zowel de opbouw van de ondergrond als de instroming en uitstroming van grondwater aan het oppervlak (vrij) onbekend zijn. Daarnaast is het meten van de grondwaterstroming vrijwel onmogelijk; alleen waterdrukken in de ondergrond kunnen redelijk nauwkeurig gemeten worden. Als echter verondersteld wordt dat de ondergrond homogeen is en de instroming gelijkmatig verdeeld is, dan is het mogelijk om exacte oplossingen af te leiden voor een groot aantal stromingsproblemen. Deze exacte oplossingen zijn zeer waardevol omdat ze een goed inzicht geven in hoe grondwater stroomt.

7.2 Korte geschiedenis

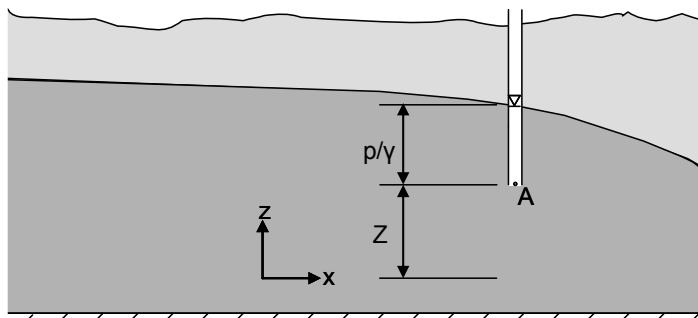
Aan de basis van de grondwaterstroming ligt de wet van Darcy, vernoemd naar de Fransman Henry Darcy, die in het midden van de negentiende eeuw een aantal experimenten uitvoerde waarmee hij aantoonde dat er een lineaire relatie bestaat tussen het debiet door een grondmonster en het waterstandsverschil over het grondmonster (Darcy, 1856). In het practicum bij het college Grondmechanica 2 (CT2091) voeren studenten zelf het Darcy experiment uit om de doorlatendheid van een zandmonster te meten. Een tijdgenoot van Darcy, Jules Dupuit, kwam tot het inzicht dat grondwater in goeddoorlatende lagen meestal voornamelijk horizontaal stroomt: grondwater legt vaak kilometers af in horizontale richting tegen slechts tientallen meters in verticale richting (Dupuit, 1863). Zodoende kan grondwaterstroming vaak beschreven worden als een tweedimensionaal probleem. Eind negentiende eeuw liet Philipp Forchheimer zien dat stationaire grondwaterstroming in een enkele laag met een eenvoudige differentiaalvergelijking beschreven kan worden: de vergelijking van Laplace (Forchheimer, 1886). Dat zal ook in dit college gedaan worden. Als de grondwaterstroming ook met de tijd verandert, spreekt men van tijdsafhankelijke grondwaterstroming. Als het regent, bijvoorbeeld, zal de grondwaterstand langzaam stijgen en nadat het gestopt is met regenen zal de grondwaterstand weer langzaam zakken. De ondergrond kan dus grondwater bergen. De berging kan optreden doordat de grondwaterspiegel omhoog gaat, zoals door Boussinesq (1904) werd beschreven, maar ook door elastische uitzetting van de ondergrond (Meinzer, 1928). Ook veel Nederlanders hebben bijdragen

geleverd in de geohydrologie. Zo zullen er in dit college formules behandeld worden van Hooghoudt (1940), Mazure (1936) en Edelman (1947).

7.3 Stijghoogte en de wet van Darcy

In het grondwater is eigenlijk alleen de stijghoogte redelijk goed te meten. De stijghoogte is de hoogte waarop water in een peilbuis staat. Een peilbuis is een holle buis die aan het eind open is; een peilbuis wordt in de grond geplaatst, meestal door eerst een gat in de grond te boren. In het Engels heet de stijghoogte "hydraulic head" hoewel ook "piezometric head" nog gebruikt wordt. De stijghoogte h wordt gemeten t.o.v. een referentieniveau, in Nederland t.o.v. N.A.P, en kan geschreven worden als de volgende som (Figuur 7.1).

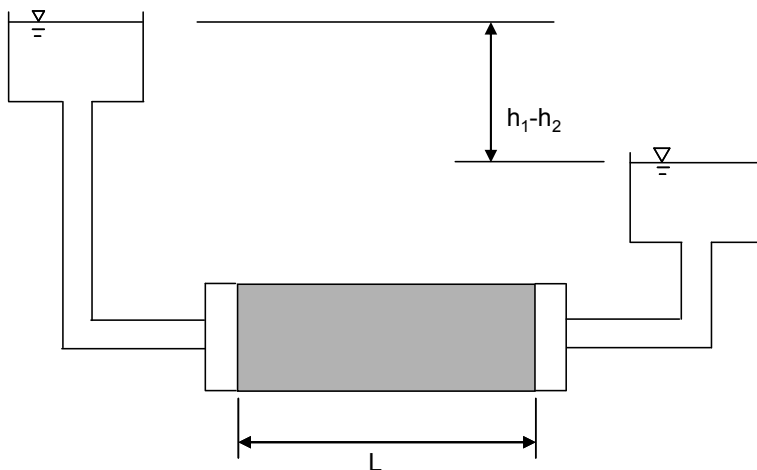
$$h = \frac{p}{\gamma} + Z \quad [L] \quad [7.1]$$



Figuur 7.1 - Stijghoogte meting op punt A met een peilbuis

waar p de druk is t.o.v. de atmosferische druk, γ het soortelijk gewicht van water en Z de hoogte t.o.v. een referentieniveau, bijvoorbeeld N.A.P.. Alle drie de termen in [7.1] hebben de dimensie lengte. p/γ wordt de drukhoogte genoemd en Z de plaatshoogte.

Grondwater stroomt van hoge naar lage stijghoogte. Darcy (1856) toonde met behulp van experimenten aan dat de grondwaterstroming proportioneel is met het stijghoogteverval of in wiskundige termen met de gradiënt van de stijghoogte. De opstelling van Darcy wordt getoond in Figuur 7.2. Een cilinder is gevuld met bodemmateriaal (zand, bijvoorbeeld). Elk uiteinde van de cilinder is met een slangetje verbonden aan een reservoir. Water zal nu gaan stromen van het reservoir met de hogere waterstand naar het reservoir met de lagere. Darcy toonde aan dat het debiet Q [L^3T^{-1}] door de cilinder met grond evenredig is met het stijghoogteverschil h_1-h_2 tussen de twee reservoirs en met de oppervlakte van de cilinder A [L^2], en omgekeerd evenredig met de lengte van de cilinder



Figuur 7.2 - De opstelling van Darcy

$$Q = kA \frac{h_1 - h_2}{L} \quad [L^3T^{-1}] \quad [7.2]$$

De evenredigheidsconstante k [L/T] wordt de doorlatendheid genoemd (Engels: hydraulic conductivity). Vergelijking [7.2] kan gebruikt worden voor stroming door een column, maar voor stroming door de ondergrond wordt gewerkt met het specifiek debiet, q , het debiet per oppervlakte. Daar er in de ondergrond drie stromingsrichtingen zijn, is het specifieke debiet een vector

$$\vec{q} = -k \vec{\nabla} h \quad [L^2T^{-1}] \quad [7.3]$$

Waar $\vec{\nabla} = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ de gradiënt vector is. De componenten van \vec{q} in de x , y en z richting kunnen ook geschreven worden als

$$q_x = -k \frac{\partial h}{\partial x}, \quad q_y = -k \frac{\partial h}{\partial y}, \quad q_z = -k \frac{\partial h}{\partial z} \quad [LT^{-1}] \quad [7.4]$$

Vergelijking [7.4] is de wet van Darcy, hoewel het eigenlijk een empirische formule is die de stijghoogtegradient relateert aan de specifieke debietsvector.

De ondergrond is over het algemeen anisotroop. Dit komt doordat de ondergrond in Nederland door sedimentaire processen is ontstaan en dus bestaat uit vele laagjes van iets grover en iets fijner materiaal, zodat de gemiddelde waarde in de horizontale richting groter is dan de gemiddelde waarde in de verticale richting. In de praktijk wordt de verticale doorlatendheid vaak tien keer zo klein gekozen als de horizontale doorlatendheid, hoewel daar geen fundamentele basis voor is.

De doorlatendheid van de ondergrond kan gemeten worden met een Darcy apparaat zoals te zien is in Figuur 7.2. Daarvoor moet een ongestoord monster uit de ondergrond gestoken worden, hetgeen niet eenvoudig is. Daarnaast dient rekening gehouden te worden met het feit dat de ondergrond altijd enigszins (en soms ook behoorlijk) heterogeen is, zodat de doorlatendheid van punt tot punt kan variëren. Het is daarom beter een gemiddelde waarde van de doorlatendheid in

het veld te meten, bijvoorbeeld met een slugtest of een pompproef. De doorlatendheid wordt meestal uitgedrukt in meters per dag. Representatieve waarden voor de doorlatendheid zijn gegeven in Tabel 7.1.

Tabel 7.1- Representatieve waarden voor doorlatendheid van verschillende grondsoorten

Materiaal	k (m/dag)
Klei	< 0.0001
Zanderige klei	0.0001 – 0.001
Veen	0.0001 – 0.01
Silt	0.001 – 0.01
Heel fijn zand	0.1 – 1
Fijn zand	1 – 10
Grof zand	10 – 100
Zand met grind	100 – 1000
Grind	> 1000

Hoewel het specifiek debiet de dimensies heeft van een snelheid, is het geen snelheid. Het specifiek debiet is het volume water dat per tijdseenheid door een eenheidsoppervlak van de ondergrond stroomt. De ondergrond bestaat echter slechts voor een klein deel uit poriën; de fractie poriën wordt de porositeit n genoemd.

$$n = \frac{V_p}{V_t} \quad [-] \quad [7.5]$$

waarbij V_p het poriënvolume is en V_t het totale volume van de grond. De porositeit ligt doorgaans ergens tussen de 0.1 en 0.35. Er wordt vaak gerekend met 0.3 (dan bestaat 30% van de ondergrond uit poriën). De gemiddelde snelheid \vec{v} van het grondwater kan nu verkregen worden door het specifiek debiet te delen door de porositeit

$$\vec{v} = \frac{\vec{q}}{n} \quad [LT^{-1}] \quad [7.6]$$

Grondwater stroomt langzaam. Een redelijke waarde voor het stijghoogte verval is 1 à 2 meter per 1000 meter. Een gradiënt van 0.002 in een zand met doorlatendheid van 10 m/d and een porositeit van 0.3 geeft een gemiddelde snelheid van minder dan 7 cm/d.

7.4 Aquifers en aquitards

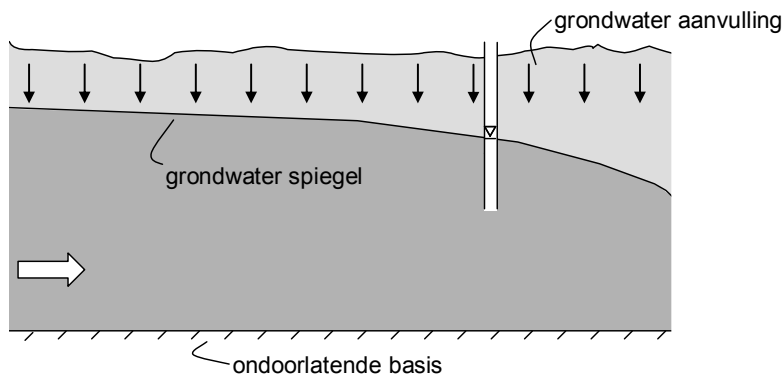
De ondergrond kan opgedeeld worden in lagen die goed doorlatend zijn en lagen die slecht doorlatend zijn. De goeddoorlatende lagen worden aangeduid met het Engelse woord aquifer, of met het Nederlandse woord watervoerend pakket of gewoonweg pakket, en bestaan voornamelijk uit zand en grind. Tussen de aquifers zitten slechtdoorlatende lagen die aangeduid worden als weerstandslagen, leklagen of aquitards en bestaan bijvoorbeeld uit klei.

De ondergrond is opgebouwd uit een afwisseling van min of meer horizontale aquifers en aquitards.

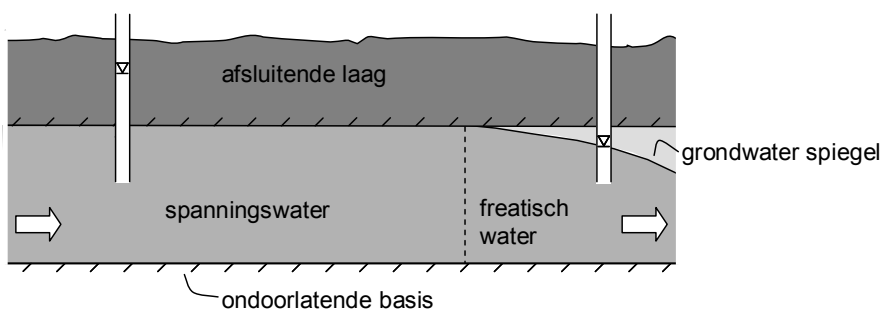
Het spreekt vanzelf dat als er een put geslagen moet worden om water te onttrekken, het putscherm in een aquifer geplaatst moet worden. De diepte van een laag, de dikte en de

horizontale verbreiding kan sterk variëren op grotere schaal. Op kleinere schaal kunnen vaak redelijke schattingen gemaakt worden door met horizontale lagen van constante dikte te rekenen.

Er zijn drie soorten aquifers: freatische aquifers (Engels: unconfined aquifers), afgesloten aquifers (Engels: confined aquifers) en semi-afgesloten aquifers (Engels: semi-confined aquifers). Het bovenste gedeelte van een freatische aquifer is niet verzadigd met water en heet de onverzadigde zone. De onverzadigde zone wordt aan de onderkant begrensd door de grondwaterspiegel, waaronder zich de verzadigde zone bevindt. Onder de grondwaterspiegel is de aquifer verzadigd (Figuur 7.3). Een afgesloten aquifer wordt aan de boven- en onderkant begrensd door een ondoorlatende laag. Als de stijghoogte groter is dan de bovenkant van het pakket spreekt men van spanningswater; als de stijghoogte lager is dan de bovenkant dan vormt zich een grondwaterspiegel en is er freatische stroming (Figuur 7.4). Een semi-afgesloten aquifer wordt aan de boven en/of onderkant begrensd door een slechtdoorlatende laag (zie bijvoorbeeld Figuur 7.8).



Figuur 7.3 – De grondwaterspiegel vormt de grens tussen de onverzadigde zone (licht grijs) en de verzadigde zone (donker grijs)



Figuur 7.4 - Een afgesloten aquifer met spanningswater en freatische stroming

Water dat aan het landoppervlak infiltreert, sijpelt door de onverzadigde zone naar de grondwaterspiegel. Een gedeelte van het water dat aan het oppervlak infiltreert, zal de grondwaterspiegel niet bereiken maar zal door de wortels van planten en bomen weer omhoog worden gezogen. Het gedeelte dat wel de grondwaterspiegel bereikt heet de grondwateraanvulling. In grote delen van Nederland bestaat het bovenste pakket uit klei of veen en ligt de eerste aquifer daaronder. De grondwaterspiegel in het bovenste pakket (ook wel de deklaag genoemd) wordt op peil gehouden door een systeem van drainage buizen, slootjes en kanalen.

De grondwaterstroming in aquifers is voornamelijk horizontaal en mag dan beschreven worden als een tweedimensionaal probleem waarbij de stijghoogte niet varieert met de diepte (dit staat bekend als de benadering van Dupuit). Het is dan handig om niet met de specifieke debietsvector te werken maar met de debietsvector \bar{Q} [L^2T^{-1}], die gedefinieerd is als het debiet door een stuk aquifer met breedte 1 en hoogte gelijk aan de verzadigde dikte D van het pakket. De debietsvector heeft alleen componenten in de horizontale x en y richtingen

$$Q_x = Dq_x = -kD \frac{\partial h}{\partial x}, \quad Q_y = Dq_y = -kD \frac{\partial h}{\partial y} \quad [L^2T^{-1}] \quad [7.7]$$

Het product kD wordt ook wel de transmissiviteit $T = kD$ [L^2T^{-1}] genoemd (Engels: transmissivity). In Nederland spreekt men echter vaak van de kD -waarde. Het is belangrijk om te benadrukken dat de componenten van de debietsvector de dimensie [L^2T^{-1}] hebben. Dit in contrast met het totale debiet Q , dat in andere hoofdstukken gebruikt wordt en de dimensie [L^3T^{-1}] heeft.

De grondwaterstroming in aquitards is voornamelijk verticaal. De verticale stroming tussen aquifer 1, met stijghoogte h_1 , en aquifer 2, met stijghoogte h_2 kan dan beschreven worden als

$$q_z = k \frac{h_2 - h_1}{H} \quad [LT^{-1}] \quad [7.8]$$

waarbij k de (verticale) doorlatendheid van de kleilaag is en H de dikte van de kleilaag. Hierbij is er vanuit gegaan dat aquifers genummerd worden van boven naar beneden (dus aquifer 1 ligt boven aquifer 2) en dat de z -as verticaal omhoog wijst. Vaak wordt [7.8] geschreven als

$$q_z = \frac{h_2 - h_1}{c} \quad [LT^{-1}] \quad [7.9]$$

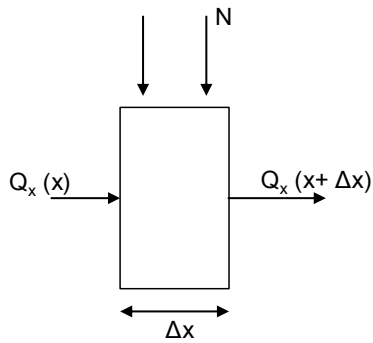
waarbij

$$c = \frac{H}{k} \quad [T] \quad [7.10]$$

de weerstand van de kleilaag genoemd wordt. De dimensie van c is tijd.

7.5 Continuïteit en de vergelijkingen van Laplace en Poisson

Zoals gezegd zijn de wiskundige vergelijkingen die grondwaterstroming beschrijven redelijk goed bekend. De vergelijking voor ééndimensionale stationaire grondwaterstroming kan worden afgeleid door de continuïteitsvergelijking te combineren met de wet van Darcy. Beschouw een stukje aquifer met lengte Δx en eenheidsbreedte (Figuur 7.5); de grondwateraanvulling is uniform en gelijk aan N . Volgens de stationaire continuïteitsvergelijking is de hoeveelheid water die er in stroomt gelijk aan de hoeveelheid water die eruit stroomt, of voor het stukje aquifer van Figuur 7.5.



Figuur 7.5 - Waterbalans van een stukje aquifer

$$\text{In} - \text{Uit} = N\Delta x + Q_x(x) - Q_x(x + \Delta x) = 0 \quad [\text{L}^2\text{T}^{-1}] \quad [7.11]$$

Delen door Δx en in de limiet voor Δx naar nul krijgen we de differentiaalvergelijking

$$\frac{dQ_x}{dx} = N \quad [\text{LT}^{-1}] \quad [7.12]$$

Als nu [7.7] ingevuld wordt voor Q_x dan krijgen we de differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2 h}{dx^2} = -\frac{N}{kD} \quad [\text{L}^{-1}] \quad [7.13]$$

waarbij we er voor de gemakkelijker vanuit gegaan zijn dat de kD waarde constant is. Vergelijking [7.13] staat bekend als de Poisson vergelijking. Als de grondwateraanvulling nul is, dan verkrijgen we de Laplace vergelijking

$$\frac{d^2 h}{dx^2} = 0 \quad [\text{L}^{-1}] \quad [7.14]$$

Vergelijkingen [7.13] en [7.14] zijn tweede orde, lineaire, gewone differentiaal vergelijkingen; de Laplace vergelijking is zelfs homogeen. Daar de orde gelijk is aan twee dienen er twee randvoorwaarden gegeven te worden. De algemene oplossing voor de Laplace vergelijking in één dimensie mag geschreven worden als

$$h = Ax + B \quad [\text{L}] \quad [7.15]$$

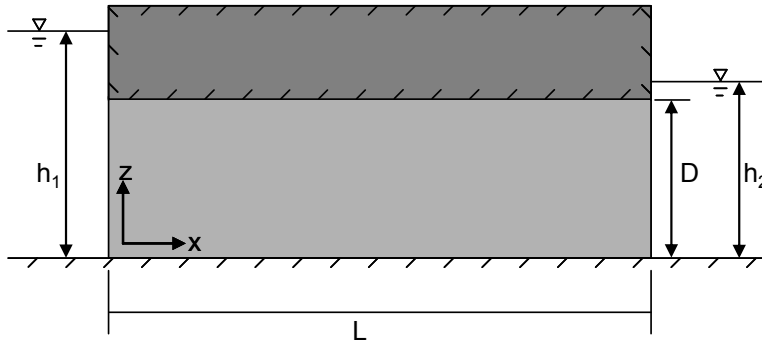
waarbij A en B constanten zijn die berekend moeten worden uit de randvoorwaarden.

7.5.1 Strooming tussen twee waterlopen

Beschouw de grondwaterstroming tussen twee lange waterlopen (Figuur 7.6). De waterstand in waterloop 1 is h_1 en in waterloop 2 h_2 . De afstand tussen de twee waterlopen is L en de kD wordt bij benadering constant verondersteld. De randvoorwaarden zijn

$$x = 0, \quad h = h_1 \quad [7.16]$$

$$x = L, \quad h = h_2 \quad [7.17]$$



Figuur 7.6 - Grondwaterstroming tussen twee lange waterlopen

De oplossing voor de stijghoogte tussen de waterlopen wordt verkregen door de constanten A en B in [7.15] te berekenen uit de randvoorwaarden hetgeen geeft

$$h = (h_2 - h_1) \frac{x}{L} + h_1 \quad [L] \quad [7.18]$$

De stijghoogte zal dus lineair variëren tussen de twee kanalen onafhankelijk van de doorlatendheid en dikte van het pakket. Dat is natuurlijk geen verrassing, want het debiet tussen de twee kanalen moet constant zijn (de kD is immers uniform verondersteld en er stroomt alleen water de aquifer in bij het hoogste peil en er weer uit bij het laagste peil). De debietsvector wordt berekend door de afgeleide van [7.18] in te vullen in [7.7], zodat

$$Q_x = kD \frac{h_1 - h_2}{L} \quad [L^2T^{-1}] \quad [7.19]$$

7.5.2 Stroming tussen twee waterlopen met grondwateraanvulling

Stel nu dat de grondwateraanvulling in het vorige geval gelijkmatig verdeeld is en gelijk is aan N en dat N uniform is. Voor dezelfde randvoorwaarden dient nu de vergelijking van Poisson opgelost te worden. Daar de vergelijking van Poisson een niet-homogene vergelijking is, dient eerst een particuliere oplossing gevonden te worden, bijvoorbeeld

$$h = -\frac{N}{2kD} x^2 \quad [L] \quad [7.20]$$

Hier dient oplossing [7.15] voor de homogene vergelijking bij opgeteld te worden. De constanten A en B dienen wederom uit de randvoorwaarden bepaald te worden, hetgeen geeft (deze formule staat bekend als de formule van Hooghoudt)

$$h = -\frac{N}{2kD} x^2 + \left(\frac{N}{2kD} L + \frac{h_2 - h_1}{L} \right) x + h_1 \quad [L] \quad [7.21]$$

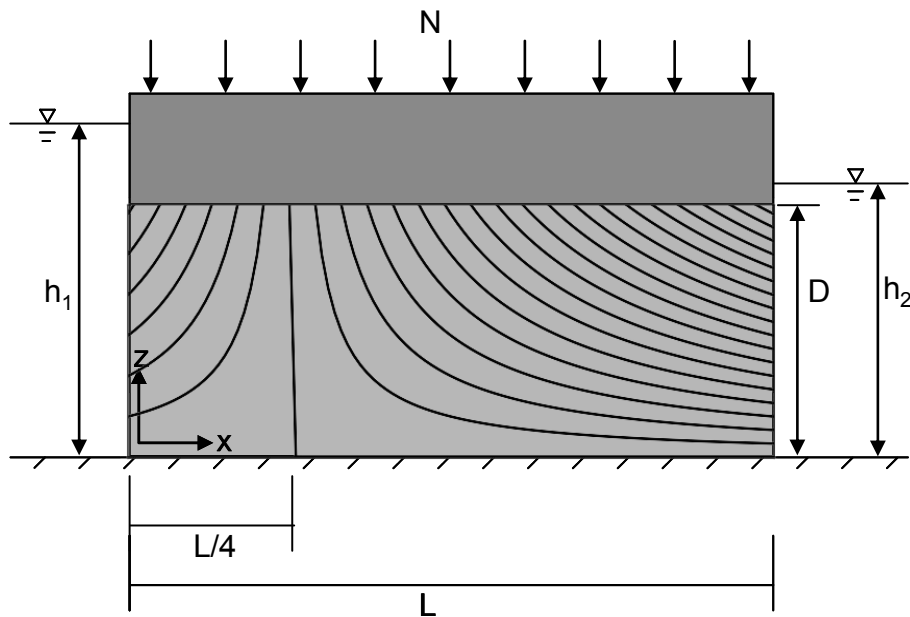
Het blijkt dus dat de stijghoogte tussen de twee kanalen parabolisch verloopt. Als de twee kanalen een gelijk peil hebben, dan is het peil halverwege tussen de kanalen $NL^2/(8kD)$ hoger dan het kanaalpeil. In de landbouw, als de twee kanalen twee slootjes zijn, wordt deze verhoging in een perceel de opbolling genoemd. In de hydrologie, als de twee kanalen twee afwaterende rivieren voorstellen, dan is het hoogste punt de grondwaterwaterscheiding (Engels: groundwater divide). Water aan de linkerkant van de waterscheiding stroomt naar links, water aan de rechterkant van de waterscheiding stroomt naar rechts.

Ook kunnen we uitrekenen hoeveel grondwater er in het kanaal uitstroomt. Bij gelijke peilen in de kanalen volgt dat eenvoudig uit continuïteit, want de helft van het water zal naar links stromen en de helft van het water naar rechts. Daar het een stationaire situatie betreft is de uitstroming dan $NL/2$ in ieder kanaal (wederom onafhankelijk van de kD waarde). Als de twee kanalen niet een gelijk peil hebben kan de stroming uitgerekend worden door de afgeleide van [7.21] in te vullen in [7.7].

$$Q_x = N \left(x - \frac{L}{2} \right) + kD \frac{h_1 - h_2}{L} \quad [L^2T^{-1}] \quad [7.22]$$

Als de kanaalpeilen bekend zijn, kan nu overal de debietsvector berekend worden. De locatie van de waterscheiding kan berekend worden door Q_x gelijk aan nul te stellen en op te lossen voor x . Het moge duidelijk zijn dat er geen waterscheiding zal zijn als het verhang tussen de kanalen groot genoeg is. Ook kan berekend worden bij welk verhang (of bij welke grondwateraanvulling) er precies geen stroming naar of uit één van de kanalen is.

Hoewel een ééndimensionaal stromingsprobleem opgelost is, is de stroming wel degelijk twee dimensionaal. Er infiltreert immers water aan het oppervlak. Een benadering van de stroombanen kan berekend worden door te veronderstellen dat de stroming altijd gelijkmatig verdeeld is over de dikte van de aquifer. Het stromingspatroon voor het geval dat de waterscheiding op één kwart van de afstand tussen de kanalen ligt is te zien in Figuur 7.7. Het water dat net rechts van de waterscheiding infiltreert, stroomt naar het rechter kanaal, maar wordt steeds verder naar beneden gedrukt door al het andere water dat infiltreert. Stroomlijnen zijn zo getekend dat het debiet tussen twee stroomlijnen steeds hetzelfde is. Dat betekent dat het water sneller stroomt daar waar de stroomlijnen dichterbij elkaar liggen en langzamer daar waar de stroomlijnen verder uit elkaar liggen.



Figuur 7.7 - Stroomlijnen voor stroming tussen twee waterlopen met grondwateraanvulling N en een waterscheiding op $L/4$

7.6 Semi-spanningswater in polders

Een tweede systeem dat in Nederland vaak voorkomt is een aquifer onder een polder. De bodem van de polder bestaat meestal uit klei, of een ander slechtdoorlatend materiaal, en het waterpeil in de polder wordt kunstmatig vastgehouden met sloten en drainagebuizen. Het betreft hier dus een semi-afgesloten pakket met een vast polderpeil erboven. De verticale stroming door de kleilaag kan berekend worden met [7.8] als

$$q_z = \frac{h - h^*}{c} \quad [LT^{-1}] \quad [7.23]$$

waar h^* het polderpeil is. Als de stroming door de kleilaag omhoog is (dus de polder in) dan spreekt men van kwel; stroomt het naar beneden (de polder uit) dan spreekt men van wegzijging. De verticale stroming door de kleilaag heeft eigenlijk hetzelfde effect op de aquifer eronder als de grondwateraanvulling N in [7.13]. Er is echter alleen sprake van grondwateraanvulling als q_z negatief is; als q_z positief is, is er kwel. Verder zal q_z ruimtelijk variëren. In vergelijking [7.13] dient N door $-q_z$ [7.23] vervangen te worden

$$\frac{d^2 h}{dx^2} = \frac{h - h^*}{kDc} \quad [L^{-1}] \quad [7.24]$$

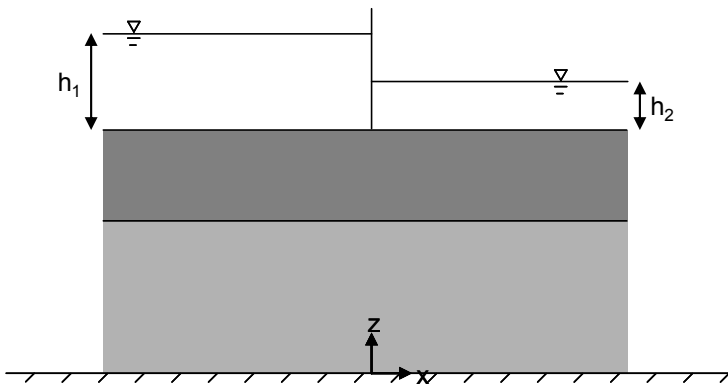
Als h^* niet van x afhangt, dan kan deze vergelijking herschreven worden als

$$\frac{d^2 (h - h^*)}{dx^2} = \frac{h - h^*}{\lambda^2} \quad [L^{-1}] \quad [7.25]$$

waarbij $\lambda = \sqrt{kDc}$ [L] de spreidingslengte genoemd wordt (waarom zal spoedig duidelijk worden). Differentiaalvergelijking [7.25] is eveneens een tweede orde, lineaire, homogene, gewone differentiaalvergelijking en staat bekend als de gemodificeerde Helmholtz vergelijking. De algemene oplossing is:

$$h - h^* = Ae^{-x/\lambda} + Be^{x/\lambda} \quad [L] \quad [7.26]$$

waarbij A en B wederom constanten zijn die uit de randvoorwaarden berekend moeten worden.



Figuur 7.8 – Een aquifer onder twee polders met verschillende polderpeilen

Beschouw nu de grondwaterstroming tussen twee polders met verschillend polderpeil (Figuur 7.8). Als het polderpeil h_1^* aan de linkerkant groter is dan het peil h_2^* aan de rechterkant dan zal er wegzijging zijn in de linker polder en kwel in de rechter polder. De oorsprong van het assenstelsel wordt precies tussen de twee polders gekozen. Er gelden aparte oplossingen onder de linker polder en onder de rechter polder daar de polderpeilen verschillen; de constanten in de oplossing aan de linkerkant noemen we A_1 en B_1 en aan de rechterkant A_2 en B_2 . Ver weg onder de linker polder zal de grondwaterstand gelijk zijn aan het polderpeil h_1^* . Dit kan alleen als de constante A_1 gelijk is aan nul, en dus

$$h = h_1^* + B_1 e^{x/\lambda}, \quad x \leq 0 \quad [L] \quad [7.27]$$

Ver weg onder de rechter polder zal de grondwaterstand gelijk zijn aan h_2^* , en dus is B_2 gelijk nul zodat

$$h = h_2^* + A_2 e^{-x/\lambda}, \quad x \geq 0 \quad [L] \quad [7.28]$$

Er zijn nog twee onbekenden over, B_1 en A_2 . Deze kunnen bepaald worden door op $x = 0$ te stellen dat de stijghoogte en de debietsvector van de linker en rechter oplossing aan elkaar gelijk zijn. De oplossing wordt dan (dit staat bekend als de formule van Mazure)

$$h = h_1^* - \frac{h_1^* - h_2^*}{2} e^{x/\lambda}, \quad x \leq 0 \quad [L] \quad [7.29]$$

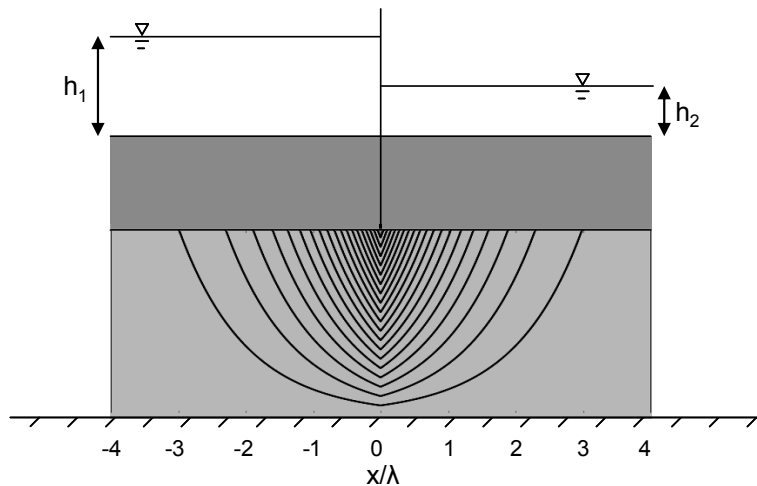
$$h = h_2^* + \frac{h_1^* - h_2^*}{2} e^{-x/\lambda}, \quad x \geq 0 \quad [L] \quad [7.30]$$

Niet geheel verrassend is de stijghoogte in de aquifer op $x = 0$ gelijk aan het gemiddelde van de polderpeilen. De wegzijging en kwel kan ook berekend worden. Op $x = 0$ is de waarde het grootst en

$$q_z = \pm \frac{h_1^* - h_2^*}{2c} \quad [LT^{-1}] \quad [7.31]$$

Waarbij q_z negatief is net links van de oorsprong en positief net rechts van de oorsprong.

De kwel en wegzijging nemen snel af. Op een afstand van 3λ is de kwel of wegzijging nog maar 5% van de maximum waarde op $x=0$. Vandaar dat λ de spreidingslengte genoemd wordt. De spreidingslengte geeft aan over welke afstand van een verandering in polderpeil er kwel of wegzijging zal optreden. De meeste kwel en wegzijging zal plaatsvinden over een afstand van 3λ van de verandering. Anders gezegd, 95% van het water dat van de ene naar de andere polder stroomt zal binnen een afstand van 3λ in of uit de aquifer stromen. Ook nu kunnen weer stroomlijnen getekend worden (zie Figuur 7.9).



Figuur 7.9 - Stroomlijnen voor stroming tussen twee polders

7.7 Tijdsafhankelijke stroming

Als de stijghoogte met de tijd varieert spreekt men van tijdsafhankelijke stroming. De waterbalans van een stukje aquifer krijgt nu een extra term die de bergingsterm genoemd wordt:

$$\text{In} - \text{Uit} = \text{Toename van de berging} \quad [7.32]$$

Grondwater kan geborgen worden in een freatische aquifer doordat de grondwaterspiegel stijgt. Om de grondwaterstand 1 millimeter te laten stijgen is er minder dan 1 mm water nodig. Het water hoeft immers alleen de poriën te vullen. Aangezien de fractie poriënvolume gelijk is aan de porositeit n , zal er slechts n millimeter water toegevoegd hoeven te worden om te grondwaterstand met 1 mm te laten stijgen. Dit gaat echter alleen op als de grond net boven de waterspiegel helemaal droog is. De grond boven de grondwaterspiegel maakt deel uit van de onverzadigde zone waarin water omhoog en omlaag beweegt en is dus nat. De fractie van de grond waar nog water in kan wordt de freatische berging genoemd en wordt met S_y [-] aangeduid (Engels: specific yield).

In afgesloten of semi-afgesloten pakketten kan ook water geborgen worden. Dit gebeurt voornamelijk doordat de poriënruimte iets groter wordt als de waterdruk toeneemt (en ook een beetje doordat het water iets samengedrukt wordt). De extra berging ten gevolge van een stijghoogte toename van Δh meter is $\Delta h S_s D$, waarbij S_s [L^{-1}] de specifieke berging genoemd wordt en D de dikte van het pakket is.

Voor zowel een freatische als een (semi-)afgesloten pakket kunnen we nu een bergingscoëfficiënt S definiëren. Voor freatische aquifers geldt $S=S_y$, voor (semi-)afgesloten pakketten geldt $S=S_s D$. In beide gevallen geldt: als de stijghoogte Δh meter daalt, komt er $\Delta h S$ meter water uit.

De waterbalans dient nu opgesteld te worden voor een tijdsperiode Δt

$$\text{In} - \text{Uit} - \text{Toename van de berging} = N\Delta x\Delta t + Q_x(x)\Delta t - Q_x(x+\Delta x)\Delta t - S\Delta h\Delta x = 0 \quad [7.33]$$

Delen door $\Delta x \Delta t$ en in de limiet voor Δx en Δt naar nul krijgen we de volgende differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} = -S \frac{\partial h}{\partial t} + N \quad [LT^{-1}] \quad [7.34]$$

En na het invullen van [7.7] voor Q_x

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{S}{kD} \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{N}{kD} \quad [L^{-1}] \quad [7.35]$$

Vergelijking [7.35] is een lineaire partiële differentiaal vergelijking. Naast twee randvoorwaarden dienen nu ook de initiële condities bekend te zijn, bijvoorbeeld de stijghoogte op tijdstip $t = 0$. Exacte oplossingen voor tijdsafhankelijke stroming zijn, niet geheel verrassend, minder eenvoudig dan voor stationaire stroming. Hier zullen belangrijke aspecten van tijdsafhankelijke grondwaterstroming behandeld worden aan de hand van een voorbeeld.

7.7.1 Verhoging van het rivierpeil.

Beschouw een lange rivier die volledig door een watervoerende laag heen snijdt; er is geen grondwateraanvulling ($N = 0$). Een doorsnede loodrecht op de rivier is te zien in Figuur 7.10. De initiële conditie is dat op $t = t_0$ de stijghoogte overal gelijk is aan nul. Op tijdstip $t = t_0$ wordt het rivierpeil verhoogd met 1 meter. De randvoorwaarden zijn dat de stijghoogte op $x = 0$ gelijk is aan de waterstand in de rivier: $h(x = 0, t \geq t_0) = 1$, terwijl ver weg de stijghoogte gelijk is aan de initiële waarde $h(x = \infty, t \geq t_0) = 0$. De oplossing voor dit stromingsprobleem werd in 1947 al gevonden door Jacob Edelman en luidt

$$h(x, t) = \text{erfc}(u) \quad \text{met } u = \sqrt{\frac{Sx^2}{4kD(t-t_0)}} \quad [-] \quad [7.36]$$

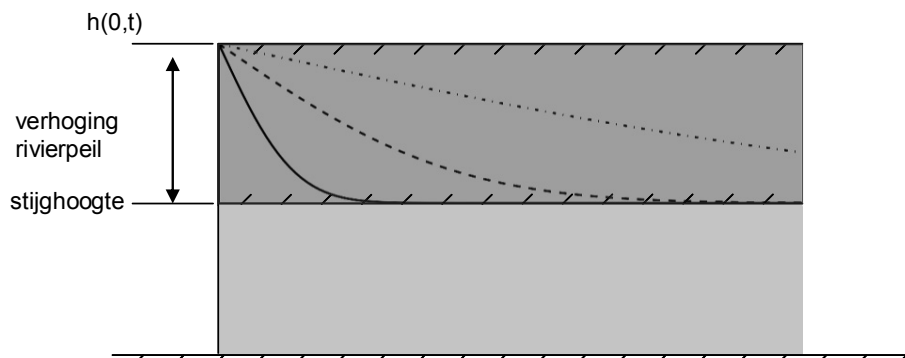
waar erfc de complementaire errorfunctie is, gedefinieerd als

$$\operatorname{erfc}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_u^{\infty} e^{-y^2} dy \quad [L] \quad [7.37]$$

Helaas zit deze functie niet op de meeste rekenmachines, maar wel in Excel, en bijvoorbeeld, Matlab of de programmeertaal Python. Hij kan ook uitgerekend worden op het internet met, bijvoorbeeld, www.wolframalpha.com. Een grafiek voor $\operatorname{erfc}(u)$ voor u van 0 tot 3 kan verkregen worden met het volgende commando: `plot erfc(u), u=0..3`.

De afleiding van [7.36] vereist enig rekenwerk (en kennis van Laplace transformaties). Het is echter relatief eenvoudig na te gaan dat [7.36] inderdaad een oplossing van de differentiaalvergelijking [7.35] is door [7.36] te differentiëren (met toepassing van de kettingregel) en in te vullen in de differentiaalvergelijking. De randvoorwaarden kunnen ook geïnterpreteerd worden als gerealiseerd wordt dat $\operatorname{erfc}(0) = 1$ en $\operatorname{erfc}(\infty) = 0$. Oplossing [7.36] geeft de stijghoogteverandering ten gevolge van een rivierpeilverhoging van 1 meter. Daar de differentiaalvergelijking lineair is, kan het effect van een rivierpeilverhoging van Δh berekend worden door [7.36] te vermenigvuldigen met Δh ; als het een rivierpeilverlaging betreft dan is Δh negatief.

Oplossing [7.36] kan gebruikt worden om na te gaan hoe de verandering van het rivierpeil doorwerkt in de aquifer. Dit wordt getoond in Figuur 7.10. Stel dat de transmissiviteit van de aquifer constant genomen mag worden als $kD = 10 \text{ m}^2/\text{d}$ en dat de freatische bergingscoëfficiënt gelijk is aan $S = 0.2$. De curven in Figuur 7.10 stellen dan de stijghoogte verdeling voor op tijdstip 1, 10, en 100 dagen. De verandering van het rivierpeil werkt langzaam door in de aquifer. Als dit echter geen freatisch pakket betreft maar een afgesloten pakket met een bergingscoëfficiënt van $S = 0.002$, dan stellen de drie curven de stijghoogteverdeling voor op tijdstippen 0.01, 0.1 en 1 dag. Verstoringen in een afgesloten pakket werken veel sneller door dan in een freatisch pakket, omdat er veel minder water geborgen kan worden (de bergingscoëfficiënt is veel kleiner).



Figuur 7.10 - Verandering van de stijghoogte in de aquifer na verhoging van het rivierpeil

De stijghoogte verhoging verplaatst zich steeds langzamer door de aquifer. Stel dat op een afstand x_1 de stijghoogte gestegen is met een halve meter op tijdstip t_1 (we stellen hier even $t_0 = 0$). De overeenkomstige waarde van u in [7.36] noemen we u_1 , zodat $h(u_1) = 0.5$. We kunnen nu berekenen hoe lang het duurt voordat een verhoging van een halve meter bereikt wordt op een afstand $2x_1$. Dan moet wederom gelden dat $u = u_1$, en dat betekent dat $t = 4t_1$. Om een verhoging van 0.5 te krijgen op een afstand $2x_1$ duurt dus vier keer zo lang als om een verhoging van 0.5 te krijgen op een afstand x_1 .

Als de stijghoogte in de rivier verhoogd wordt zal er rivierwater de aquifer instromen. Deze hoeveelheid zal ook afnemen met de tijd. De debietsvector kan wederom berekend worden door het invullen van de afgeleide van [7.36] in [7.7], hetgeen resulteert in een vergelijking zonder speciale functies

$$Q_x = \sqrt{\frac{kDS}{\pi t}} e^{-u^2} \quad [L^2T^{-1}] \quad [7.38]$$

De instroming van rivierwater neemt af met de tijd. Op tijdstip $t = 0$ is de instroming een instantaan moment oneindig groot. Immers, op $x = 0$ is de stijghoogte gelijk aan 1, terwijl net daarnaast de stijghoogte gelijk aan 0 is. De gradiënt van de stijghoogte is korte tijd oneindig groot en dus zal, theoretisch, het debiet ook oneindig groot zijn. In de werkelijkheid is het natuurlijk niet mogelijk om de waterstand in de rivier instantaan met een meter te verhogen, maar daar zal enige tijd overheen gaan, zodat er geen oneindige snelheden optreden.

Daar de differentiaalvergelijking [7.35] lineair is kunnen verschillende oplossingen bij elkaar opgeteld worden; het optellen van oplossingen wordt superpositie genoemd. Stel dat het rivierpeil met Δh meter verhoogd wordt op tijdstip $t_0 = 0$, maar dat het een tijdsperiode Δt later weer verlaagd wordt met Δh naar het originele peil. De oplossing voor $0 \leq t \leq \Delta t$ is gelijk aan [7.36] maar dan vermenigvuldigd met Δh

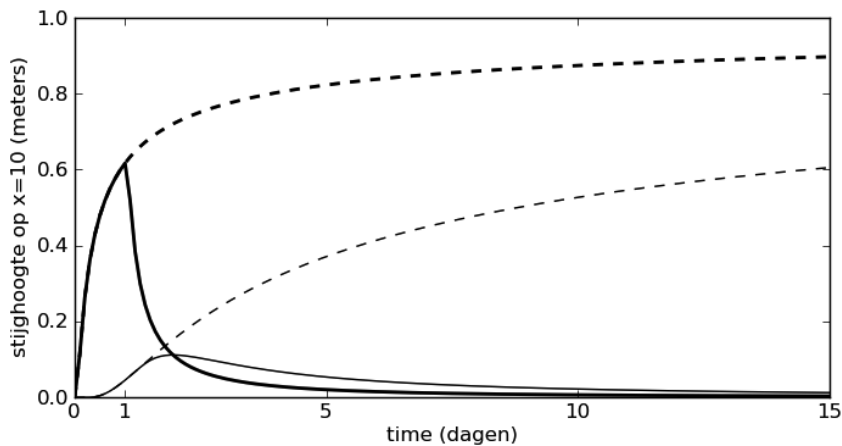
$$h(x, t) = \Delta h \operatorname{erfc}(u_0) \quad \text{met } u_0 = \sqrt{\frac{Sx^2}{4kDt}} \quad [7.39]$$

Voor $t \geq \Delta t$ tellen we bij deze oplossing een waterstandverlaging van Δh op

$$h(x, t) = \Delta h [\operatorname{erfc}(u_0) - \operatorname{erfc}(u_1)] \quad \text{met } u_0 = \sqrt{\frac{Sx^2}{4kDt}}, \quad u_1 = \sqrt{\frac{Sx^2}{4kD(t - \Delta t)}} \quad [7.40]$$

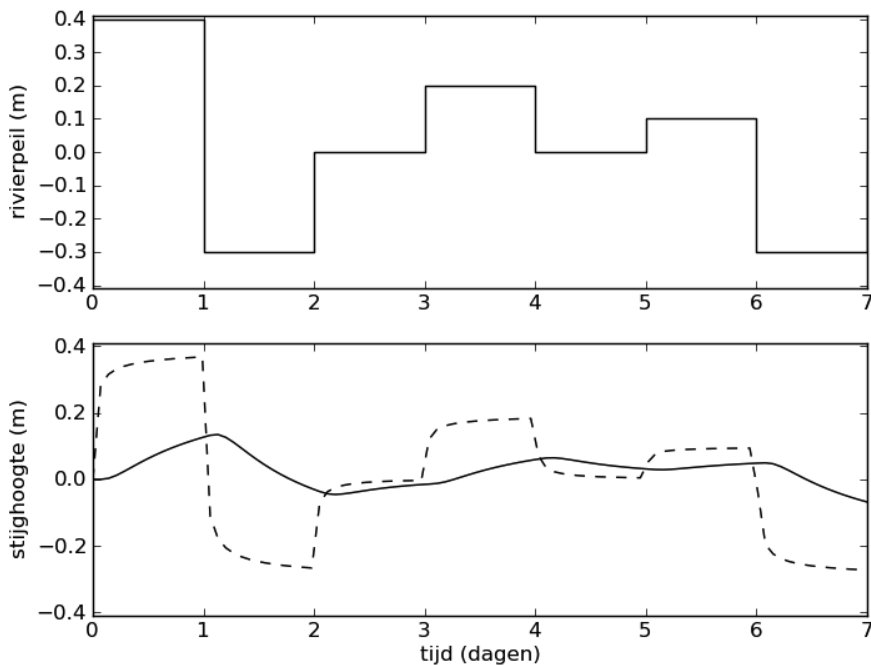
Een andere manier om naar de reactie op de stijging van het rivierpeil te kijken is door de response in een peilbuis op enige afstand van de rivier te bepalen. De response curve op plaats x^* wordt verkregen door $h(x^*, t)$ te berekenen met [7.36]. Dit wordt de stapresponse genoemd, omdat het rivierpeil verhoogd wordt met een stap en daarna wordt vastgehouden. Het duurt, voor dit theoretisch geval, oneindig lang voordat de stijghoogte op enig punt in de aquifer gelijk is aan de verhoging van het rivierpeil. Immers, er moet grondwater de aquifer in blijven stromen, en dat kan alleen als de stijghoogte in de aquifer overal kleiner is dan in de rivier.

De reactie op een tijdelijke verhoging van het rivierpeil wordt de blokresponse genoemd. De blokresponse op plaats x^* kan berekend worden met [7.39] en [7.40]. De blokresponse en stapresponse zijn berekend op x^* en $4x^*$ voor een freatische aquifer (Figuur 7.11). De getrokken lijnen zijn de blokresponse en de gestreepte lijnen de stapresponse. De blokresponse is voor een verhoging van het rivierpeil met 1 meter voor 1 dag. Voor de eerste dag volgt de blokresponse dan ook de stapresponse. De dikke lijnen zijn voor $x = x^*$, waar de stijghoogte vrij snel naar beneden gaat nadat het rivierpeil naar beneden gaat. Op $x = 4x^*$ (dunne lijnen), gaat de stijghoogte nog een poosje omhoog nadat het rivierpeil alweer gezakt is. De blokresponse op $x = 4x^*$ heeft een veel kleiner piek dan op $x = x^*$ en ook komt de piek later.



Figuur 7.11 - Blokrespons en staprespons ten gevolge van een rivierpeil verhoging

Stel nu dat het rivierpeil elke dag gemeten wordt. In de bovenste helft van Figuur 7.12 is de waterstand in de rivier te zien (hij wordt hier constant verondersteld per dag). De variatie van de stijghoogte ten gevolge van de variatie van het rivierpeil kan wederom berekend worden door superpositie in de tijd. In de onderste helft van Figuur 7.12 staat de reactie van het grondwater in twee peilbuizen. Stel dat dit spanningswater betreft met een bergingscoëfficiënt van 0.002 en een kD van $10 \text{ m}^2/\text{d}$, dan is de streepjeslijn de stijghoogte in een peilbuis op 10 meter van de rivier en de getrokken lijn de stijghoogte in een peilbuis op een afstand van 100 meter. De stijghoogte in de peilbuis nabij de rivier bereikt bijna de hoogte van het rivierpeil na 1 dag. Op grotere afstand varieert de stijghoogte veel minder en het is niet moeilijk voor te stellen dat op nog grotere afstand er vrijwel geen stijghoogte variatie zal zijn ten gevolge van de rivierpeilvariatie. We eindigen dit hoofdstuk met een vraag. Als de getrokken lijn een peilbuis betreft in een freatisch pakket met een bergingscoëfficiënt van 0.2 en een kD van $10 \text{ m}^2/\text{d}$, hoe ver staat de peilbuis dan van de rivier?



Figuur 7.12 - Waterstand in een rivier en bijbehorende reactie van het grondwater in twee peilbuizen

Referenties

Boussinesq J (1904) Recherches théoretique sur l'écoulement des nappes d'eau infiltrées dans le sol et sur le débit des sources. J. Math. Pure Appl. 10: 363-394.

Darcy H (1856) Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon. Dalmont, Paris.

Dupuit J (1863) Études Théoriques et Pratiques sur le Mouvement des Eaux dans les Canaux Découverts et à Travers les Terrains Perméables. 2nd ed. Dunod, Paris, France.

Edelman JH (1947) Over de berekening van grondwaterstromingen. Proefschrift TU Delft.

Forchheimer P (1886) Ueber die Ergiebigkeit von Brunnenanlagen und Sickerschlitzten. Z. Architekt. Ing. Ver. Hannover 32: 539-563.

Hooghoudt SB (1940) Bijdragen tot de kennis van enige natuurkundige grootheden in de grond, Deel 7. Verslagen Landbouwkundig Onderzoek 46 (14) ('s Gravenhage): B 515-707.

Mazure JP (1936) Kwel en chloor bezwaar in de Wieringermeer. Gepubliceerd als bijlage 10 in: Geohydrologische gesteldheid van de Wieringermeer. Rapporten en Mededelingen betreffende de Zuiderzeewerken no 5. Algemeene Landsdrukkerij, 's Gravenhage

Meinzer OE (1928) Compressibility and elasticity of artesian aquifers. Economic Geology 23: 263-291.