2. HYDROSTATICA

De hydrostatica is een deel van de hydromechanica, dat is de wetenschap van de evenwichts- en de bewegingsvergelijkingen van vloeistoffen en van de wisselwerking tussen deze vloeistoffen en vaste lichamen.
De hydrostatica behandelt het deel waarbij de vloeistoffen en lichamen zich in een toestand van relatieve rust bevinden. Onder vloeistoffen verstaat men stoffen die grote weerstand bieden tegen samendrukkende krachten maar die daarentegen vrijwel geen weerstand hebben tegen trekkrachten en zeer langzame vormveranderingen.
In de gebruikelijke beschouwingen van de hydrodynamica worden vloeistoffen over het algemeen **homogeen** en **onsamendrukbaar** verondersteld.
Homogeen wil zeggen dat de soortelijke massa, dat is de massa van de vloeistof per eenheid van volume, niet afhankelijk is van de plaats in de vloeistof.
Onsamendrukbaar betekent dat er geen volume verandering optreedt ten gevolge van een drukverandering in de vloeistof. Bovendien wordt aangenomen dat de uitzetting van water ten gevolge van een temperatuurverandering eveneens verwaarloosd mag worden. Door deze aannamen worden de hydrostatische berekeningen aanzienlijk vereenvoudigd.

Om te verklaren waardoor een lichaam nu precies blijft drijven in de vloeistof, is het noodzakelijk een korte introductie te geven in de hydrostatica.
Uit de evenwichtsbeschouwing volgt dat een lichaam blijft drijven als er door de vloeistof een reactiekracht opgewekt wordt welke het gewicht van het lichaam compenseert.
Krachten door vloeistoffen op lichamen uitgeoefend zijn in het algemeen te beschouwen als drukken werkend op een oppervlak.
Wat kunnen we over de druk in een vloeistof zeggen?
Daartoe kijken we eerst naar de belangrijke wet van Pascal, welke stelt dat:

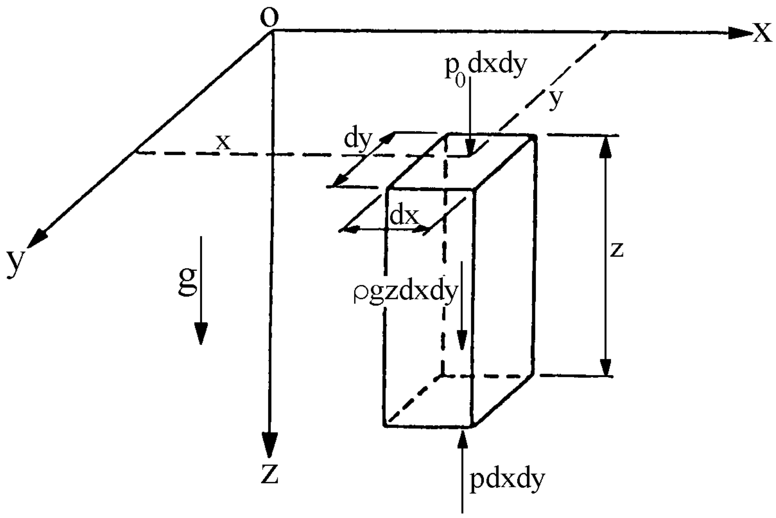
WET VAN PASCAL

"De druk in een bepaald punt van de vloeistof hangt niet af van de richting van het vlak waarop deze druk werkt"

Dit betekent dat in een willekeurig punt van de vloeistof de druk alzijdig even groot is.
Dit impliceert dat als de druk in een bepaald punt van de vloeistof bekend is, de kracht op een vlak met willekeurige oriëntatie in dat punt te berekenen valt.
Hoe groot is nu die druk in een in rust verkerende vloeistof?
In een vloeistof heerst in het algemeen in elk punt een andere druk. Bij homogene en onsamendrukbare vloeistoffen die in rust verkeren, heerst onder invloed van de zwaartekracht over de verticaal een druk welke lineair afhankelijk is van de afstand tot het vrije vloeistof oppervlak: **de hydrostatische druk.**
We bewijzen dat de hydrostatische druk lineair met de diepte toeneemt.
In de figuur is het assenstelsel zodanig gekozen dat het vlak Oxy in het vrije vloeistof oppervlak gelegen is.
Aan het oppervlak werkt de atmosferische druk p_o.

Beschouw een vloeistof zuiltje met een hoogte z en een doorsnede dx dy. De druk in het punt (x,y,z) is p.
De verticale kracht omhoog is:

$$p \cdot dxdy$$

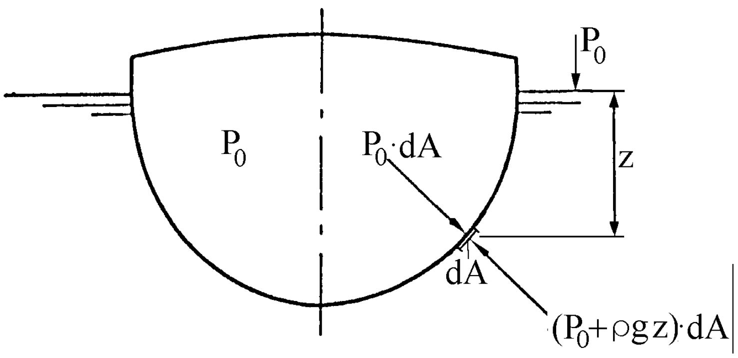


Het verticale evenwicht van het zuiltje vereist nu dat de som van de verticale krachten gelijk is aan nul. Dus:

$$p_0 \cdot dxdy + \rho\, gz \cdot dxdy = p \cdot dxdy$$

Hieruit volgt: $p = p_0 + \rho\, gz$

De druk in het punt (x,y,z) is klaarblijkelijk samengesteld uit de atmosferische druk p_o, welke aan het oppervlak heerst en ρgz, welke deel veroorzaakt wordt door de zwaartekracht.
Dit laatste deel neemt inderdaad lineair toe met de diepte.
(dwz als z tweemaal zo groot wordt dan wordt de druk tweemaal zo groot).

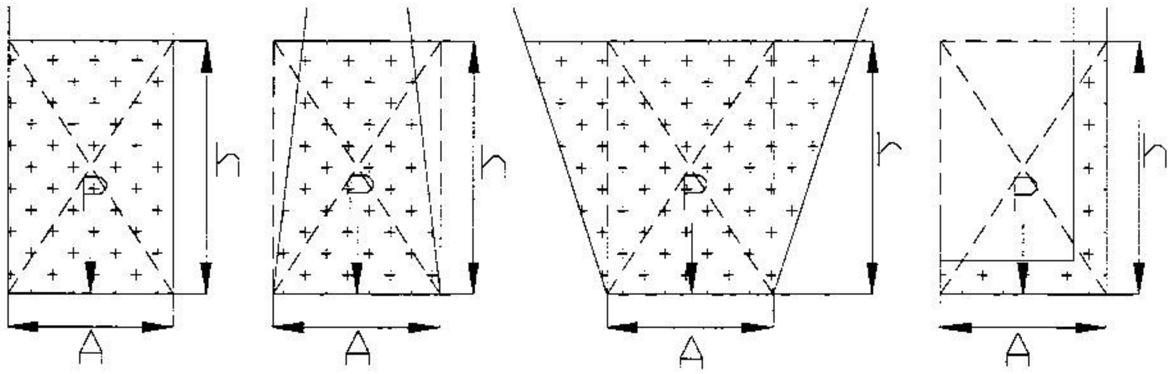


In het algemeen is alleen de overdruk van belang, immers aan de binnenzijde en de buitenzijde van bijvoorbeeld een scheepsromp is allebei p_o "aanwezig". De krachten die het gevolg zijn van p_o heffen elkaar dus op.

In het algemeen geldt dus voor de hydrostatische druk:

$$p = \rho\, gz$$

Uit de combinatie van de wet van Pascal en de formulering voor de hydrostatische druk, volgt dat de drukkracht die bijvoorbeeld op de bodem van een tank wordt uitgeoefend onafhankelijk is van de vorm van de tank, doch alleen van de hoogte van de vloeistofkolom boven de bodem van de tank.
Dit noemt men de Hydrostatische Paradox.



In de bovenstaande voorbeelden is de druk op de bodem van de tank gelijk. De kracht op de bodem is gelijk omdat het oppervlak van de bodem gelijk is.

kracht = druk * oppervlak

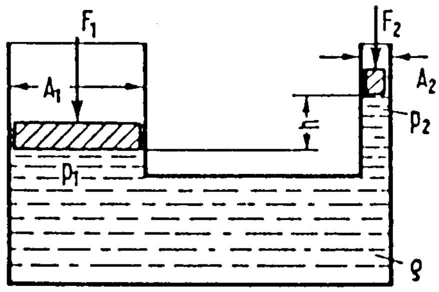
Zo kunnen bijvoorbeeld op de wanden van een tank grote krachten uitgeoefend worden door de stijghoogte van de vloeistof in een stand- of overlooppijp.

De Paradox geeft aanleiding tot de volgende uitspraken:

- verschillende hoeveelheden vloeistof kunnen één en dezelfde druk veroorzaken;
- de op de bodem van een vat of tank werkende kracht kan groter zijn dan het gewicht van de hoeveelheid vloeistof die zich boven de bodem bevindt;
- de werklijn van de drukkracht op de bodem gaat steeds door het zwaartepunt van de vloeistofzuil boven het oppervlak ongeacht of deze zuil daadwerkelijk aanwezig is of niet.

Bekende voorbeelden van werktuigen, welke gebaseerd zijn op de hydrostatische druk en de wet van Pascal zijn ondermeer:

Voorbeeld 1



De hydraulische pers. Deze bestaat uit twee door een slang of pijp doorverbonden cilinders met een sterk verschillend doorsnede oppervlak, resp. A_1 en A_2.
Er geldt nu dat:

$$p_1 = \frac{F_1}{A_1} \qquad p_2 = \frac{F_2}{A_2}$$

In de vloeistof moet nu gelden dat:

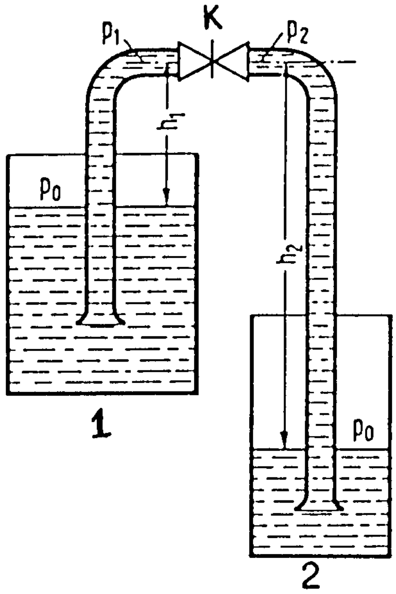
$$p_2 = p_1 - \rho g h \quad \rightarrow \quad \frac{F_2}{A_2} = \frac{F_1}{A_1} - \rho g h$$

Bij praktische toepassingen van de hydraulische cilinder is bijna altijd ρgh velen malen kleiner dan de druk F_1/A_1, zodat deze term in de vergelijking verwaarloosd mag worden.

Er geldt dan dat: $$\frac{F_2}{A_2} = \frac{F_1}{A_1} \quad \rightarrow \quad \frac{F_2}{F_1} = \frac{A_2}{A_1}$$

Daar A_2 veel kleiner gekozen is dan A_1, is ook de kracht F_2 veel kleiner dan F_1. Dit betekent dat met een veel kleinere kracht F_2 een aanzienlijk grotere kracht F_1 ontwikkeld kan worden. De verplaatsing van de zuiger A_2 zal echter veel groter moeten zijn dan die van A_1 omdat het volume vloeistof dat verplaatst wordt door A_1 gelijk is aan dat verplaatst door A_2. Het veel grotere oppervlak van A_1 maakt derhalve slechts een kleine verplaatsing mogelijk. Hierdoor wordt praktisch gesproken de overbrengings-verhouding van zulk een eenvoudig werktuig beperkt.

Voorbeeld 2



De hydraulische hevel. Twee afzonderlijke vaten zijn gevuld met vloeistof. De vloeistof heeft in beide vaten een verschillende vloeistofhoogte. De vaten zijn door middel van een geheel met vloeistof gevulde pijp met elkaar verbonden. In het hoogste punt van de pijp zit een kraan.

Links van de kraan heerst de druk:

en rechts van de kraan heerst de druk:

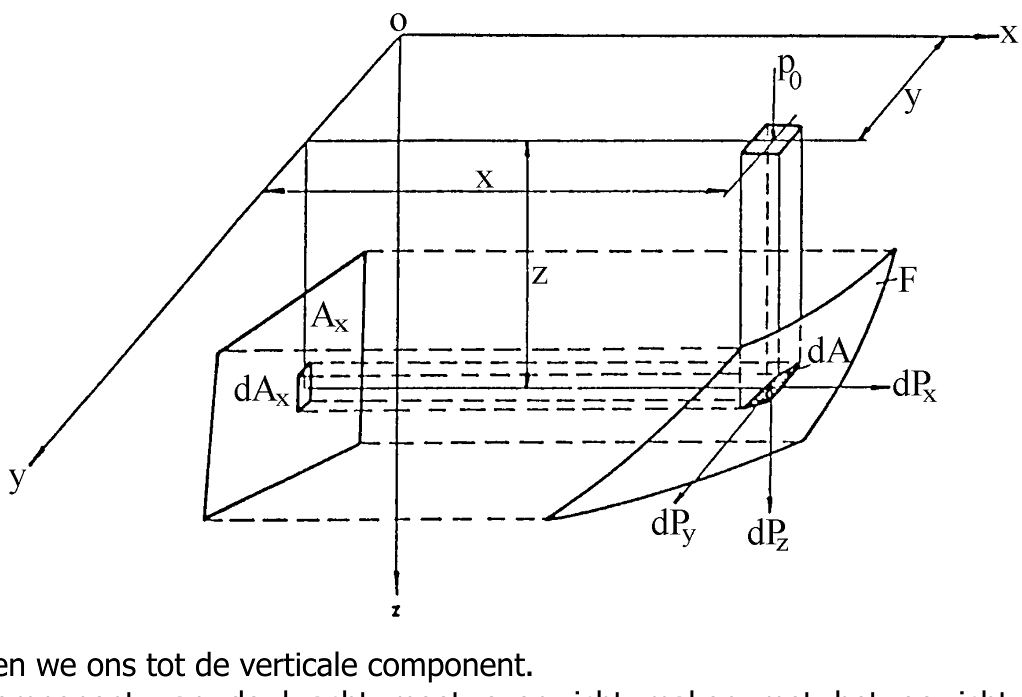
Daar $h_1 < h_2$ is $p_1 > p_2$ zal als de kraan geopend wordt de vloeistof van vat 1 naar vat 2 stromen. Zo is het dus mogelijk om een hoger gelegen vat leeg te pompen in een lager gelegen vat zonder mechanisch bewogen hulpmiddelen (pomp).
Terug naar de kracht op een drijvend lichaam. We leiden nu af de kracht welke een ondergedompeld oppervlak ondervindt ten gevolge van de hydrostatische druk. Beschouw daartoe een oppervlakte elementje dA, deel van een groter (gewelfd) oppervlak A welk een lichaam omsluit. Te denken valt hierbij aan een stukje van de huid van een schip.

Hierop werkt de volgende kracht: $F_T = \rho g z \, dA$
in de richting van de normaal vector.

Ontbinden in de x, y en z richting geeft:

In x-richting: $F_x = \rho g z \, dA \cos\alpha_1 = \rho g z \, dA_x$
In y-richting: $F_y = \rho g z \, dA \cos\alpha_2 = \rho g z \, dA_y$
In z-richting: $F_z = \rho g z \, dA \cos\alpha_3 = \rho g z \, dA_z$

waarin α_1, α_2 en α_3 de hoeken voorstellen tussen de normaal vector van het oppervlakje en de x-, y- en z-as.



Beperken we ons tot de verticale component.
De z-component van de kracht moet evenwicht maken met het gewicht van het lichaam.
De sommatie van deze component over alle oppervlakte elementen waaruit het lichaamsoppervlak gedacht kan worden te zijn opgebouwd levert de totale verticale kracht.

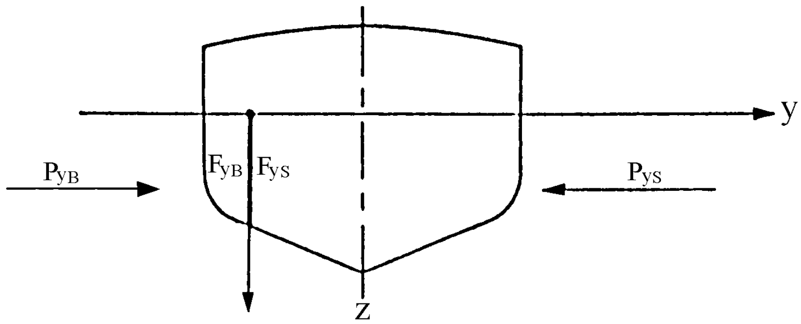
De integraal $\int zdA_Z$ stelt de inhoud ∇ voor van het lichaam gerekend tot aan het vrije vloeistof oppervlak.
Hieruit volgt dat de totale verticale kracht op het lichaam gelijk is aan:

$$F_Z = \rho g \nabla$$

Dit staat bekend als de WET VAN ARCHIMEDES
In woorden:

"Een lichaam, dat zich in rust in een vloeistof bevindt, ondervindt een opdrijvende kracht die gelijk is aan het gewicht van de door het lichaam verplaatste vloeistof".

Tevens kan afgeleid worden, hetgeen hier niet gedaan zal worden, dat de werklijn van de resulterende verticale kracht ten gevolge van de druk over het lichaam gaat door het zwaartepunt van het volume van het door het lichaam verplaatste water.
Dit volume zwaartepunt noemt men het **drukkingspunt.**
Tot nu toe is alleen gekeken naar de verticale component van de hydrostatische druk. Van de horizontale component kan gesteld worden dat de resulterende hiervan voor een drijvend of geheel ondergedompeld lichaam gelijk is aan nul. Dit is eenvoudig in te zien met behulp van de onderstaande figuur en geldt in zijn algemeenheid voor alle gesloten contouren.



Bezien wij de doorsnede van het schip zoals in de figuur aangegeven. Stel dat dit willekeurig gekozen xz-vlak het schip langsscheeps doormidden snijdt. De projectie van het bakboord gedeelte van de scheepshuid op het xz-vlak is gelijk aan de projectie van het stuurboord gedeelte, of te wel:

De linkerkant van de doorsnede is gelijk van vorm aan de rechterkant van de doorsnede, het oppervlak van beide doorsneden is aan elkaar gelijk:

Derhalve zijn ook de statische momenten van deze projecties aan elkaar gelijk, zodat de krachten op A_B en A_S elkaar exact opheffen. Dit geldt uiteraard voor elke willekeurige verticale doorsnijding, zodat het schip geen resulterende horizontale kracht ondervindt, noch een moment.

Terugkerend naar het probleem van de drijvende bak kunnen we nu stellen dat er sprake zal zijn van een verticaal evenwicht als het gewicht van de bak G gelijk is aan het gewicht van het door de bak verplaatste water, ofwel:

Een tweede noodzakelijke voorwaarde is dat de werklijn van het gewicht G en de opdrijvende kracht $\rho g \nabla$ samenvallen aangezien er alleen dan sprake is van momenten-evenwicht.
Bij een homogene vloeistof en een symmetrische massa verdeling van de bak is dit inderdaad het geval. Voor de beoordeling van het evenwicht is het klaarblijkelijk van essentieel belang het volume van het verplaatste water als ook het bijbehorende volume zwaartepunt te kunnen berekenen, ook als het de over het algemeen zeer gecompliceerde vorm van een schip betreft.
Het is daarvoor noodzakelijk de integraal:

$$\nabla = \int_0^{A_Z} z \, dA_Z$$

te kunnen oplossen, anders gezegd het volume van het lichaam moet bepaald kunnen worden door integratie van bijvoorbeeld de hoogte van het verticale zuiltje over de oppervlakte van het lichaam.
Hiertoe is het allereerst noodzakelijk om deze vorm in drie dimensies eenduidig te kunnen vastleggen. Uitgaande hiervan kan dan ondermeer met behulp van numerieke integratie methoden het volume en zwaartepunt berekend worden.

Eerst zullen we nu uiteenzetten hoe de **geometrie** beschreven wordt.