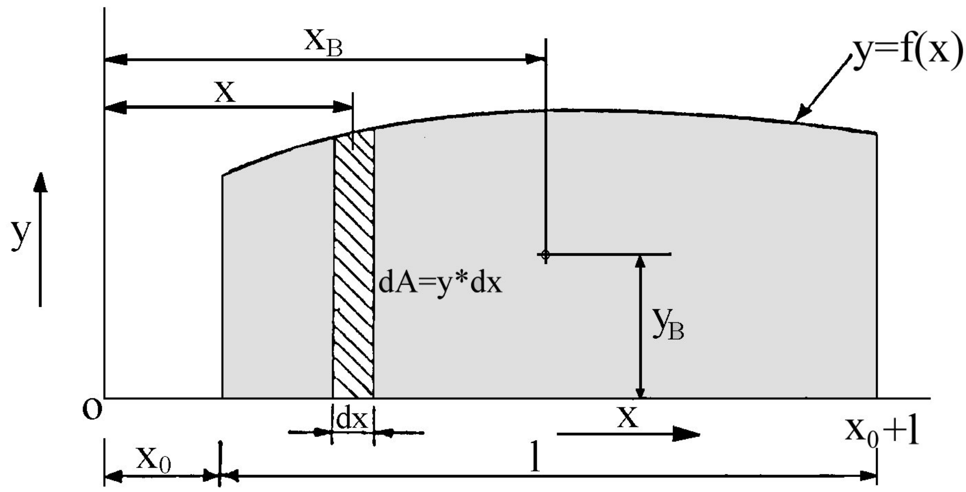
4. NUMERIEKE INTEGRATIE

Uit het voorgaande is gebleken dat oppervlakken, volumina, zwaartepunten, statische momenten etc. een belangrijke rol spelen in de beschouwingen aangaande het evenwicht van drijvende constructies en ook in allerlei andere toepassingen.
Derhalve wordt nu eerst enige aandacht besteed aan hoe men deze grootheden van willekeurig gevormde oppervlakken en lichamen kan berekenen met behulp van numerieke methoden.
Het gebruik van numerieke in plaats van analytische methoden is veelal noodzakelijk omdat de te bewerken lichamen zich veelal niet analytisch laten beschrijven, zoals we hebben gezien bij het vastleggen van de scheepsromp.

Hoe bepalen we nu het oppervlak, het statische moment of het zwaartepunt van een figuur? In het algemene geval, zonder te letten op hoe de integralen worden opgelost, geldt het volgende:
Beschouw een willekeurige continue kromme zoals gegeven in de figuur.



Het **oppervlak** van het gearceerde strookje met hoogte y en breedte dx is gelijk aan: ydx. Het oppervlak A dat begrensd wordt door de x-as, $x = x_o$, $x = x_o + l$ en de kromme wordt gevonden door de sommatie van al deze kleine oppervlakjes. Als we de breedte van het strookje naar nul laten gaan dan kennen we uit de wiskunde voor het oppervlak van de figuur de volgende integraal:

$$A = \int_{x_0}^{x_0+l} y\,dx$$

Het **statische moment** van het oppervlak A ten opzichte van de x-as wordt eveneens gevonden door eerst het statisch moment van het strookje te beschouwen en vervolgens te integreren over de gewenste range.

DEFINITIE:

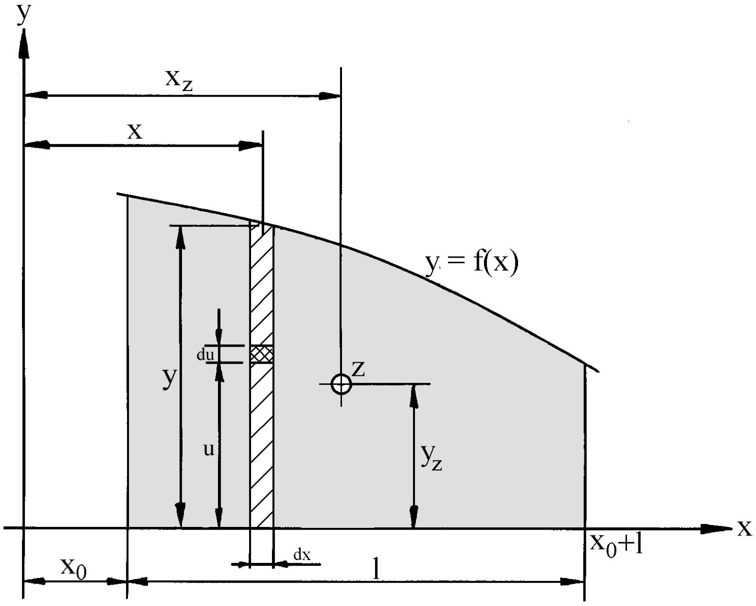
> Het **statische moment** van een oppervlakte elementje (of volume elementje) t.o.v. een bepaalde as is het product van het oppervlak (volume) van het elementje en zijn afstand tot deze as.

Voor een klein elementje van het gearceerde strookje vinden we als statisch moment t.o.v. de x-as:

$$u du dx$$

Voor het gehele strookje geldt dan:

$$dS_x = \int_0^y u\,du\,dx = \frac{1}{2} y^2\,dx$$



En voor het gehele oppervlak A tenslotte:

$$S_x = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_0+l} y^2\,dx$$

Op dezelfde wijze vindt men voor het statische moment van A ten opzichte van de y-as:

$$S_y = \int_{x_0}^{x_0+l} x\,y\,dx$$

Volgens de definities uit de mechanica geldt voor de coördinaten van het zwaartepunt van een oppervlak of volume het volgende:

DEFINITIE

x - coördinaat van het zwaartepunt: S_y/A

y - coördinaat van het zwaartepunt: S_x/A

In de hierna volgende behandeling van het evenwicht en de stabiliteit van drijvende constructies zal ook meermalen gebruik worden gemaakt van het begrip traagheidsmoment. Vandaar:

DEFINITIE:

Het **traagheidsmoment** van een oppervlakte elementje (of volume elementje) ten opzichte van een bepaalde as is het product van het oppervlak (volume) van het elementje en zijn afstand tot de as in het kwadraat.

Ook de traagheidsmomenten van A t.o.v. de x-as en de y-as zijn te bepalen.
Het traagheidsmoment van het strookje ten opzichte van de y-as is:

$$dI_y = x^2\, y\, dx$$

en het traagheidsmoment van het gehele oppervlak A t.o.v. de y-as wordt derhalve gevonden door sommatie van alle strookjes, ofwel:

$$I_y = \int_{x_0}^{x_0+1} x^2\, y\, dx$$

Voor de berekening van het traagheidsmoment t.o.v. de x-as voeren we eerst weer een tussen integratie uit.
Voor het kleine elementje dudx van het strookje is het traagheidsmoment t.o.v. de x-as gelijk aan:

$$u^2 dudx$$

en dus van het gehele strookje (sommatie over de elementjes):

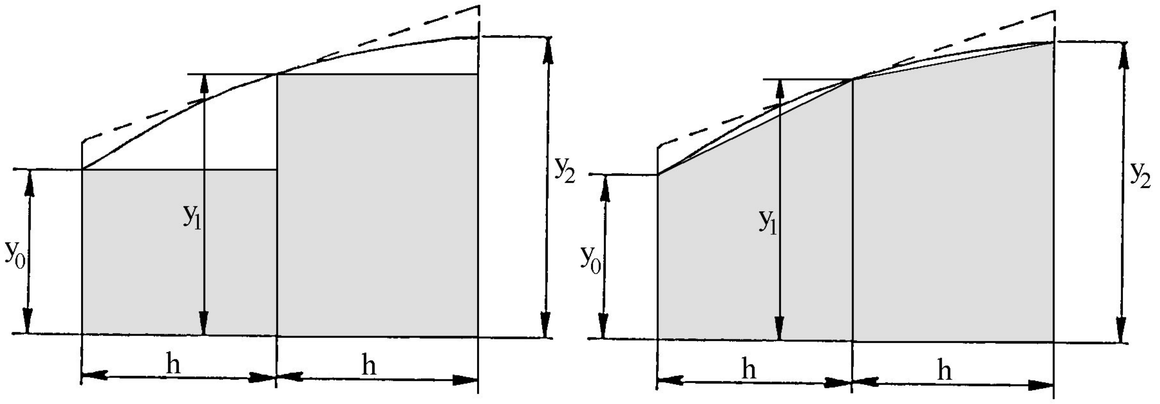
$$dI_x = \int_0^y u^2\, du\, dx = \frac{1}{3} y^3 dx$$

en tenslotte voor het gehele oppervlak A (sommatie over de strookjes):

$$I_x = \frac{1}{3} \int_{x_0}^{x_0+1} y^3\, dx$$

De hier gegeven uitdrukkingen zijn analytische uitdrukkingen. Als in het beschouwde geval y als functie van x bekend zou zijn dan kunnen de integralen zuiver analytisch worden opgelost. In ons geval is dat niet zo en moeten we onze toevlucht nemen tot numerieke methoden uitgaande van de verzameling punten waarmee de scheepsvorm is gedefinieerd.
Zoals we gezien hebben komt integratie neer op oppervlakte bepaling. De meest gebruikte regels voor numerieke integratie zijn **de trapeziumregel** en **de 1e regel van Simpson.**

In het kader van dit college zullen we ons tot deze beide regels beperken, ofschoon er nog een aantal andere zijn.
Beschouw daartoe de volgende figuur.



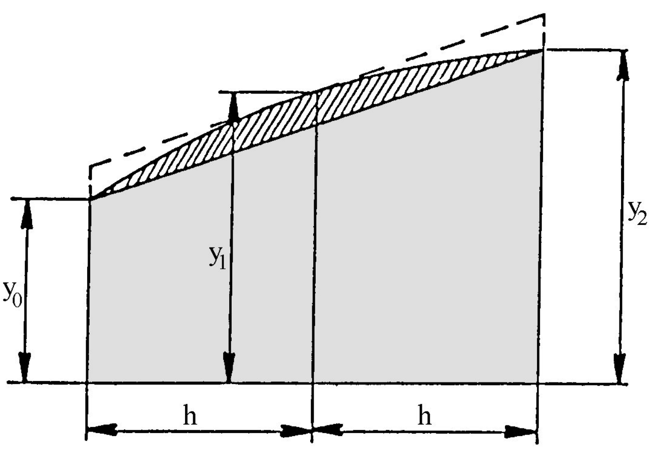
Het oppervlak tussen de x-as, x = x_0, x = x_2 en y = f(x) moet worden bepaald.
Alleen de functiewaarden y_0, y_1 en y_2 voor $x=x_0$, $x=x_1$ en $x=x_2$ zijn bekend (discrete punten).
De meest eenvoudige manier om het oppervlak te benaderen is door het oppervlak te berekenen van een tweetal ingeschreven rechthoeken. Dit staat weergegeven in de linkse figuur. Het oppervlak van een vierkant is eenvoudig te berekenen uit de gegeven functiewaarden en de onderlinge afstanden. De benadering van het werkelijke oppervlak onder de kromme is echter vrij onnauwkeurig, zoals uit de figuur wel blijkt. Deze methode wordt derhalve in de praktijk niet toegepast.
Een andere methode bestaat uit het bepalen van het oppervlak van twee ingeschreven trapezia eveneens gebruikmakende van de gegeven functiewaarden.
Het oppervlak onder de kromme kan dan geschreven worden als:

$$A = \tfrac{1}{2} h\left(y_0 + 2y_1 + y_2 \right)$$

De kromme lijn wordt hier benaderd door twee rechte lijnstukken tussen de drie punten in.
Dit blijkt in de praktijk een redelijke benadering te zijn voor het oppervlak voor niet te sterk gekromde lijnstukken.
Deze regel staat bekend als **de trapeziumregel.**

Een derde benadering wordt gevonden door het oppervlak onder de kromme te splitsen in een gedeelte te benaderen door een trapezium en het resterende gedeelte door een tweedegraads functie. Het oppervlak van het trapezium is dan gelijk aan:

$$2h \frac{y_0 + y_2}{2} = h\,(y_0 + y_2)$$



1e regel van Simpson

Het oppervlak van het gearceerde gedeelte wordt benaderd met behulp van het bekende oppervlak van een parabool en wordt dan:

$$\frac{2}{3} 2h \left(y_1 - \frac{y_0 + y_2}{2}\right) =$$

$$\frac{4}{3} h\, y_1 - \frac{2}{3} h\, y_0 - \frac{2}{3} h\, y_2$$

Het totale oppervlak wordt nu gevonden door de twee gedeelten bij elkaar op te tellen. We vinden dan:

$$A = h\,(y_0 + y_2) + \frac{4}{3} h\, y_1 - \frac{2}{3} h\, y_0 - \frac{2}{3} h\, y_2$$

$$A = \frac{1}{3} h\,(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Dit is **de eerste regel van Simpson.**

Een grotere nauwkeurigheid wordt bereikt als de te berekenen figuur wordt onderverdeeld in meer gedeelten, waarvan het **aantal altijd even moet zijn.**
Er geldt dan de algemene formule, welke gevonden wordt door het oppervlak van twee gedeelten te bepalen en uiteindelijk over alle gedeelten te sommeren:

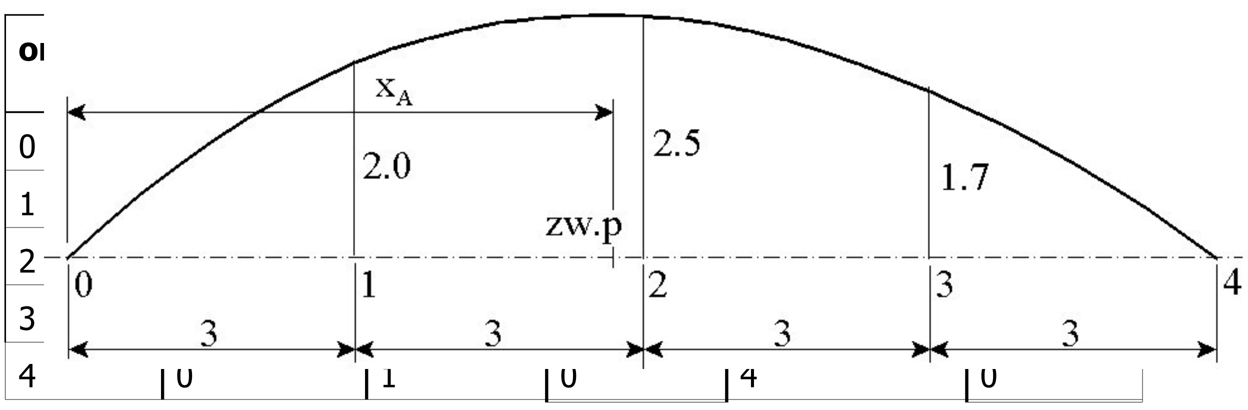
$$A = \tfrac{1}{2} h\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + \ldots + 4y_{n-1} + y_n \right)$$

De factoren 1, 4, 2, 4, 2, 4, ... 4, 1 worden wel de **Simpson factoren** genoemd.

Met behulp van een voldoende aantal verdeelstukken is een hoge nauwkeurigheid te bereiken. In de regel ligt de te bereiken nauwkeurigheid binnen enkele tienden van een procent.

Ter illustratie volgt hieronder een eenvoudig voorbeeld.

waterlijn BB helft



Σ_1 = 19.8 Σ_2 = 38.4

$$A = 2 \cdot \tfrac{1}{3} \cdot 3 \cdot 19.8 = 39.6\ m^2$$

$$x_A = 3 \cdot {}^{38.4}\!/_{19.8} = 5.82\ m$$

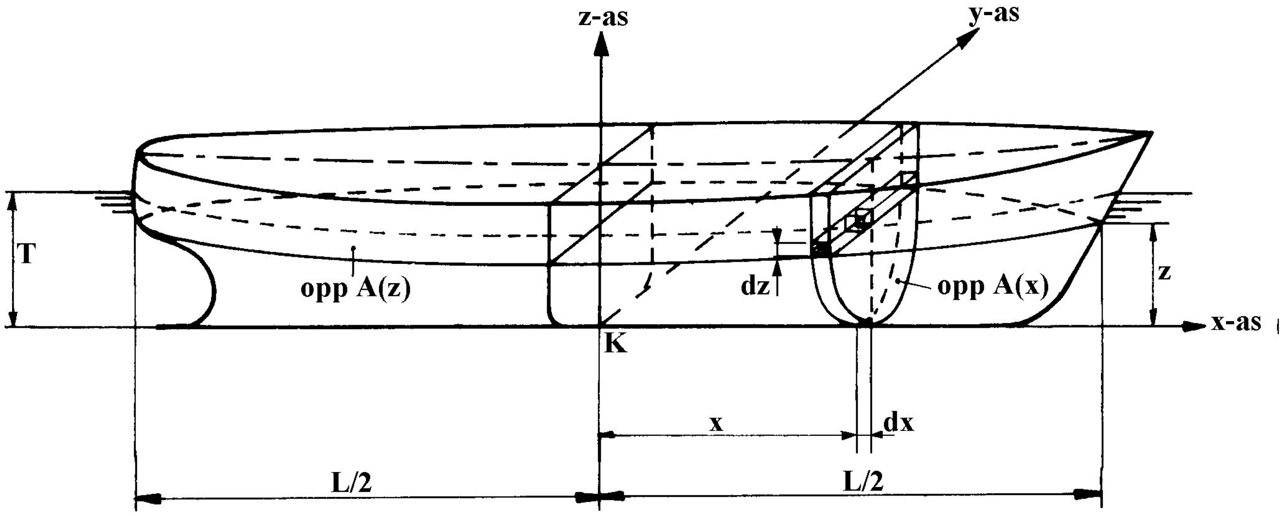
In het bovenstaande hebben we gedemonstreerd hoe we het oppervlak van een figuur kunnen bepalen met behulp van een numerieke methode.
Alle noodzakelijke integraties zijn aldus uit te voeren:

Immers een integraal als: $I_x = \frac{1}{3}\int_{x_0}^{x_0+1} y^3\, dx$

Kan opgevat worden als: $I_x = \frac{1}{3}\int_{x_0}^{x_0+1} t\, dx$

Waarin $t = y^3$ dus I_x is 1/3 van het oppervlak tussen $t = f(x)$, $x = x_0$, $x = x_0+1$ en de x-as.

Het berekenen van een volume kan uitgevoerd worden door tweemaal een oppervlakte integratie uit te voeren. We zullen dit trachten toe te lichten.



In het algemene geval wordt de inhoud van een lichaam zoals gegeven in de onderstaande figuur gegeven door:

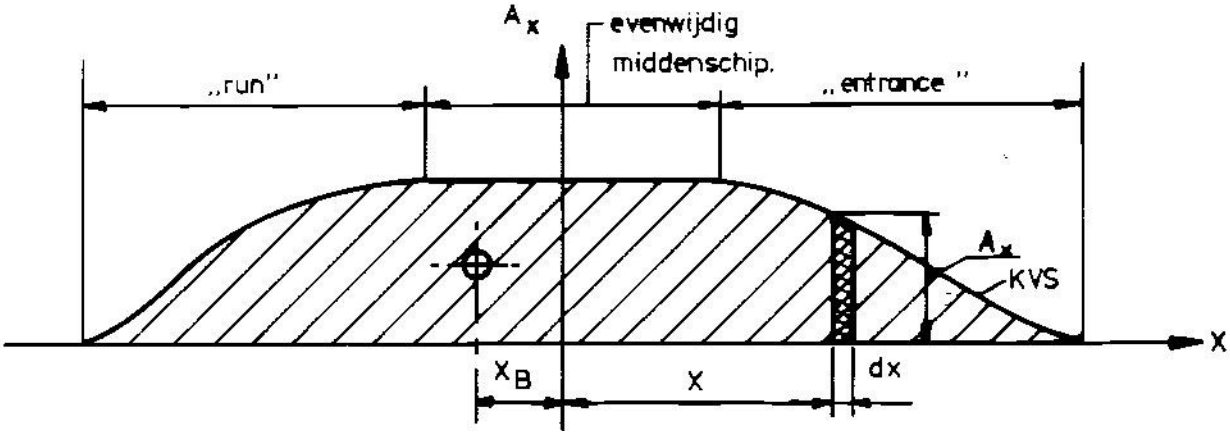
$$\nabla = 2\int_{0}^{z_T}\int_{-x_T}^{x_T} y\, dx\, dz$$ (factor 2 vanwege de symmetrie)

We kunnen dit op twee manieren splitsen in twee achter elkaar op te lossen oppervlakte integralen. Ten eerste door nu de oppervlakte integraal op te lossen:

$$2\int_{0}^{T} y\, dz = A_x$$

wordt de oppervlakte berekend van de dwarsdoorsnede van de vorm (spantoppervlak).

Door dit voor een groot aantal (bijvoorbeeld 20) waarden van x te doen en de aldus verkregen waarden van de spantoppervlakken te plotten op basis van hun onderlinge afstand, verkrijgt men een figuur zoals hieronder weergegeven, voorstellende de verdeling van het dwarsdoorsnede oppervlak over de lengte van het lichaam.



Door hiervan de oppervlakte te bepalen met behulp van dezelfde numerieke integratiemethode wordt in feite de integraal:

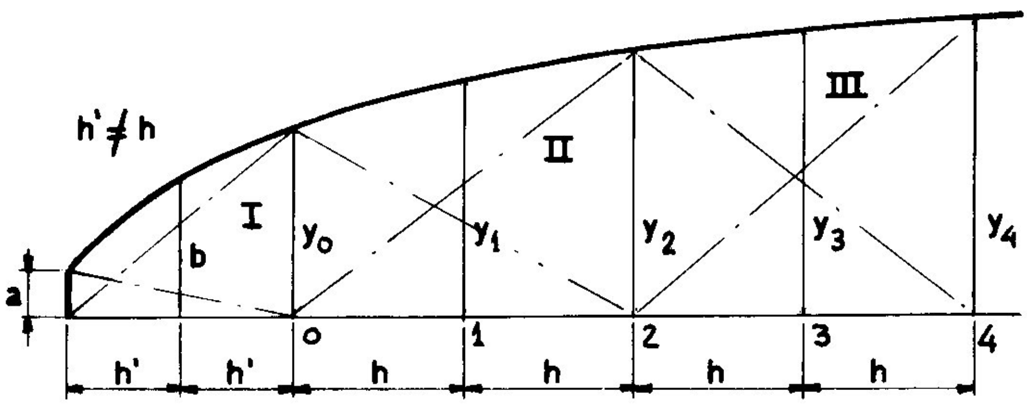
$$\nabla = 2\int_{-x_T}^{x_T} A_x dx$$

opgelost. Hiermee is het volume van het lichaam bepaald : de integraal van het doorsnede oppervlak over de lengte van het lichaam is het volume.

Voorbeeldsom:

Lwl: 125.00 m
Lord: 121.00 m
Alle spantoppervlakken zijn bekend (zie Simpsontabel op blz.4.9).

Als men uitgaat van 10 spanten volgt hieruit dat de spantafstand 12.10 m is (h=121/10 =12.10 m). Men ziet dat de waterlijnlengte (L_{wl}) groter is dan de ordinaatlengte (L_{ord}). Dit betekent dat er achter ordinaat 0 nog waterverplaatsing gegenereerd wordt. Dit moet natuurlijk meegenomen worden in de berekening van de waterverplaatsing en het drukkingspunt. Dit doet men met behulp van een eindcorrectie, zie onderstaand figuur.



De ordinaatafstand h is groter dan h`. Het verschil in ordinaat afstand wordt als volgt gebruikt:

ord. nr.	Ax	s.f.	Ax * s.f.	m.f. tov. ord 5	Ax * s.f. * m.f.
a		1 * h`/h		-(2*h`/h + 5)	
b		4 * h`/h		-(h`/h + 5)	
0		1 * h`/h + 1		-5	
1		4		-4	
2		2		-3	

enz.

De Simpson factoren worden als het ware gereduceerd in verband met een afwijkende ordinaatafstand. Op deze wijze kunnen deze eindcorrecties in de rekentabellen worden opgenomen zonder verstoring van de systematiek van de berekening. Nu zullen de waterverplaatsing en het drukkingspunt berekend worden m.b.v. een Simpsontabel:

Opmerking: h` is bepaald m.b.v. het verschil van de L_{wl} met L_{ord}.
h` = $(L_{wl} - L_{ord})/2 = 2$ m.

ord. nr.	Ax (m^2)	s.f.	Ax*s.f.	m.f.	Ax*s.f.*m.f.
a	0	0.165	0	-5.331	0
b	1.00	0.661	0.66	-5.165	-3.42
0	2.90	1.165	3.38	-5	-16.90
1	36.60	4	146.40	-4	-585.60
2	82.70	2	165.40	-3	-496.20
3	117.00	4	468.00	-2	-936.00
4	134.10	2	268.20	-1	-268.20
5	137.26	4	549.04	0	0.00
6	128.70	2	257.40	1	257.40
7	106.80	4	427.20	2	854.40
8	72.70	2	145.40	3	436.20
9	29.00	4	116.00	4	464.00
10	0	1	0	5	0
		SOM 1=	2547.08	SOM 2=	-294.31
Waterverplaatsing:		1/3*h*SOM 1 =		10273.22	m^3
Drukkingspunt Xb:		h* SOM 2/SOM 1 =		-1.40	m

We zouden de integratie ook andersom uit kunnen voeren. Uitgaande van de integraal welke het volume van het lichaam bepaalt:

$$\nabla = 2\int_{0}^{z_T}\int_{-x_T}^{x_T} y\,dx\,dz$$

kunnen we eerst de integraal

$$2\int_{-x_T}^{x_T} y\,dx = A_z$$

oplossen.

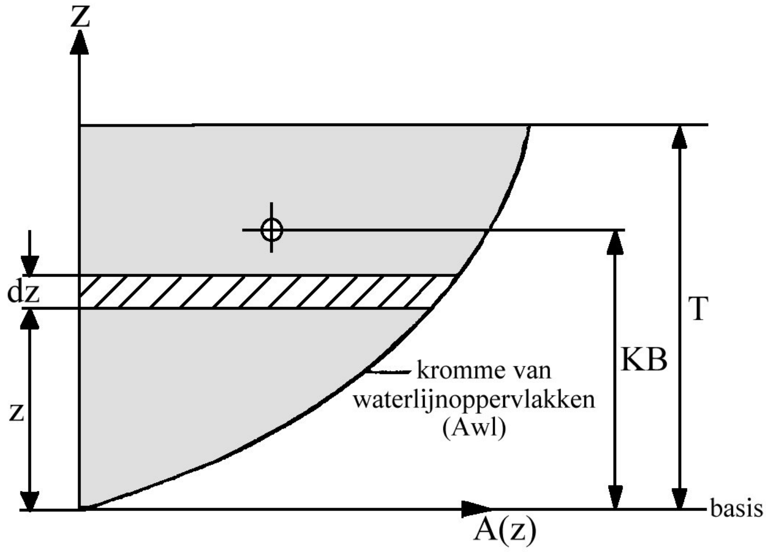
Dit stelt voor het waterlijnoppervlak van het lichaam voor een bepaalde z.
Door deze te plotten op basis van hun onderlinge afstand en het oppervlak van de aldus ontstane figuur te bepalen wordt eveneens het volume van het lichaam bepaald.
Voor de bepaling van het evenwicht was ook de positie van het zwaartepunt in hoogte en in lengte van belang.
Deze hoogte- en lengteligging van het zwaartepunt van het volume (het drukkingspunt) wordt nu gevonden door het statische moment van de waterverplaatsing t.o.v. respectievelijk het xy en het zy vlak te bepalen. Afgeleid is reeds dat:

$$z_B = \frac{\text{statisch moment volume t.o.v. x - y vlak}}{\text{volume}}$$

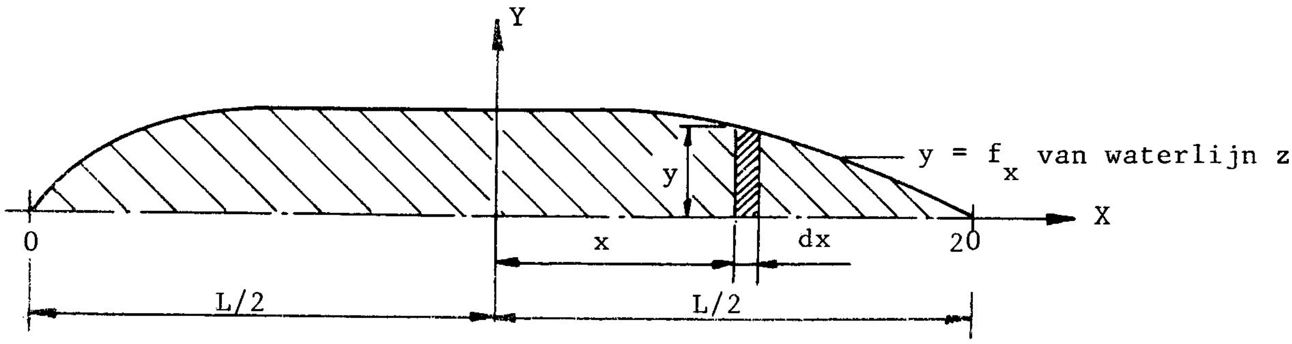
waaruit volgt:

$$z_B = \frac{\int_{0}^{z_T} A_z\, z\, dz}{\nabla}$$

Eerst wordt nu dus voor verschillende waarden van z een discrete voorstelling van de waterlijn gemaakt en deze vervolgens geïntegreerd tot een waterlijn oppervlak. Deze waterlijn oppervlakken worden geplot op basis van z. Elk van de ordinaten van deze figuur, voorstellende een waterlijn oppervlak, wordt vervolgens vermenigvuldigd met zijn afstand z tot het vlak xy en opnieuw geplot op basis van z. Van de aldus ontstane figuur wordt nu tenslotte het oppervlak bepaald, voorstellende het gevraagde statische moment.



Voor het statische moment ten opzichte van het zy-vlak wordt een eendere procedure gevolgd maar nu met de ordinaat oppervlakken.
Door de aldus verkregen statische momenten te delen door het volume van het lichaam worden de x en z coördinaat van het zwaartepunt verkregen ten opzichte van de referentie vlakken ten opzichte waarvan de statische momenten bepaald zijn.



Voorbeeldsom:

Hetzelfde schip als bij het vorige voorbeeld zal gebruikt worden.
Gegeven: Diepgang T: 7.20 m

Om te beginnen moet men op iedere spant de breedte van het schip weten bij een bepaalde waterlijn, bijv. de constructiewaterlijn (CWL). De breedte op elk spant is gegeven. Bovenstaande figuur stelt een waterlijn voor. Ook hier geldt weer dat een waterlijn niet

precies op een spant hoeft te beginnen en te eindigen. Daarom moet ook hier weer gebruik gemaakt worden van de eindcorrectie. Zie eerste Simpsontabel op blz.4.9.
Voor de CWL geldt hier ook dat de h` = 2 m en dus h`/h = 0.165.

CWL					
ord. nr.	1/2 br. = y (m)	s.f	y s.f.	m.f.	y s.f. m.f.
a	0	0.165	0	-5.331	0
b	0.888	0.661	0.59	-5.165	-3.03
0	1.625	1.165	1.89	-5	-9.47
1	6.525	4	26.10	-4	-104.40
2	9.013	2	18.03	-3	-54.08
3	9.800	4	39.20	-2	-78.40
4	9.800	2	19.60	-1	-19.60
5	9.800	4	39.20	0	0.00
6	9.800	2	19.60	1	19.60
7	8.238	4	32.95	2	65.90
8	6.838	2	13.68	3	41.03
9	3.613	4	14.45	4	57.80
10	0	1	0	5	0
		SOM 1=	225.28	SOM 2=	-84.65
Aw:	Waterlijnopp.:	2*1/3*h*SOM 1 =		1817.26	m^2
Xa:	wl. zwaartepunt:	h* SOM 2/SOM 1 =		-4.55	m

Men herhaalt deze berekening voor de andere waterlijnen (vlaklijn, 1/4-wl, 1/2-wl, 3/4-wl). Zodoende krijgt men voor iedere waterlijn een oppervlak A_w en een waterlijnzwaartepunt x_a. Door vervolgens deze ook weer te Simpsoneren krijgt men een waterverplaatsing, de lengteligging van het drukkingspunt x_b en de hoogteligging van het drukkingspunt KB; zie onderstaande Simpsontabel.

Waterlijn	Aw	s.f.	Aw s.f.	Xa	Aw s.f. Xa	z	Aw s.f. z
Vlak	668.16	1	668.16	1.36	908.70	0.00	0
1/4-WL	1241.93	4	4967.72	-0.61	-3030.31	1.80	8942
1/2-WL	1452.25	2	2904.50	-1.12	-3253.04	3.60	10456
3/4-WL	1598.34	4	6393.36	-2.04	-13042.45	5.40	34524
CWL	1817.26	1	1817.26	-4.55	-8268.53	7.20	13084
		som 1 =	16751.00	som 2 =	-26685.64	som 3 =	67007
Waterverplaatsing:		1/3 * (T/4) * som 1 =		10050.60	m^3		
B in lengte Xb:		som 2/som 1 =		-1.59	m		
B in hoogte KB:		som 3/som 1 =		4.00	m		