7. COMPAROLOGIE IN DE MARITIEME TECHNIEK

Experimenteel onderzoek kan worden gescheiden in twee typen onderzoek.

Het eerste is het zogenaamde directe onderzoek. Hierbij wordt het te onderzoeken probleem op het voorwerp zelf onderzocht. Te denken valt hierbij bijvoorbeeld aan een trekproef om de treksterkte van staal te bepalen of een meting aan de uitgaande as van een motor om de koppel-toeren karakteristiek vast te stellen. Nadeel is dat het te onderzoeken voorwerp of systeem in zijn uiteindelijke gedaante beschikbaar moet zijn voor de proef. In het ontwerpstadium van grote en of gecompliceerde systemen, waarbij optimalisaties vaak een belangrijke rol spelen, is dit een weinig gangbare methode.

Het tweede type onderzoek is het modelonderzoek. Hierbij wordt de werkelijke situatie door een model nagebootst. Door proefnemingen aan het model (op schaal) tracht men de eigenschappen van het prototype (ware grootte) te bepalen.
Ook modelonderzoek is weer onder te verdelen in een aantal typen, waarvan nu slechts genoemd worden modelonderzoek met behulp van mathematische rekenmodellen of modelonderzoek met fysische modellen.
In het geval van experimentele schaalproeven wordt gelijkvormigheid van model en het prototype nagestreefd. Dit is noodzakelijk om de extrapolatie van de model gegevens naar prototype mogelijk te maken. In de praktijk betekent dit dat aan een aantal modelwetten moet worden voldaan.

Bij een proef met een scheepsmodel bestaat het fysische model uit een combinatie van een geschaald scheepsmodel en water, welke laatste ten opzichte van het prototype niet geschaald is.
Dit geeft de nodige complicaties, waarop later teruggekomen wordt.

De gelijkvormigheid van model en prototype heeft betrekking op:

- de geometrische gelijkvormigheid

- de kinematische gelijkvormigheid

- de dynamische gelijkvormigheid

De geometrische gelijkvormigheid betekent dat er een evenredigheid bestaat tussen de afmetingen van model en prototype.
Er is een vaste verhouding tussen alle overeenkomstige maten van het model en het prototype. Dit noemt men de lineaire schaal.
Deze schaal wordt gebruikt voor alle lengte maten, inclusief waterdiepte, kanaalbreedte, golflengte etc. etc. voor zover van belang voor het te onderzoeken probleem.

De kinematische gelijkvormigheid betekent evenredigheid van de snelheidsvectoren en hun verschillende componenten in de overeenkomende punten van de stromingsvelden rond model en prototype.

De dynamische gelijkvormigheid betekent evenredigheid van de overeenkomende krachten en hun verschillende componenten.
De drukkrachten, de traagheidskrachten, de wrijvingskrachten en de krachten ten gevolge van oppervlakte spanningen moeten bij model en prototype in dezelfde verhouding optreden om de gelijkvormigheid te waarborgen.

Samengevat: alle plaats-, snelheid- en krachtvectoren moeten in overeenkomende punten van model en prototype dezelfde richting hebben (argument), terwijl de grootte (modulus) van de verschillende vectoren in een constante verhouding ten opzichte van elkaar moeten staan.

De vergelijkingswet van Newton

In deze beschouwing beperken we ons eerst tot een homogene, onsamendrukbare en wrijvingsloze vloeistof.
Er is geen vrij vloeistof oppervlak en er vindt geen afgifte plaats van damp of opgesloten gassen uit de vloeistof.
In dat specifieke geval heeft de absolute druk geen invloed op de vloeistofstroming: de stroming wordt slechts bepaald door het evenwicht tussen traagheidskrachten en drukkrachten.
Traagheidskrachten en drukkrachten hebben beide dezelfde schaalfactoren.
Stel nu dat de volgende schaalfactoren gelden van prototype naar model:

lengte afmeting:	α_L	$\left(L_p = \alpha_L L_m\right)$
snelheid:	α_V	$\left(V_p = \alpha_V V_m\right)$
dichtheid:	α_ρ	$\left(\rho_p = \alpha_\rho \rho_m\right)$

De tijd in prototype moet dan vermenigvuldigd worden met:

$$\frac{\alpha_L}{\alpha_V} \qquad \left(\frac{m}{m/s} = s\right)$$

om de tijd in het model te vinden.

Versnellingen in het prototype moeten vermenigvuldigd worden met:

$$\frac{\alpha_V^2}{\alpha_L} \qquad \left(\frac{m^2/s^2}{m} = m/s^2\right)$$

om de versnellingen in het model te vinden.

De traagheidskrachten en de resulterende drukkrachten hebben beide als schaalfactor:

$$\alpha_{\rho}\,\alpha_{V}^{2}\,\alpha_{L}^{2} \qquad (\alpha_{\rho}\,\alpha_{L}^{3}\,\frac{\alpha_{V}^{2}}{\alpha_{L}})$$

Bedenk hierbij dat een traagheidskracht een massa maal een versnelling is. Ofwel een soortelijke massa maal een volume maal een versnelling. De dimensie van een drukkracht wordt gevonden uit de vergelijking van Bernouilli en blijkt daaraan uiteindelijk gelijk te zijn.

Derhalve is: $F_p = \alpha_{\rho}\,\alpha_{V}^{2}\,\alpha_{L}^{2}\,F_m$

Of $$\frac{F_p}{F_m} = \frac{\rho_p\,V_p^2\,L_p^2}{\rho_m\,V_m^2\,L_m^2} = \alpha_{\rho}\,\alpha_{V}^{2}\,\alpha_{L}^{2}$$

En $$F_p = \frac{F_m}{\rho_m\,V_m^2\,L_m^2} * \rho_p\,V_p^2\,L_p^2$$

Blijkbaar kan men hiervoor schrijven:

$$F_p = C\,\frac{1}{2}\,\rho_p\,V_p^2\,L_p^2$$

$$F_m = C\,\frac{1}{2}\,\rho_m\,V_m^2\,L_m^2$$

waarin C een constante is die voor het beschouwde geval (gelet op de eerder gedane aannamen betreffende de ideale vloeistof) niet van de schaal afhankelijk is.

Deze formules geven de algemene vergelijkingswet van Newton weer. We herkennen hierin de weerstandscoëfficiënt van de onderzochte lichaamsvormen in het hoofdstuk over de weerstand.
Deze zijn, mits aan de schaalfactoren wordt voldaan, voor model en prototype gelijk zodat de modelcoëfficiënten gebruikt mogen worden om prototype krachten te berekenen.
Het betreft hier uitsluitend geheel omstroomde lichamen, zonder de aanwezigheid van het vrije vloeistofoppervlak.
Modelproeven om de weerstand van een schip te bepalen komen dadelijk aan de orde.

Modelregel van Reynolds.

In het geval dat in het model de viskeuze krachten niet verwaarloosd mogen worden blijkt de modelregel van Reynolds van belang.

Stel dat de schaalfactor α_η geldt voor de viscositeitscoëfficiënt.
Dan is de schaalfactor voor de schuifkrachten welke het resultaat zijn van de viscositeit van de vloeistof:

$$\alpha_{\eta}\,\alpha_{V}\,\frac{\alpha_{L}^{2}}{\alpha_{L}} = \alpha_{\eta}\,\alpha_{V}\,\alpha_{L}$$

pro memorie: $\tau \ dA = \frac{du}{dz} dA$ (dA = oppervlakte elementje)

De dynamische gelijkvormigheid vereist in dat geval dat:

schaal schuifkracht = schaal traagheidskracht

$$\alpha_\eta \ \alpha_V \ \alpha_L = \alpha_\rho \ \alpha_V^2 \ \alpha_L^2$$

ofwel:

$$\frac{\alpha_\rho \ \alpha_V \ \alpha_L}{\alpha_\eta} = 1$$

Dit is de modelregel van Reynolds.

Blijkbaar geldt voor het model en het prototype het kengetal Re, bekend als het Reynoldsgetal waarbij:

$$Re = \frac{\rho \ V L}{\eta}$$

waarin L de lengte van het omstroomde lichaam in stromingsrichting is.

Ook schrijft men: $\nu = \frac{\eta}{\rho}$

waarin: ν de kinematische viscositeitscoëfficiënt voorstelt.

Derhalve valt voor Re te schrijven:

$$Re = \frac{V L}{\nu}$$

Met:

- V in m/s
- L in m
- ν in m²/s

Als indicatie gelden de volgende waarden voor ν bij 20 graden Celsius:

zoetwater : $\nu = 10^{-6} \ m^2/s$

zoutwater : $\nu = 1.05 \cdot 10^{-6} \ m^2/s$

droge lucht: $\nu = 1.50 \cdot 10^{-5} \ m^2/s$

Voor model en prototype dient het getal van Reynolds gelijk te zijn om tot een verantwoorde extrapolatie te komen. Dat wil zeggen dat als de lengte met een factor 10 verkleind wordt om aan een model te komen, de snelheid van het langs stromende water

met een factor 10 verhoogd zou moeten worden om hetzelfde Reynolds-getal te behouden.
Voorbeeld:
Een schip met een waterlijnlengte van 100 meter heeft een snelheid van 20 knopen. Het Reynolds getal voor de stroming:

$$\mathrm{Re} = \frac{100 \cdot 20 \cdot 0.5144}{1.05 \cdot 10^{-6}} = 0.98 \cdot 10^{9}$$

Modelregel van Froude

Als de vloeistof in het te beschouwen probleem ook een vrij vloeistof oppervlak heeft, dan gaat ook de zwaartekracht een rol spelen, zoals gebleken is bij de beschouwing over de hydrostatische druk en de golven rond een varend schip.
De zwaartekracht op een vloeistofdeeltje ten gevolge van de zwaartekrachtsversnelling is:

$$F = ma$$
$$F = \rho\, d\nabla \cdot g$$

zodat met een schaalfactor α_g voor de versnelling van de zwaartekracht de schaalfactor voor de zwaartekrachten gelijk is aan:

$$\alpha_\rho\, \alpha_g\, \alpha_L^3 \qquad (\alpha_{volume}\, \alpha_L^3)$$

De eerder geformuleerde eis ten aanzien van de dynamische gelijkvormigheid eist nu dat de schaalfactor voor de traagheidskrachten gelijk moet zijn aan de schaalfactor voor de zwaartekrachten. Voor de traagheidskrachten hadden we reeds eerder afgeleid dat de schaalfactor is:

$$\alpha_\rho\, \alpha_V^2\, \alpha_L^2$$

zodat:

$$\alpha_\rho\, \alpha_g\, \alpha_L^3 = \alpha_\rho\, \alpha_V^2\, \alpha_L^2$$

of:

$$\frac{\alpha_V^2}{\alpha_g\, \alpha_L} = 1$$

Hieruit volgt dan de uitdrukking:

$$\mathrm{Fn}^2 = \frac{V^2}{g\,L}$$

voor model en prototype gelijk moet zijn om een dynamische gelijkvormigheid te waarborgen. In algemene vorm:

$$\mathrm{Fn} = \frac{V_p}{\sqrt{g\,L_p}} = \frac{V_m}{\sqrt{g\,L_m}}$$

Dit is de modelregel van Froude.

Men noemt: $\mathrm{Fn} = \dfrac{V}{\sqrt{g\,L}}$ het kengetal van Froude

Als aan deze modelregel ten aanzien van het gelijk zijn van het getal van Froude voor model en prototype is voldaan dan is het golfbeeld op modelschaal gelijk aan het golfbeeld in prototype. Derhalve mag verwacht worden dat ook de golfweerstand op modelschaal gelijk is.
Voor het geval van een schaalmodel van een schip dat 10 keer kleiner is dan het prototype en met behulp waarvan de weerstand van het schip bepaald moet worden, geldt dus dat de modelsnelheid de vierkantswortel uit 10 kleiner zal moeten zijn om hieraan te voldoen.
Voorbeeld:
Voor een schip met een waterlijnlengte van 100 m en snelheid van 20 knopen is :

$$\mathrm{Fn} = \frac{10.3}{\sqrt{9.8 \cdot 100}} = 0.33$$

Bij het bepalen van de weerstand van een schip met behulp van modelproeven doet zich nu een probleem voor, dat hieronder zal worden toegelicht.
Zoals inmiddels bekend speelt bij de weerstand van een schip zowel de vorm-, druk- en golfweerstand als ook de wrijvingsweerstand een belangrijke rol.
Om een modelproef naar behoren te kunnen uitvoeren zou dan zowel aan de modelregel van Reynolds als ook aan die van Froude moeten worden voldaan, om zowel de zwaartekracht als de wrijvingskracht op de juiste schaal te brengen. Neem als voorbeeld weer het schip met een waterlijnlengte van 100 meter en een snelheid van 20 knopen. Hiervan wenst men de weerstand door middel van een modelproef te bepalen.
Stel nu dat de lineaire modelschaal α_L gelijk is aan 40, dus

$$\alpha_L = 40$$

Dan volgt voor de modelsnelheid bij een gelijke versnelling van de zwaartekracht in model en prototype, dwz : $\alpha_g = 1$

$$20 \cdot s \frac{0.514}{\sqrt{40}} = 1.627 \text{ m/s}$$

waarmee voldaan wordt aan de modelregel van Froude.
Het kengetal van Reynolds is in dit geval voor zoetwater van 20 graden Celsius:

$$\mathrm{Re}_m = \frac{1.627 \cdot \frac{100}{40}}{10^{-6}} = 4.07 \cdot 10^6$$

Vergelijk dit met het eerder gevonden kengetal van Reynolds voor het schip op ware grootte, dan blijkt die te zijn:

$$\mathrm{Re}_p = 0.98 \cdot 10^9$$

Om aan de modelregel van Reynolds te kunnen voldoen zijn er nu twee mogelijkheden: de viscositeit van de vloeistof waarin de modelproef wordt uitgevoerd moet circa 240 maal zo groot zijn als die van water. Zo een vloeistof is praktisch gesproken niet voor handen.
Ten tweede zou de snelheid circa 240 keer groter moeten zijn dan in prototype. Dit is strijdig met de snelheid gevonden door de modelwet van Froude. Voor een van de twee modelwetten zal nu gekozen moeten worden.
De golfvorming aan het oppervlak en daarmee de golfweerstand is van doorslaggevend belang bij de bepaling van de weerstand van oppervlakte schepen en is veel moeilijker te benaderen dan de wrijvingsweerstand. Bij schaalproeven met oppervlakte schepen wordt derhalve in het algemeen wel voldaan aan de modelregel van Froude maar niet aan de modelregel van Reynolds.
Dat het onmogelijk is aan beide wetten te voldoen is ook in te zien door de schaalfactoren voor de viscositeit, voor de zwaartekrachten en de traagheidskrachten aan elkaar gelijk te stellen:

$$\alpha_\eta \, \alpha_V \, \alpha_L = \alpha_\rho \, \alpha_g \, \alpha_L^3 = \alpha_\rho \, \alpha_V^2 \, \alpha_L^2$$

Hieruit is af te leiden dat bij $\alpha_g = 1$

$$\left(\frac{\alpha_\eta}{\alpha_\rho} \right)^2 = \alpha_L^3 = \alpha_V^6$$

De viscositeit bepaalt zowel de lineaire schaal als de snelheidsschaal.
Bij ongeveer gelijke kinematische viscositeit bij prototype en model $(\alpha_\eta / \alpha_\rho) = 1$
moet dan $\alpha_V = \alpha_L = 1$, dus geen modelproef mogelijk.

Het niet voldoen aan de modelregel van Reynolds veroorzaakt het zo genaamde **schaaleffect**, waardoor de constante C in de algemene vergelijking van Newton voor model en prototype niet gelijk is.
Dit betekent dat de extrapolatie van de modelresultaten naar het prototype niet zonder meer kan geschieden. De extrapolatie van modelproef resultaten naar het prototype moet daarom voor oppervlakte schepen op een speciale manier uitgevoerd worden. Dit zullen we hierna bespreken.

Extrapolatie methode volgens Froude

Voor het bepalen van de weerstand van een schip wordt een modelproef gedaan met een schaalmodel van het schip. Het schaalmodel voldoet aan de eisen ten aanzien van geometrische, kinematische en dynamische gelijkvormigheid met dien verstande dat bij de uitvoering van de proef wel voldaan wordt aan de modelwet van Froude maar niet aan de modelwet van Reynolds.
De snelheid in prototype en in model verhouden zich dus met de wortel uit de schaal.
De weerstand die nu voor het model gevonden wordt uit de modelproef als functie van de snelheid moet worden omgeschaald. Zoals gedemonstreerd voldoet door het niet

aanhouden van de modelwet van Reynolds de wrijvingsweerstand niet aan de algemene modelwet van Newton. Deze kan dus niet zonder meer omgeschaald worden.

De golfmakende weerstand kan wel omgeschaald worden omdat wel aan de modelwet van Froude voldaan wordt. Het is dus noodzakelijk beide weerstandscomponenten van elkaar te scheiden zodat zij afzonderlijk omgeschaald kunnen worden. Daartoe wordt de wrijvingsweerstand van het model uitgerekend. Hierbij wordt gebruik gemaakt van de weerstandscoëfficiënt zoals die gevonden is voor vlakke platen, waarvan de golf- en drukweerstand gelijk aan nul verondersteld worden. De totale weerstand van deze platen wordt derhalve verondersteld wrijvingsweerstand te zijn. De resulterende wrijvingsweerstandscoëfficiënt is dan uitsluitend nog een functie van het Reynolds getal van de stroming langs de plaat. Hierin zit de invloed van het laminaire of turbulente karakter van de stroming vervat. Alle Sleeptanks van de wereld hebben indertijd afgesproken om van alle beschikbare relaties tussen de wrijvingsweerstandscoëfficiënt en het getal van Reynolds er één te kiezen, welke in formulevorm gegeven wordt door:

$$C_F = \frac{0.075}{(^{10}\log \mathrm{Re} - 2)^2}$$

Voor het specifieke Reynoldsgetal geldend voor de stroming rond het model wordt de wrijvingsweerstand voor het model bepaald met behulp van:

$$R_{Fm} = \frac{1}{2}\rho \cdot V_m^2 \cdot A_m \cdot C_{Fm}$$

waarin:	V_m	modelsnelheid	(m/s)
	A_m	nat oppervlak romp	(m^2)
	C_{Fm}	wrijvingscoëfficiënt model	

De restweerstand van het model wordt gevonden door deze wrijvingsweerstand van de totale weerstand af te trekken, volgens

$$R_{Rm} = R_{Tm} - R_{Fm}$$

De prototype restweerstand wordt nu gevonden door de restweerstand om te schalen volgens

$$R_{Rp} = R_{Rm}\alpha_L^3$$

De wrijvingsweerstand voor het prototype wordt gevonden door met het daar geldende Reynolds getal de wrijvingscoëfficiënt in prototype omstandigheden uit te rekenen en met behulp daarvan de wrijvingsweerstand met de prototype snelheid en nat oppervlak.

$$R_{Fp} = \frac{1}{2}\rho \cdot V_p^2 \cdot A_p \cdot C_{Fp}$$

De totale weerstand van het schip op ware grootte is dan:

$$R_{Tp} = R_{Rp} + R_{Fp}$$

Behalve de weerstand van schepen worden ook vele andere eigenschappen van het uiteindelijk te bouwen schip bepaald met modelproeven. Te denken valt hierbij bijvoorbeeld aan het gedrag van het schip in zeegang. Zoals bekend verondersteld mag worden is het wateroppervlak op zee slechts zelden rustig.
In de meeste gevallen doet zich er in meer of mindere mate golfvorming voor:
door de wind wordt het wateroppervlak verstoord en er ontstaan golven.

Het is tegenwoordig in vele gevallen belangrijk te weten hoe het schip zich in deze golven zal gedragen. Het schip gaat onder invloed van de golven bewegen en hierdoor kan de veiligheid van schip, bemanning en lading in het geding komen.
Om het gedrag van schepen in golven te bepalen wordt naast de beschikbare rekenmodellen, nog steeds veel gebruik gemaakt van modelproeven. Deze worden uitgevoerd in een sleeptank, net als de weerstandsproeven. Hierbij wordt het model van het schip in modelgolven gelegd en voortgesleept en de resulterende bewegingen bepaald. Hiertoe wordt de modelwet van Froude gebruikt omdat de oorzaak van de bewegingen gelegen is in de druk-, traagheids- en zwaartekracht. Viskeuze problemen spelen meestal geen rol.

Ook heel andere modelproeven met schepen zijn denkbaar. Veelal is het tegenwoordig van belang te weten hoe een bepaald schip zich gedraagt in de haven of in de aanloop naar een haven uit het oogpunt van navigatorische situaties die zich voor kunnen doen.
Ook hiertoe worden modelproeven gebruikt waarbij aan schaalmodellen gemeten wordt om het stuurgedrag van het schip te voorspellen. Ook bij deze proeven wordt de model-wet van Froude gevolgd, ook al kunnen viskeuze invloeden hier een grotere rol spelen.
De extrapolatie van al deze proefresultaten levert geen problemen op omdat door de modelwet van Froude aan de dynamische gelijkvormigheid is voldaan. Voor deze proeven gelden de volgende schaalfactoren, uitgaande van een gekozen lineaire schaal voor het model.

	model	→ **prototype**	
schaal lengte	m	α_L	(gekozen)
schaal oppervlakte	m^2	$\alpha_L \cdot \alpha_L = \alpha_L^2$	
schaal inhoud	m^3	$\alpha_L \cdot \alpha_L \cdot \alpha_L = \alpha_L^3$	
schaal snelheid	$\frac{m}{s}$	$\sqrt{\alpha_L}$	(modelwet van Froude)
schaal tijd	$s = \frac{s}{m} m$	$\frac{1}{\sqrt{\alpha_L}} \alpha_L = \sqrt{\alpha_L}$	
schaal versnelling	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$	$\frac{\alpha_{\mathrm{L}}}{(\sqrt{\alpha_{\mathrm{L}}})^2} = 1$	

schaal kracht	$kg \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	$\alpha_L^3 \cdot 1 = \alpha_L^3$