

Van behoudswetten via Navier-Stokes naar St. Venant

Deze afleidingen vormen GEEN onderdeel van de tentamenstof van het vak CT3011 Inleiding Watermanagement

Dr. Ronald van Nooyen, 2005

1 *Introductie*

Het fundament voor het ontwerp en het beheer van alle watersystemen wordt gevormd door de vloeistofmechanica. Dit hoofdstuk is bedoeld om de betreffende stof, bekend uit het tweedejaarsvak vloeistofmechanica, nogmaals onder uw aandacht te brengen.

1.1 Het model

De hier gebruikte theorie voor vloeistoffen en gassen is gebaseerd op de aanname, dat we een vloeistof of gas mogen modelleren als een continuüm. Dat wil zeggen, dat in het model gassen en vloeistoffen niet uit moleculen bestaan maar uit een substantie, die in willekeurig kleine volumes op te delen is zonder zijn eigenschappen te verliezen. In elk willekeurig punt binnen een met vloeistof of gas gevuld volume hebben die eigenschappen dan goed bepaalde waarden. Laten we dit iets concreter maken. Water is een vloeistof, die uit moleculen bestaat. Als we maar op voldoende kleine schaal (maar ook weer niet te kleine schaal) kijken zal zich dus in het laboratorium op een bepaald punt wel een molecuul of geen molecuul bevinden. Als er zich op een punt geen molecuul bevindt is daar geen vloeistofsnelheid bekend. In een continuüm kijken we niet naar moleculen maar modelleren we het water door het bestaan van functies te veronderstellen, die in elk punt het gemiddelde van de eigenschappen van een rond dat punt liggende groep van een groot aantal moleculen vertegenwoordigen¹. We voeren dan in elk punt een massadichtheid ρ in, waarvan de integraal over een macroscopisch volume gelijk behoort te zijn aan de massa van de in het laboratorium in dat volume aanwezige moleculen. Ook voeren we een snelheidsveld \mathbf{v} in, waarvan wederom het gemiddelde over een volume gelijk behoort te zijn aan de gemiddelde snelheid van de in het laboratorium in dat volume aanwezige moleculen. Een andere handige macroscopische grootheid is de druk p , die, geïntegreerd over een oppervlak, de loodrecht op dat oppervlak uitgeoefende kracht ten gevolge van met dat oppervlak botsende moleculen levert.

Er dreigen nu krachtwerkingen zoek te raken en ook missen we wat kinetische energie. Energie zowel ten gevolge van de middeling van snelheden (kinetische energie van de moleculen) als door het verdwijnen van de moleculen, die ieder apart door trilling en rotatie energie op kunnen slaan. Krachtwerkingen omdat de moleculen niet alleen door botsingen met elkaar en met de wanden (verwerkt in de druk) maar ook door moleculaire krachten (viscositeit, adhesie en cohesie) invloed uitoefenen. Om deze problemen gedeeltelijk op te lossen worden de interne energie e , de temperatuur T en de viscositeit μ geïntroduceerd. Om de moleculaire krachten te verwerken blijkt een *tensor* nodig te zijn, er kunnen immers schuifspanningen optreden. De vorm van de tensor hangt af van de aard van de vloeistof. De moleculaire krachten zijn ook verantwoordelijk voor de relatie tussen druk, dichtheid en temperatuur.

In het voorgaande hebben we vrolijk gesproken over de correspondentie tussen laboratorium en model, maar om die aan te geven hebben we in het model en in het laboratorium coördinaten nodig, bijvoorbeeld t voor een tijdstip en \mathbf{x} voor een punt in de ruimte.

¹ Pas op, vaak worden de resulterende vergelijkingen bij computer berekeningen gesplitst in een gemiddelde over een gebied en een lokale functie, dat is een ander soort middelen ...

2 De behoudswetten

2.1 Introductie

De belangrijkste bouwsteen voor de theorie van vloeistoffen en gassen is de wet van behoud van massa, overigens op de voet gevolgd door de wetten van behoud van impuls en behoud van energie. In een wereld zonder deze wetten zouden brugpijlers zonder aanwijsbare reden kunnen verdwijnen, auto's op topsnelheid haakse bochten kunnen maken en zou koffie bij kamer temperatuur spontaan kunnen bevriezen.

2.2 Wat staat centraal; Euler versus Lagrange

Als we naar een vloeistof kijken kunnen we twee dingen doen, we kunnen ons afzijdig houden en op een vast punt de vloeistof aan ons voorbij laten stromen of we kunnen met de vloeistof meereizen. Dit levert twee verschillende beschrijvingswijzen, de Euler formulering en de Lagrange formulering. Het voordeel van de tweede, waar we de vloeistof volgen, is dat we blijven kijken naar hetzelfde pakketje vloeistof, waarmee we ons als in een miniatuur duikboot met de stroming laten meevoeren. De vorm van het pakket kan overigens wel wijzigen.

Behoud van massa is dan bijna een tautologie, we volgen immers een vast pakket vloeistof. Massa kan alleen aan het pakket worden toegevoegd of aan het pakket worden onttrokken als het pakket ergens een positieve of negatieve bron van massa passeert. Dit klinkt vreemd, maar denk bijvoorbeeld aan water, dat bij het passeren van een zoutafzetting zout in oplossing kan opnemen en zo zwaarder kan worden.

Ook impulsbehoud ligt, als we even interne krachten vergeten, voor de hand. De impuls van het pakketje kan alleen wijzigen door de erop werkende krachten. Het pakketje lijkt erg op een deeltje.

In de nu volgende paragrafen zullen we massabehoud en impuls behoud uitwerken voor een ideale vloeistof. Dat wil zeggen een vloeistof zonder viscositeit, waarin de druk de enige door de vloeistof uitgeoefende kracht is.

2.3 Massabehoud

Stel we markeren op tijd t alle deeltjes in een volume V in de vloeistof. Vervolgens volgen we de gemarkeerde deeltjes. Noem het door de deeltjes korte tijd later, op tijd t , opgespannen volume $V(t)$. volgens massa behoud moet dan (1) gelden. Voorbehoud: dit geldt alleen voor een zuivere vloeistof, als er bijvoorbeeld zout kan oplossen of neerslaan moeten we een bronterm opnemen.

$$\iiint_{V_0} \rho dV = \iiint_{V(t)} \rho dV \quad (1)$$

Hieruit volgt (2),

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} \rho dV = 0 \quad (2)$$

in lokale vorm vinden we met behulp van het Reynold's transport theorema (3) (zie appendix).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (3)$$

2.4 Impulsbehoud voor een ideale vloeistof

We nemen aan, dat alleen het drukveld en het zwaartekrachtsveld krachten op de vloeistof uitoefenen. We nemen aan, dat het zwaartekrachtsveld op de schaal waarop we werken vertegenwoordigd kan worden door een constante versnelling met een vaste richting, gespecificeerd door de vector \mathbf{g} .

Stel we markeren op tijd t alle deeltjes in een volume $V(t)$ in de vloeistof. Vervolgens volgen we de gemarkeerde deeltjes. Noem het door de deeltjes korte tijd later, op tijd t^2 , opgespannen volume $V(t^2)$. Als we nu de tussen de twee tijdstippen op het pakket vloeistof werkende krachten (druk en zwaartekracht) integreren, dan zou (4) moeten gelden.

$$\iiint_{V(t^2)} \rho \mathbf{v} dV - \iiint_{V(t)} \rho \mathbf{v} dV = \int_{t=t_1}^{t_2} \left[\iiint_{V(t)} \rho \mathbf{g} dV - \iint_{\partial V(t)} p \mathbf{n}_{\partial V(t)} dA \right] \quad (4)$$

We kunnen nu vergelijking (64) uit de appendix gebruiken om de oppervlakte integraal over de druk in het rechterlid om te schrijven naar een volume integraal. In het linkerlid introduceren we een integraal over de tijd van de afgeleide van de oorspronkelijke vorm, we vinden zo (5).

$$\int_{t=t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} \rho \mathbf{v} dV = \int_{t=t_1}^{t_2} \left[\iiint_{V(t)} \rho \mathbf{g} - \nabla p dV \right] \quad (5)$$

We beschouwen dit nu als een stelsel van drie vergelijkingen, één voor elke vector component, vervolgens passen we de Reynolds transportstelling uit de appendix toe op de term onder de tijdsintegraal in het linkerlid, we vinden zo (6) voor $i=1,2,3$.

$$\int_{t=t_1}^{t_2} \left[\iiint_{V(t)} \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \nabla(\rho v_i \mathbf{v}) dV \right] = \int_{t=t_1}^{t_2} \left[\iiint_{V(t)} \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} dV \right] \quad (6)$$

Hieruit volgt, als er nergens sprongen in de functies zitten, de lokale vergelijking (7).

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \nabla(\rho v_i \mathbf{v}) = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (7)$$

x

2.5 Effecten van viscositeit

Zodra we naar echte vloeistoffen gaan kijken gaan de moleculaire interacties een rol spelen. Een van de belangrijkste gevolgen daarvan is het optreden van schuifspanningen tussen met verschillende snelheden bewegende delen van de vloeistof. Voor de meest simpele vloeistof, een Newtonse vloeistof (niet-polair, isotroop, spanning lineaire afhankelijk van vervorming) wil dit zeggen dat het product van de druk en de normaal in (4) vervangen moet worden door (8)

$$\sum_{j=1}^3 T_{ij} \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{n}_{\partial V(t)} \quad (8)$$

waarin T gegeven wordt door (9)

$$T_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{v} \right) \quad (9)$$

en waar μ de dynamische viscositeit is. daarnaast zijn er extra vergelijkingen nodig om de omzetting van kinetische energie in interne energie mee te nemen en om de relatie tussen dichtheid, temperatuur en druk vast te leggen.

Dit levert een wijziging in het rechterlid van vergelijking (7), zoals getoond in vergelijking (10).

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \nabla(\rho v_i \mathbf{v}) = \rho g_i + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \quad (10)$$

3 Het gedrag van een ideale niet samendrukbare vloeistof

Na ons werk in sectie **Error! Reference source not found.** hebben we vier vergelijkingen (massabehoud en drie componenten impulsbehoud) en vijf onbekenden (drie snelheidscomponenten, de dichtheid en de druk). Als we aannemen, dat we met een zuivere (geen opgeloste stoffen) incompressibele (vaste dichtheid) vloeistof werken, levert dat de vergelijking (11),

$$\rho(t, \mathbf{x}) = \rho_0 \quad (11)$$

waar ρ een gegeven constante is. We hebben nu vijf vergelijkingen met vijf onbekenden, namelijk (11), constante dichtheid, (12), massabehoud en (13) impulsbehoud voor $i=1,2,3$.

$$\nabla \mathbf{v} = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \nabla(v_i \mathbf{v}) = g_i - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (13)$$

We kunnen (13) met behulp van (12) schrijven als (14).

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla v_i = g_i - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (14)$$

We kunnen nu een aantal voor de praktijk interessante vergelijkingen afleiden.

3.1 Energie stationair en 1-dimensionaal

Stel we beschouwen een vloeistof stroming, die in de tijd niet verandert, vergelijking (14) gaat dan over in (15).

$$\mathbf{v} \cdot \nabla v_i = g_i - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (15)$$

We kunnen nu een aantal speciale gevallen beschouwen. Stel we volgen een vloeistofpakketje en we beschouwen de component van (15) in de richting van het pad langs het pad van dat pakketje. De component langs het pad wordt gegeven door (16).

$$\frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 v_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \sum_{i=1}^3 \left[g_i v_i - \frac{v_i}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_i} \right] \quad (16)$$

Waarin we de notatie (17) gebruiken.

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \quad (17)$$

Dit geeft ons een behoudswet langs de paden van vloeistofdeeltjes (18).

$$\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \cdot \nabla \left[\frac{1}{2} \|\mathbf{v}\|^2 - \mathbf{g} \cdot \mathbf{x} + \frac{p}{\rho_0} \right] = 0 \quad (18)$$

Hieruit volgt, dat bij stationaire stroming (19) constant is langs een stroomlijn.

$$\frac{1}{2} \|\mathbf{v}\|^2 - \mathbf{g} \cdot \mathbf{x} + \frac{p}{\rho_0} \quad (19)$$

Als we een xyz assenstelsel gebruiken met de z -as antiparallel aan \mathbf{g} en we schrijven v voor de lengte van de snelheidsvector dan krijgt dit de bekende vorm (20).

$$\frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} + g z = \text{constant} \quad (20)$$

Hiermee hebben we bijna de veelgebruikte energierelatie (21),

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2g} = h_2 + \frac{u_2^2}{2g} \quad (21)$$

waar u de grootte van de snelheid in doorsnede k is en h de ligging van het wateroppervlak in doorsnede k geeft ten opzichte van een referentieniveau. Wat we nog aannemelijk moeten maken is de overgang van $p/\rho g + z$, geschaalde druk plus hoogte van stroomlijn boven referentieniveau, naar h , het niveau van het water oppervlak. Als we aannemen, dat alle stroomlijnen in een bepaalde doorsnede parallel lopen en dat de richting van de stroomlijnen \mathbf{e} niet samenvalt met de richting van \mathbf{g} , dan kunnen we als basisrichtingen voor ons assenstelsel kiezen voor (22).

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}, \mathbf{e}_3 = -\frac{\mathbf{g} - \mathbf{e}_1 \mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_1}{\|\mathbf{g} - \mathbf{e}_1 \mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_1\|}, \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 \quad (22)$$

Als we nu (15) loodrecht op de stromingsrichting bekijken levert dit (23).

$$0 = \mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_3 - \frac{1}{\rho_0} \mathbf{e}_3 \cdot \nabla p \quad (23)$$

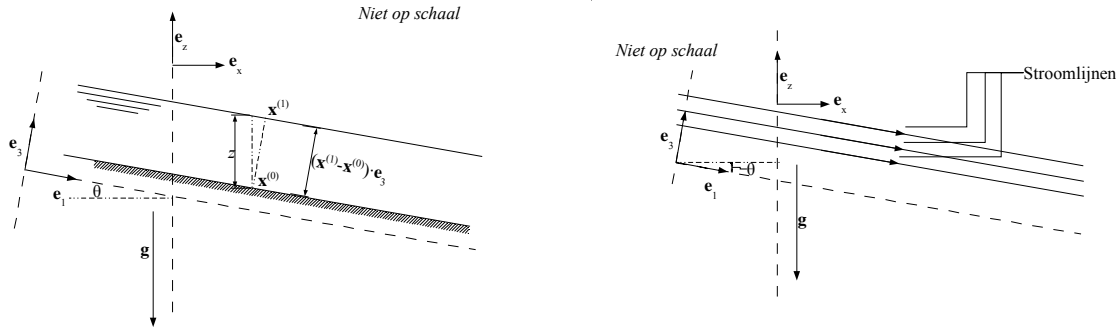
Stel nu we hebben een open kanaal met boven de vloeistof een druk van p , we trekken een lijn langs de in de in (22) gedefinieerde richting 3 en bepalen het snijpunt met de bodem, $\mathbf{x}^{(0)}$ en het snijpunt met het wateroppervlak, $\mathbf{x}^{(1)}$. Volgens (23) geldt nu (24),

$$p(\mathbf{x}^{(1)}) - p(\mathbf{x}^{(0)}) = (\mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_3)(\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}) \cdot \mathbf{e}_3 \quad (24)$$

waaruit onmiddellijk volgt, dat (21) strikt genomen alleen geldt als de stroomlijnen in beide doorsneden horizontaal lopen. Als de hoek tussen de loodlijn op de stroomlijnen en de door de zwaartekracht gedefinieerde verticaal – de gradient – gelijk is aan θ dan vinden we (25).

$$p(\mathbf{x}^{(1)}) - p(\mathbf{x}^{(0)}) = (-g \cos \theta)(\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}) \cdot \mathbf{e}_z \cos \theta \quad (25)$$

Zie voor de definities van richtingen en figuur (1) en figuur (2).



Figuur 1 Diepte

Voor de in de praktijk voorkomende hellingen blijkt dat $\cos^2 \theta \approx 1$. Neem bijvoorbeeld een kanaal in uniforme stroming met een helling van 1 op 1000, dan geldt dat $\cos^2 \theta = 1 - 10^{-6}$.

3.2 Impuls stationair en 1-dimensionaal

Stel we hebben een kanaal met een vrij oppervlak. Stel dit kanaal heeft “gladde” wanden en we kunnen een vlak definiëren, waarin \mathbf{g} ligt, zodanig dat elk vlak loodrecht op dit vlak een symmetrische doorsnede met de kanaalwanden oplevert. We kiezen ons assenstelsel zo, dat de x as antiparallel aan \mathbf{g} ligt, de de x as voor zover mogelijk samenvalt met de lengte-as van het kanaal en de x as in de breedte van het kanaal ligt. Voor een ideale vloeistof kunnen we nu vergelijking (13) voor $i=1,2$ en 3 pogen te integreren over een kanaalsegment tussen twee doorsneden. Dit levert (26)

$$\iiint_V \nabla(v_i \mathbf{v}) dV = \iiint_V g_i - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_i} dV \quad (26)$$

Via (62) en (64) kunnen we dit geheel omzetten naar integralen over het oppervlak van het volume met als resultaat (27) voor $i=1,2,3$.

$$\iint_{\partial V} v_i \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{\partial V} dA = \iiint_V g_i dV - \iint_{\partial V} \frac{1}{\rho_0} p \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{n}_{\partial V} dA \quad (27)$$

Als we aannemen dat het volume begrensd wordt door doorsneden $A^{(1)}$ bij $x = x^{(1)}$ en $A^{(2)}$ bij $x = x^{(2)}$ die beide loodrecht op de x as staan dan kan het linkerlid worden vereenvoudigd tot (28) met behulp van de aanname, dat er geen vloeistof door de wand of het wateroppervlak stroomt.

$$-\iint_{A^{(1)}} v_i \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_1 dA + \iint_{A^{(2)}} v_i \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_1 dA \quad (28)$$

Voor $i=2$ reduceert het rechterlid tot (29).

$$-\iint_{\partial V} \frac{1}{\rho_0} p \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n}_{\partial V} dA \quad (29)$$

Als we een oplossing aannemen, die symmetrisch is in een symmetrische kanaaldoorsnede dan is dit, gezien de symmetrie van het kanaal, gelijk aan nul en geldt (30). Hierbij moet opgemerkt

worden, dat deze symmetrie voor turbulente stroming zeer onwaarschijnlijk is, tenzij we naar gemiddelde waarden voor de snelheid kijken.

$$\iint_{A^{(1)}} v_2 v_1 dA = \iint_{A^{(2)}} v_2 v_1 dA \quad (30)$$

We introduceren nu de volgende notatie: $A^{(v)}$ is het vrije wateroppervlak van het oppervlak van ons volume V en $A^{(w)}$ is het met de kanaalwand samenvallende deel van het oppervlak van ons volume V . Voor $i=1$ reduceert het rechterlid tot (31)

$$\begin{aligned} \iint_{\partial V} \frac{1}{\rho_0} p \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n}_{\partial V} dA = & - \iint_{A^{(1)}} \frac{1}{\rho_0} p dA + \iint_{A^{(2)}} \frac{1}{\rho_0} p dA + \\ & \iint_{A^{(v)}} \frac{1}{\rho_0} p \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n}_{A^{(v)}} dA + \iint_{A^{(w)}} \frac{1}{\rho_0} p \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n}_{A^{(w)}} dA \end{aligned} \quad (31)$$

en vinden we onder de aanname dat de druk aan het wateroppervlak overal gelijk is aan p , de uitdrukking (32).

$$\begin{aligned} - \iint_{A^{(1)}} v_1^2 dA + \iint_{A^{(2)}} v_1^2 dA = & \iint_{A^{(1)}} \frac{1}{\rho_0} (p - p_0) dA - \iint_{A^{(2)}} \frac{1}{\rho_0} (p - p_0) dA - \\ & \iint_{A^{(w)}} \frac{1}{\rho_0} (p - p_0) \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n}_{A^{(w)}} dA \end{aligned} \quad (32)$$

Voor $i=3$ reduceert het rechterlid tot (33) en vinden we,

$$\begin{aligned} - \iiint_V g dV - \iint_{\partial V} \frac{1}{\rho_0} p \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{n}_{\partial V} dA = \\ - \iiint_V g dV - \iint_{A^{(v)}} \frac{1}{\rho_0} p \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{n}_{A^{(v)}} dA - \iint_{A^{(w)}} \frac{1}{\rho_0} p \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{n}_{A^{(w)}} dA \end{aligned} \quad (33)$$

onder de aanname dat de druk aan het wateroppervlak overal gelijk is aan p , de uitdrukking (34).

$$- \iint_{A^{(1)}} v_3 v_1 dA + \iint_{A^{(2)}} v_3 v_1 dA = - \iiint_V g dV - \iint_{A^{(w)}} \frac{1}{\rho_0} (p - p_0) \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{n}_{A^{(w)}} dA \quad (34)$$

Stel nu we hebben een horizontaal kanaal met een vaste doorsnede, dan volgt uit (32) onmiddellijk (35), waar grootheden met een streep erboven gemiddelden zijn over de doorsnede met het corresponderende label.

$$- A^{(1)} \overline{[v_1^{(1)}]^2} + A^{(2)} \overline{[v_1^{(2)}]^2} = A^{(1)} \frac{1}{\rho_0} (\overline{p^{(1)}} - p_0) - A^{(2)} \frac{1}{\rho_0} (\overline{p^{(2)}} - p_0) \quad (35)$$

Als we een over de hele doorsnede constante snelheid aannemen, een statische druk en een rechthoekige doorsnede met een vaste diepte d over de hele doorsnede, dan vinden we de bekende formule (36).

$$\overline{[v_1^{(2)}]^2} + g \frac{d^{(2)}}{2} = \overline{[v_1^{(1)}]^2} + g \frac{d^{(1)}}{2} \quad (36)$$

4 De Saint-Venant of ondiep water vergelijkingen

Strikt genomen moeten we, om het tijdsafhankelijke gedrag van een kanaal te bestuderen, beginnen met de volledige Navier-Stokes vergelijkingen. Dat wil zeggen de boven afgeleide behoudswet voor de massa, impulsbehoud met een extra term in de impulsbalans om de viscositeit te representeren, energiebehoud en een relatie tussen temperatuur, druk en massadichtheid. Vervolgens worden dan de breedte en hoogte weggeïntegreerd.

We zullen de zaak hier iets anders aanpakken. Stel we hebben een kanaal zonder kwel of lekverliezen, waardoor zuiver water stroomt. Als we zouden willen controleren of het kanaal daadwerkelijk niet lekte dan zouden we waarschijnlijk een stuk van het kanaal kiezen, de waterstand bepalen, en op basis daarvan een schatting van het volume maken, vervolgens tijd lang aan de bovenstroomse en benedenstroomse kant debietmetingen doen en het meetprogramma afsluiten met weer een schatting van het volume. Vervolgens zouden we kijken of de balans klopte. We gaan dit nu in formulevorm gieten. *We nemen aan, dat de dichtheid van het water constant is.* We zullen het water volume in ons kanaaldeel op tijd t aangeven met $V(t)$. Het debiet aan bovenstroomse kant op tijd t duiden we aan met $Q_{bo}(t)$ en het debiet aan de benedenstroomse kant met $Q_{be}(t)$. Als we ons experiment beginnen op tijd t_0 en beëindigen op tijd t_1 verwachten we als uitkomst van ons experiment voor een niet lekkend kanaal te vinden dat (37) geldt.

$$\int_{t=t_0}^{t_1} [Q_{bo}(t) - Q_{be}(t)] dt = V(t_1) - V(t_0) \quad (37)$$

Als we het gedrag van het kanaal willen beschrijven voor verschillende debieten hebben we meer nodig, we moeten dan ook naar de impulsbalans kijken. Voor een incompressibele vloeistof met constante dichtheid hebben we (11) en (12), daarmee kunnen (9) en (10) worden geschreven als (38) en (39).

$$T_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (38)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \nabla \cdot (v_i \mathbf{v}) = g_i + \frac{1}{\rho_0} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \quad (39)$$

We hebben nu twee verwante problemen, ten eerste, hoe raken we hier twee van de drie dimensies kwijt, zodat we makkelijk aan kanalen kunnen rekenen en ten tweede, hoe leggen we een verband tussen deze lokale vergelijking en de debieten en volumes van (37).

Om een overdaad aan wiskundige notatie te vermijden gaan we in het vervolg uit van een lang recht kanaal met een vaste symmetrische dwarsdoorsnede en een vaste bodemhelling. We nemen aan, dat de bodemhelling vlakker is dan zeg 1 op 100, zodat we zonder al te veel problemen een coördinatensysteem kunnen kiezen met de x -as of z -as verticaal (tegengesteld aan de

werkingsrichting van de zwaartekracht, met de x -as of z -as loodrecht daarop in het vlak van de

lengte-as van het kanaal en de y -as loodrecht op deze beide richtingen. Stel nu de x -

coördinaat van onze bovenstroomse doorsnede is x_1 en die van de benedenstroomse doorsnede is

x_2 . Beide doorsneden nemen we parallel aan het yz -vlak.

Als we (10) nu integreren over een volume begrensd door twee dwarsdoorsneden parallel aan het yz -vlak op een kleine afstand Δx van elkaar, dan vinden we (40), waar $A(t, x)$ staat voor de natte doorsnede parallel aan het yz -vlak op plaats x ten tijde t .

$$\int_{x=x_0}^{x_0+\Delta x} \iint_{A(t,x)} \nabla \mathbf{v} dA dx = \iint_{A(t,x_0+\Delta x)} v_1 dA - \iint_{A(t,x_0)} v_1 dA \quad (40)$$

Het lijkt dus redelijk om het debiet $Q(t,x)$ te definiëren als in (41),

$$Q(t,x) = \iint_{A(t,x)} v_1 dA \quad (41)$$

waarna (42) voor de hand ligt.

$$\bar{v}(t,x) = \frac{Q(t,x)}{A(t,x)} \quad (42)$$

Integratie in de tijd, gevolgd door een integratie in de ruimte van (39) levert (43).

$$\int_{x=x_0}^{x_0+\Delta x} \iint_{A(t,x)} \int_{t=t_0}^{t_0+\Delta t} \frac{\partial v_i}{\partial t} dt dA dx = \int_{x=x_0}^{x_0+\Delta x} \iint_{A(t,x)} \int_{t=t_0}^{t_0+\Delta t} \nabla(v_i \mathbf{v}) + g_i + \frac{1}{\rho_0} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} dt dA dx \quad (43)$$

Na wat gestoei met integratievolgordes wordt dit voor $i=1$ vergelijking (44).

$$\int_{x=x_0}^{x_0+\Delta x} Q(t_0+\Delta t, x) - Q(t_0, x) dx = \int_{t=t_0}^{t_0+\Delta t} \int_{x=x_0}^{x_0+\Delta x} \iint_{A(t,x)} -\nabla(v_1 \mathbf{v}) + \frac{1}{\rho_0} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial T_{1j}}{\partial x_j} dA dx dt \quad (44)$$

Het linkerlid kan nu, als we aannemen, dat Q gedifferentieerd kan worden naar de tijd, geschreven worden als (45).

$$\int_{x=x_0}^{x_0+\Delta x} \int_{t=t_0}^{t_0+\Delta t} \frac{\partial Q(t,x)}{\partial t} dt dx \quad (45)$$

Als we nu de notatie $A(t,x, \Delta x)$ invoeren voor het vloeistof oppervlak tussen x en $x + \Delta x$ en de

notatie $A(t,x, \Delta x)$ invoeren voor de kanaalwand en de kanaalbodem in contact met de vloeistof

tussen x en $x + \Delta x$ dan levert Green (62) voor de divergentie in het rechterlid van (43) met gebruik van het feit, dat er geen vloeistof door de wanden of het wateroppervlak stroomt gelijkheid (46).

$$\int_{x=x_0}^{x_0+\Delta x} \iint_{A(t,x)} \nabla(v_i \mathbf{v}) dA dx = - \iint_{A(t,x_0)} v_i v_1 dA + \iint_{A(t,x_0+\Delta x)} v_i v_1 dA \quad (46)$$

Nu introduceren we α gedefinieerd door (47).

$$\alpha(t,x) = \frac{1}{A(t,x)[\bar{v}(t,x)]^2} \iint_{A(t,x)} v_1^2 dA \quad (47)$$

We kunnen dan (46) voor $i=1$ schrijven als (48).

$$\int_{x=x_0}^{x_0+\Delta x} \iint_{A(t,x)} \nabla(v_1 \mathbf{v}) dA dx = \int_{x=x_0}^{x_0+\Delta x} \frac{\partial}{\partial x} (\alpha(t,x) A(t,x) [\bar{v}(t,x)]^2) dx \quad (48)$$

We splitsen T nu in een druk term en een rest term τ zodat we kunnen schrijven (49)

$$T_{ij} = -p \delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (49)$$

met τ als in (50).

$$\tau_{ij} = 2\mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (50)$$

We vullen dit in in de rest van het rechterlid van (43) en vinden (51).

$$\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} \iint_{A(t,x)} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \frac{1}{\rho_0} \left[-\frac{\partial p}{\partial x_i} + g_i + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \right] dt dA dx \quad (51)$$

Bij gebrek aan beter definiëren we voorlopig (52).

$$S_f(t, x) = \frac{1}{g} \iint_{A(t,x)} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \tau_{1j}}{\partial x_j} dA \quad (52)$$

Als we aannemen, dat de druk lokaal gelijk is aan de druk bij uniforme stroming (zie appendix) dan geldt bij een helling θ van de kanaalbodem in ons coördinatenstelsel dat, als we een vast waterniveau $x_3 = h(x_1)$ aannemen op positie x_1 , de druk gegeven wordt door (53).

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = g (h(x_1) - x_3) \cos^2 \theta \quad (53)$$

Als we nu aannemen, dat de volgende gelijkheden (54) gelden en

$$\begin{aligned} \int_{x_1=x_0}^{x_0+\Delta x} \iint_{A(t,x)} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \frac{\partial p}{\partial x_1} dt dA dx &= \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \int_{x_1=x_0}^{x_0+\Delta x} \int_{x_3=z_0-S_0x_1}^{h(x_1)} \left[\frac{\partial a(z)}{\partial z} \right]_{z=x_3-z_0+S_0x_1} \frac{\partial p}{\partial x_1} dx_3 dx_1 dt = \\ & \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \int_{x_1=x_0}^{x_0+\Delta x} \int_{x_3=z_0-S_0x_1}^{h(x_1)} \left[\frac{\partial a(z)}{\partial z} \right]_{z=x_3-z_0+S_0x_1} g \cos^2 \theta \frac{\partial (h(x_1) - x_3)}{\partial x_1} dx_3 dx_1 dt \end{aligned} \quad (54)$$

we z en S zo definiëren, dat de lijn $z + Sx$ de middellijn van de bodem van het kanaal volgt en

we bovendien aannemen, dat de natte oppervlakte van een dwarsdoorsnede bij diepte z gegeven wordt door de differentieerbare functie $a(z)$, dan geldt (55).

$$\begin{aligned} \int_{x_1=x_0}^{x_0+\Delta x} \iint_{A(t,x)} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \frac{\partial p}{\partial x_1} dt dA dx &= \\ \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \int_{x_1=x_0}^{x_0+\Delta x} a(h(x_1) - z_0 + S_0x_1) g \cos^2 \theta \frac{\partial h(x_1)}{\partial x_1} dx_1 dt \end{aligned} \quad (55)$$

Als we (45), (48), (52) en (55) gebruiken in (44) vinden we (56).

$$\begin{aligned} \int_{x=x_0}^{x_0+\Delta x} \int_{t=t_0}^{t_0+\Delta t} \frac{\partial Q(t, x)}{\partial t} dt dx &= \\ - \int_{x=x_0}^{x_0+\Delta x} \int_{t=t_0}^{t_0+\Delta t} \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha(t, x) A(t, x) [\bar{v}(t, x)]^2 \right) dt dx &+ \\ \int_{x=x_0}^{x_0+\Delta x} \int_{t=t_0}^{t_0+\Delta t} -A(t, x) g \cos^2 \theta \frac{\partial h(x_1)}{\partial x_1} + S_f(t, x) dt dx \end{aligned} \quad (56)$$

Verwijdering van de integralen levert nu (57).

$$\frac{\partial Q(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\alpha(t, x) Q(t, x) \bar{v}(t, x)) + A(t, x) g \cos^2 \theta \frac{\partial h(x)}{\partial x} = g A(t, x) S_f(t, x) \quad (57)$$

In (57) is x de coördinaat langs de horizontaal in de richting van de stroming in het kanaal, h is het waterniveau ten opzichte van het referentievlak, $Q(t, x)$ het debiet en $A(t, x)$ de oppervlakte van de natte dwarsdoorsnede. Verder staat \bar{v} voor de gemiddelde snelheid over een dwarsdoorsnede en S_f representeert de wrijvingskrachten.

Nu moeten we (37) nog in een soortgelijke vorm gieten. Voor de hand ligt (58).

$$- \int_{t=t_0}^{t_0+\Delta t} \int_{x=x_0}^{x_0+\Delta x} \frac{\partial Q(t, x)}{\partial x} dx dt = V(t_0 + \Delta t) - V(t_0) \quad (58)$$

Alleen het rechterlid moet hier nog bewerkt worden. Beschouw nu (59).

$$V(t) = \int_{x=x_0}^{x_0+\Delta x} A(t, x) dx \quad (59)$$

Nu kunnen we het rechterlid van (58) schrijven als (60).

$$\int_{x=x_0}^{x_0+\Delta x} A(t_0 + \Delta t, x) - A(t_0, x) dx = \int_{x=x_0}^{x_0+\Delta x} \int_{t=t_0}^{t_0+\Delta t} \frac{\partial A(t, x)}{\partial t} dt dx \quad (60)$$

Waarna het weglaten van de integralen ons (61) levert.

$$\frac{\partial Q(t, x)}{\partial x} + \frac{\partial A(t, x)}{\partial t} = 0 \quad (61)$$

Hiermee hebben we in principe de Saint-Venant vergelijkingen gevonden. We moeten alleen nog aannames doen over de functies α en S_f . Vaak wordt α gelijk gesteld aan 1. Voor S_f geeft de literatuur vele mogelijkheden. In het algemeen bevat de term een doorsnede en diepte afhankelijke vormfactor, het teken van de snelheid en de grootte van de snelheid in het kwadraat.

Page break volgt

Net na page break

Appendix

A.1 Green's theorema

Stel dat V een volume is met een stuksgewijs glad oppervlak ∂V en stel \mathbf{a} is een continu differentieerbaar vectorveld gedefinieerd op geheel V inclusief ∂V . Laat \mathbf{n} de naar buiten wijzende normaal op ∂V zijn, dan geldt (62),

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{a} \, dV = \iint_{\partial V} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} \, dA \quad (62)$$

waar dV een integraal over een volume aangeeft en dA een integraal over een oppervlak. Verder wordt de in (63) gedefinieerde notatie gebruikt.

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial a_j}{\partial x_j} \quad (63)$$

Stel nu f is een continu differentieerbare functie op geheel V inclusief ∂V . dan geldt (64),

$$\iiint_V \nabla f \, dV = \iint_{\partial V} f \mathbf{n} \, dA \quad (64)$$

waar (65) is gebruikt met \mathbf{e} als eenheidsvector voor de richting corresponderend met x .

$$\nabla f = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_j} \mathbf{e}_j \quad (65)$$

A.2 Reynolds' transport theorema

Als we, zoals op bladzijde **Error! Bookmark not defined.** eenmaal overal en voor alle tijden een lokale snelheid \mathbf{v} hebben gedefinieerd, dan kunnen we punten met de vloeistof laten meebewegen. Stel bijvoorbeeld, dat we willen weten waar het "vloeistofdeeltje", dat zich op tijd t op plaats \mathbf{x} bevindt, naar toe gaat. als de gewone differentiaalvergelijking (66) oplosbaar is,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \xi(t) &= \mathbf{v}(t, \xi(t)) \\ \xi(t_0) &= \mathbf{x}_0 \end{aligned} \quad (66)$$

dan kunnen we die vraag beantwoorden. Laten we de oplossing hiervan aanduiden met $\xi(t, \mathbf{x})$.

Hoewel het wat gewenning vereist kan het heel prettig zijn te werken met deze met de vloeistof meebewegende deeltjes, vooral bij het werken met behoudswetten. Immers, waar we anders steeds met verschillende deeltjes te maken hebben volgen we nu een bepaald deeltje.

Een stelling, die zich met behulp van de meebewegende deeltjes gemakkelijk laat bewijzen is de transportstelling van Reynolds.

Gegeven een continu differentieerbare functie $f(t, \mathbf{x})$ en een volume V met een stuksgewijs glad

oppervlak ∂V . Stel vervolgens dat voor alle punten \mathbf{x} , die zich op tijd t in V of op het oppervlak van V bevinden geldt, dat $\xi(t, (t, \mathbf{x}))$ bestaat en differentieerbaar is naar \mathbf{x} en dat $\xi(t, (t, V))$ een volume en $\xi(t, (t, \partial V))$ een glad oppervlak blijft. Dan geldt (67).

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} f dV = \iiint_{V(t)} \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (f \mathbf{v}) dV \quad (67)$$

Een volledig bewijs van deze stelling zou hier te ver voeren. In plaats daarvan leveren we een schets van het bewijs.

We introduceren de volgende notatie (68) voor alle combinaties $i=1,2,3$, en $j=1,2,3$ en voor \mathbf{y} in V .

$$J_{ij}(t, \mathbf{y}) = \frac{\partial \xi_i(t, (t, \mathbf{y}))}{\partial y_j} \quad (68)$$

In (68) geven de indices de vectorcomponenten ten opzichte van ons vaste, tijdonafhankelijke coördinatenstelsel aan.

De determinant van de matrix $J(t, \mathbf{y})$ met de componenten gegeven in (68) is de Jacobiaan van de coördinaten-transformatie van $\xi(t, (t, \mathbf{y}))$ naar \mathbf{y} . Deze Jacobiaan wordt aangeduid met aangeduid met $|J(t, \mathbf{y})|$. Dit wil zeggen, dat (69) geldt.

$$\iiint_{V(t)} f(t, \mathbf{x}) dx_1 dx_2 dx_3 = \iiint_{V_0} f(t, \xi(t, (t, \mathbf{y}))) |J(t, \mathbf{y})| dy_1 dy_2 dy_3 \quad (69)$$

Om in de nu volgende afleiding de uitdrukkingen hanteerbaar te houden voeren we een verkorte notatie in (70).

$$\mathbf{g}(t, \mathbf{y}) = f(t, \xi(t, (t, \mathbf{y}))) \quad (70)$$

We nemen nu links en rechts (69) de tijdsafgeleide en vinden (71), waarin we in het rechterlid de notatie (70) gebruiken.

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} f(t, \mathbf{x}) dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{d}{dt} \iiint_{V_0} \mathbf{g}(t, \mathbf{y}) |J(t, \mathbf{y})| dy_1 dy_2 dy_3 \quad (71)$$

De integraal in het rechterlid bevat de tijd nu alleen nog maar in \mathbf{g} en J . de grenzen en het integratievolume zijn niet meer van de tijd afhankelijk. Onder bepaalde voorwaarden kunnen we nu de differentiatie door de integraal heen halen. We vinden dan (72).

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_0} \mathbf{g}(t, \mathbf{y}) |J(t, \mathbf{y})| dy_1 dy_2 dy_3 = \iiint_{V_0} |J(t, \mathbf{y})| \frac{\partial \mathbf{g}(t, \mathbf{y})}{\partial t} + \mathbf{g}(t, \mathbf{y}) \frac{\partial |J(t, \mathbf{y})|}{\partial t} dy_1 dy_2 dy_3 \quad (72)$$

De beide partiële afgeleiden verdienen extra aandacht. Laten we eerst die van \mathbf{g} bekijken, er geldt (73).

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g(t, \mathbf{y})}{\partial t} &= \frac{\partial f(t, \boldsymbol{\xi}(t, (t_0, \mathbf{y})))}{\partial t} \\
&= \left[\frac{\partial f(t, \mathbf{z})}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f(t, \mathbf{z})}{\partial z_j} \frac{\partial \xi_j(t, (t_0, \mathbf{y}))}{\partial t} \right]_{\mathbf{z}=\boldsymbol{\xi}(t, (t_0, \mathbf{y}))} \\
&= \left[\frac{\partial f(t, \mathbf{z})}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f(t, \mathbf{z})}{\partial z_j} v_j(t, \mathbf{z}) \right]_{\mathbf{z}=\boldsymbol{\xi}(t, (t_0, \mathbf{y}))}
\end{aligned} \tag{73}$$

Voor een element van de matrix $J(t, \mathbf{y})$ geldt (74)

$$\frac{\partial J_{ij}(t, \mathbf{y})}{\partial t} = \frac{\partial^2 \xi_i(t, (t_0, \mathbf{y}))}{\partial t \partial y_j} = \frac{\partial^2 \xi_i(t, (t_0, \mathbf{y}))}{\partial y_j \partial t} = \frac{\partial v_i(t, \boldsymbol{\xi}_i(t, (t_0, \mathbf{y})))}{\partial y_j} \tag{74}$$

en dus (75),

$$\frac{\partial J_{ij}(t, \mathbf{y})}{\partial t} = \sum_{k=1}^3 \left[\frac{\partial v_i(t, \mathbf{z})}{\partial z_k} \right]_{\mathbf{z}=\boldsymbol{\xi}_i(t, (t_0, \mathbf{y}))} \frac{\partial \xi_k(t, (t_0, \mathbf{y}))}{\partial y_j} \tag{75}$$

en vervolgens door substitutie (76).

$$\frac{\partial J_{ij}(t, \mathbf{y})}{\partial t} = \sum_{k=1}^3 \left[\frac{\partial v_i(t, \mathbf{z})}{\partial x_k} \right]_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\xi}(t, (t_0, \mathbf{y}))} J_{kj} \tag{76}$$

Een leuke algemene formule voor de determinant, ofwel de, op een constante factor na, enige volledige antisymmetrische multilineaire functie van n vectoren in n dimensies, is de volgende (77).

$$|J| = \frac{1}{3!} \sum_{p \in \Pi_3} \sigma_p J_{1p_1} J_{2p_2} J_{3p_3} \tag{77}$$

Waar Π de verzameling van alle permutaties van 3 getallen is en $3!$ het aantal elementen van Π .

Met σ wordt het teken van de permutatie bedoeld, +1 voor een permutatie opgebouwd uit een even aantal verwisselingen en -1 voor een permutatie opgebouwd uit een oneven aantal verwisselingen.

Formule (77) differentiëren we en we vinden (78).

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} |J| &= \sum_{k=1}^3 \left[\frac{\partial v_1(t, \mathbf{z})}{\partial x_k} \right]_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\xi}(t, (t_0, \mathbf{y}))} \frac{1}{3!} \sum_{p \in \Pi_3} \sigma_p J_{k p_1} J_{2 p_2} J_{3 p_3} + \\
&\quad \sum_{k=1}^3 \left[\frac{\partial v_2(t, \mathbf{z})}{\partial x_k} \right]_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\xi}(t, (t_0, \mathbf{y}))} \frac{1}{3!} \sum_{p \in \Pi_3} \sigma_p J_{1 p_1} J_{k p_2} J_{3 p_3} + \\
&\quad \sum_{k=1}^3 \left[\frac{\partial v_3(t, \mathbf{z})}{\partial x_k} \right]_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\xi}(t, (t_0, \mathbf{y}))} \frac{1}{3!} \sum_{p \in \Pi_3} \sigma_p J_{1 p_1} J_{2 p_2} J_{k p_3}
\end{aligned} \tag{78}$$

Aangezien een determinant van een matrix met twee identieke rijen nul is, vereenvoudigt dit tot (79).

$$\frac{\partial}{\partial t}|J| = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1(t, \mathbf{z})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2(t, \mathbf{z})}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v_3(t, \mathbf{z})}{\partial x_3} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}=\xi(t, (t_0, \mathbf{y}))} \frac{1}{3!} \sum_{p \in \Pi_3} \sigma_p J_{1 p_1} J_{2 p_2} J_{3 p_3} + \quad (79)$$

Ofwel (80).

$$\frac{\partial}{\partial t}|J| = |J| \nabla \mathbf{v} \quad (80)$$

Als we nu (73) en (80) invullen in het rechterlid van (72) vinden we (81).

$$\iiint_{V_0} |J(t, \mathbf{y})| \left[\frac{\partial f(t, \mathbf{x})}{\partial t} + \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f(t, \mathbf{x}) + f(t, \mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v} \right]_{\mathbf{x}=\xi(t, (t_0, \mathbf{y}))} dy_1 dy_2 dy_3 \quad (81)$$

Ofwel (82).

$$\iiint_{V_0} |J(t, \mathbf{y})| \left[\frac{\partial f(t, \mathbf{x})}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} (f(t, \mathbf{x}) \mathbf{v}(t, \mathbf{x})) \right]_{\mathbf{x}=\xi(t, (t_0, \mathbf{y}))} dy_1 dy_2 dy_3 \quad (82)$$

Terugtransformeren naar de oorspronkelijke integratievariabelen levert (83),

$$\iiint_{V(t)} \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla (f \mathbf{v}) \right] dx_1 dx_2 dx_3 \quad (83)$$

waarmee de stelling bewezen is.

A.3 Druk in een Newtonse vloeistof

Stel we hebben een niet samendrukbare Newtonse vloeistof. Dan zijn er twee speciale stromingstoestanden waarin we zonder moeite de druk op alle plaatsen in de vloeistof kunnen bepalen. De centrale formules zijn (11), (12) en (84).

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \nabla(\rho v_i \mathbf{v}) = \rho g_i + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left[-p \delta_{ij} + 2\mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (84)$$

Als het snelheidsveld nul is en we nemen de x as anti-parallel aan de werking van de zwaartekracht en we schrijven g voor de absolute waarde van de zwaartekrachtsversnelling dan geldt dat de druk gegeven wordt door (85), waar p de atmosferische druk is en h de positie van het wateroppervlak.

$$p(\mathbf{x}) = p_0 + g \max(0, h_3 - x_3) \quad (85)$$

Als we uniforme stroming hebben in een kanaal met vaste, symmetrische doorsnede en helling, dat wil zeggen dat de wrijvingskrachten aan de wanden in evenwicht zijn met de zwaartekracht als aandrijvende kracht, dan lopen bodem en wateroppervlak parallel. Als we nu de werkelijkheid even vergeten en aannemen, dat er in dit geval een vast snelheidsprofiel geldt, dat alleen vectoren parallel aan de hoofdas van het kanaal bevat, dan is het handig onze coördinaten zo te kiezen, dat de x -as

samenvalt met de lengte as van het kanaal en loopt in de stromingsrichting, dat de x_1 -as loodrecht staat op de x_2 -as en op de werkingsrichting van de zwaartekracht en dat de x_3 -as het orthogonale assenstelsel completeert. In dat assenstelsel geldt vergelijking (86).

$$\nabla(v_1^2 \mathbf{e}_1) = \mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_1 + \frac{1}{\rho} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left[-p \delta_{1j} + 2\mu \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_1} \right) \right] \quad (86)$$

x

$$0 = \frac{1}{\rho} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left[-p \delta_{2j} + 2\mu \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_2} \right) \right] \quad (87)$$

x

$$0 = \mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_3 + \frac{1}{\rho} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left[-p \delta_{3j} + 2\mu \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_3} \right) \right] \quad (88)$$

Ofwel, als de hoek tussen de bodem en de horizontaal θ is dan,

$$0 = g \sin \theta + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_1} [-p] + \frac{1}{\rho} \sum_{j=2}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left[2\mu \frac{\partial v_1}{\partial x_j} \right] \quad (89)$$

gebruik ook de divergentievrijheid van de snelheid ...

$$0 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_2} [-p] \quad (90)$$

x

$$0 = -g \cos \theta + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_3} [-p] \quad (91)$$

Hieruit volgt, dat de druk over de breedte niet varieert en dat de druk uitgedrukt kan worden in de diepte ter plaatse volgens

$$p(x_1, x_2, x_3) = p_0 + g \cdot \max(0, h(x_1, x_2, x_3) - x_3) \cos \theta \quad (92)$$

waar h de positie van het vloeistof oppervlak geeft. De wrijving volgt nu uit (89).

$$0 = g \sin \theta + \frac{2\mu}{\rho} \sum_{j=2}^3 \left[\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_j^2} \right] = g \sin \theta + \frac{2\mu}{\rho} \Delta v_1 \quad (93)$$

Referenties

J.A. Battjes, "Vloeistofmechanica", *Collegehandleiding*, April 2002.

R. Aris, "Vectors, Tensors and the Basic Equations of Fluid Mechanics", Dover, 1989.

Landau and Lifschitz, "Fluid mechanics", 2nd edition, 1987.

Wesseling, "Principles of Computational fluid Dynamics", Springer, 2000.

Ben Chie Yen, "Open-Channel Flow Equations Revisited", *Journal of the Engineering Mechanics Division*, American Society of Civil Engineers, Vol. 99, No. EM5, October, 1973, pp.979-1009.