

Denkgereedschap om vergelijkingen op te lossen

GAAV:
**Gestructureerde Aanpak Algebraïsche
Vaardigheden**



Universiteit Leiden

ICLON

TU Delft

ICLON, Interfacultair Centrum voor Lerarenopleiding, Onderwijsontwikkeling en Nascholing

Hoe los je deze 2^e graadsvergelijkingen op?

$$2(x - 4)^2 - 2 = 12$$

$$3(x - 2)(x + 6) = 0$$

$$2(x - 1)(x + 1) = 10$$

$$x^2 - 18x = 0$$

$$x^2 + 2x = 12$$

$$(x - 4)^2 = (2x + 2)^2$$

$$(x - 2)^2 - 3(x - 2) - 10 = 0$$

$$2x(x + 4) = 10(x + 4)$$

$$4x^2 - 12 = 8x$$

$$3(x^2 - 15) = 0$$

$$4(x - 8)(x + 4) = 0$$

$$20 = 4(x + 6)^2 - 5$$

huidige leerlijn in voortgezet onderwijs

zorgvuldige start met lineaire vergelijkingen $2x - 3 = 11$

- Trail&error Kies $x=9 \rightarrow 2 \cdot 9 - 3 = 15$ te hoog
- Bordjes zetten $(\dots) - 3 = 11$
- Pijlenketting omdraaien $x \rightarrow 2 \cdot x \rightarrow 2x - 3$
- Balansmethode ‘links en rechts hetzelfde doen’

huidige leerlijn in voortgezet onderwijs

kanen oplossen.

Typen tweedegraadsvergelijkingen	
Twee termen	
<p>$ax^2 + bx = 0$ Haal x buiten haakjes. $3x^2 - 7x = 0$ $x(3x - 7) = 0$ $x = 0 \vee 3x = 7$ $x = 0 \vee x = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$</p>	<p>$ax^2 + c = 0$ Herleid tot de vorm $x^2 = \text{getal}$. $3x^2 - 75 = 0$ $3x^2 = 75$ $x^2 = 25$ $x = 5 \vee x = -5$</p>
Drie termen	
<p>Het linkerlid is te ontbinden Ontbind het linkerlid. $x^2 - 5x - 14 = 0$ $(x + 2)(x - 7) = 0$ $x = -2 \vee x = 7$</p>	<p>Het linkerlid is niet te ontbinden Gebruik de abc-formule. $3x^2 - 2x - 2 = 0$ De discriminant is $D = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot -2 = 28$ $x = \frac{2 - \sqrt{28}}{6} \vee x = \frac{2 + \sqrt{28}}{6}$</p>

Als er exacte oplossingen worden gevraagd, dan moet je algebraïsch te werk gaan en niet afronden.

huidige leerlijn in voortgezet onderwijs

Hoe los je een tweedegraads vergelijking op?

1 Kijk goed of er een makkelijke manier is om de vergelijking op te lossen.

VOORBEELD

$$\begin{aligned}(2x - 3)(x + 1) &= 0 \\ 2x - 3 = 0 \text{ of } x + 1 &= 0 \\ 2x = 3 \text{ of } x &= -1 \\ x = 1\frac{1}{2} \text{ of } x &= -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x + 2)^2 &= 9 \\ x + 2 = 3 \text{ of } x + 2 &= -3 \\ x = 1 \text{ of } x &= -5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2x^2 + 4x &= 0 \\ 2x(x + 2) &= 0 \\ 2x = 0 \text{ of } x + 2 &= 0 \\ x = 0 \text{ of } x &= -2\end{aligned}$$

2 Herleid indien nodig op nul en ontbind vervolgens in factoren of gebruik de *abc*-formule.

VOORBEELD

$$\begin{aligned}3x^2 + 3x &= 18 \\ 3x^2 + 3x - 18 &= 0 \\ x^2 + x - 6 &= 0 \\ (x - 2)(x + 3) &= 0 \\ x = 2 \text{ of } x &= -3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^2 - 5x - 1 &= 0 \\ a = 1, b = -5, c &= -1 \\ D = (-5)^2 - 4 \times 1 \times -1 &= 29 \\ x = \frac{5 + \sqrt{29}}{2} \approx 5,19 \text{ of } x = \frac{5 - \sqrt{29}}{2} \approx -0,19\end{aligned}$$

Ontwikkelen van GAAV

Bestuderen hoe docent en vier expertleerlingen
vergelijkingen oplossen.

Ontwikkelen van GAAV

Bestuderen hoe docent en vier expertleerlingen vergelijkingen oplossen.

$6 = (x^2 + 1)^3$	$(x^2 + 2)^{-0.5} = \frac{1}{2}$	$3(x - 1)(x^2 + 1) = 0$
$(6x)^4 = (x + 3)^4$	$\frac{\sin(x) - 1}{e^x} = 0$	$e^{3x-1} = e^{-2x+10}$
$2x^2 = 6x + 7$	$\frac{2}{x} + \frac{3}{x-1} = 4$	$5(x^2 + 1) = 2x(x^2 + 1)$

Ontwikkelen van GAAV

Indeling in categorieën van expertleerling

- 1) Noemers gelijk maken/ vermenigvuldigen met noemers
- 2) Haakjes wegwerken
- 3) Abc-formule
- 4) Buiten haakjes halen
- 5) Tegengestelde gebruiken
- 6) Vervangen
- 7) Gelijkstellen aan 0
- 8) Wegdenken
- 9) Gonio-kennis
- 10) Logaritme-kennis
- 11) Anders schrijven

Ontwikkelen van GAAV conclusies via expertleerlingen

expertleerlingen

- maken categorieën
(met standaardvergelijkingen),
- hebben (dus) kleinere zoekruimte,
- herkennen sneller en meer
(complexe vergelijkingen terugbrengen
tot standaardvergelijkingen)
- werken doelgericht (met strategie)
- kennen de standaardalgoritmen

Ontwikkelen van GAAV conclusies via expertleerlingen

Onderwijs :

leer categorieën

(met standaardvergelijkingen)

leer de bijbehorende oplossingsalgoritmen

leer identificeren van standaard- en complexe
vergelijkingen

Structureren in zes categorieën

Categorie 1:
links en rechts wegdenken

$$3^{2x+3} = 3^{-2x-6} \dots\dots\dots 2x+3 = -2x-6$$

$$\log(3x+8) = \log(x) \dots\dots\dots 3x+8 = x$$

$$\sin(2x) = \sin\left(x + \frac{1}{3}\pi\right) \dots\dots\dots 2x = x + \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi, 2x = \pi - \left(x + \frac{1}{3}\pi\right) + k \cdot 2\pi$$

$$(x^2 + 3)^2 = (x - 2)^2 \dots\dots\dots x^2 + 3 = x - 2, x^2 + 3 = -(x - 2)$$

$$2x(x - 3) = 10(x - 3) \dots\dots\dots 2x = 10, x - 3 = 0$$



Structureren in zes categorieën

Categorie 2:
terugwerken (met ketting)

$$e^{2x} = 16 \dots\dots 2x = \ln(16)$$

$$(x^2 - 1)^2 = 5 \dots\dots x^2 - 1 = \sqrt{5}, x^2 - 1 = -\sqrt{5}$$

$$(e^x)^2 = 30 \dots\dots e^x = \sqrt{30}, e^x = -\sqrt{30}$$

$$\cos(x) = -1 \dots\dots x = \pi + k \cdot 2\pi$$

Structureren in zes categorieën

Categorie 3:
meerdere dezelfde ‘bordjes’ zetten

$$\frac{\sin(x) - (\sin(x))^2}{(\sin(x))^2} = 3 \dots \dots \frac{p - p^2}{p^2} = 3$$

$$(x - 4)^2 - 4(x - 4) - 12 = 0 \dots \dots p^2 - 4p - 12 = 0$$



Structureren in zes categorieën

Categorie 4:

‘product=0’ (of maken door buiten haakjes halen, ontbinden)

$$3(x-4).(x^2-6).(x-6) = 0 \dots\dots x = 4, x = \sqrt{6}, -\sqrt{6}, x = 6$$

$$4x^3 - 8x^2 - 12x = 0 \dots\dots 4x(x^2 - 2x - 3) = 0$$



Structureren in zes categorieën

Categorie 5:
abc formule

$$x^2 - 4x - 7 = 0 \dots\dots\dots x = \frac{4 + / - \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot -7}}{2}$$



Structureren in zes categorieën

Categorie 6:

eyecatchers: breuken, sinus, logaritme, wortels

$$\frac{2x+4}{x^2+1} = 2 \dots\dots\dots 2x+4 = 2 \cdot (x^2+1)$$

$$\frac{2x+4}{3x-2} = \frac{2x}{x-1} \dots\dots\dots (2x+4) \cdot (x-1) = (3x-2) \cdot 2x$$

$${}^2 \log(3x) + {}^2 \log(16) = {}^2 \log(2x+64) \dots\dots\dots {}^2 \log(48x) = {}^2 \log(2x+64)$$

$$\sin(2x) = \cos(x) \quad 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) = \cos(x)$$
$$\sin(2x) = \sin\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)$$



GAAV overzicht

- Cat 1: links en rechts wegdenken
- Cat 2: terugwerken (met pijlenketting)
- Cat 3: meerdere bordjes zetten
- Cat 4: product = 0 (evt. d.m.v. ontbinden)
- Cat 5: abc formule
- Cat 6: eyecatchers

Hoe los je deze 2e graadsvergelijkingen op?

Cat 1: links en rechts wegdenken

Cat 2: terugwerken (met pijlenketting)

Cat 3: meerdere bordjes zetten

Cat 4: product = 0 (evt. d.m.v. ontbinden)

Cat 5: abc formule

Cat 6: eyecatchers

$$2(x-4)^2 - 2 = 12$$

$$3(x-2)(x+6) = 0$$

$$2(x-1)(x+1) = 10$$

$$x^2 - 18x = 0$$

$$x^2 + 2x = 12$$

$$(x-4)^2 = (2x+2)^2$$

$$(x-2)^2 - 3(x-2) - 10 = 0$$

$$2x(x+4) = 10(x+4)$$

$$4x^2 - 12 = 8x$$

$$3(x^2 - 15) = 0$$

$$4(x-8)(x+4) = 0$$

$$20 = 4(x+6)^2 - 5$$

Hoe los je deze vergelijkingen op?

Cat 1: links en rechts wegdenken

Cat 2: terugwerken (met pijlenketting)

Cat 3: meerdere bordjes zetten

Cat 4: product = 0 (evt. d.m.v. ontbinden)

Cat 5: abc formule

Cat 6: eyecatchers

$$4(x-1)(x^2-3x-4) = 0$$

Hoe los je deze vergelijkingen op?

Cat 1: links en rechts wegdenken

Cat 2: terugwerken (met pijlenketting)

Cat 3: meerdere bordjes zetten

Cat 4: product = 0 (evt. d.m.v. ontbinden)

Cat 5: abc formule

Cat 6: eyecatchers

$$\frac{4(x-3)^2}{\sin(x)-1} = 0$$

Hoe los je deze vergelijkingen op?

Cat 1: links en rechts wegdenken

Cat 2: terugwerken (met pijlenketting)

Cat 3: meerdere bordjes zetten

Cat 4: product = 0 (evt. d.m.v. ontbinden)

Cat 5: abc formule

Cat 6: eyecatchers

$$e^x - e^{-x} = 1\frac{1}{2}$$

Hoe los je deze vergelijkingen op?

Cat 1: links en rechts wegdenken

Cat 2: terugwerken (met pijlenketting)

Cat 3: meerdere bordjes zetten

Cat 4: product = 0 (evt. d.m.v. ontbinden)

Cat 5: abc formule

Cat 6: eyecatchers

$${}^2 \log(x) = 2 + {}^2 \log(x - 4)$$

Hoe los je deze vergelijkingen op?

Cat 1: links en rechts wegdenken

Cat 2: terugwerken (met pijlenketting)

Cat 3: meerdere bordjes zetten

Cat 4: product = 0 (evt. d.m.v. ontbinden)

Cat 5: abc formule

Cat 6: eyecatchers

$$2.\sin^2(x) = \sin(x) + 1$$

Hoe los je deze vergelijkingen op?

Cat 1: links en rechts wegdenken

Cat 2: terugwerken (met pijlenketting)

Cat 3: meerdere bordjes zetten

Cat 4: product = 0 (evt. d.m.v. ontbinden)

Cat 5: abc formule

Cat 6: eyecatchers

$$x^4 - 2x^2 - 48 = 0$$

Hoe los je deze vergelijkingen op?

Cat 1: links en rechts wegdenken

Cat 2: terugwerken (met pijlenketting)

Cat 3: meerdere bordjes zetten

Cat 4: product = 0 (evt. d.m.v. ontbinden)

Cat 5: abc formule

Cat 6: eyecatchers

$$4e^{2x+1} = 8$$

Hoe los je deze vergelijkingen op?

Cat 1: links en rechts wegdenken

Cat 2: terugwerken (met pijlenketting)

Cat 3: meerdere bordjes zetten

Cat 4: product = 0 (evt. d.m.v. ontbinden)

Cat 5: abc formule

Cat 6: eyecatchers

$$x^3 - x^2 - 42x = 0$$

Hoe los je deze vergelijkingen op?

Cat 1: links en rechts wegdenken

Cat 2: terugwerken (met pijlenketting)

Cat 3: meerdere bordjes zetten

Cat 4: product = 0 (evt. d.m.v. ontbinden)

Cat 5: abc formule

Cat 6: eyecatchers

$$2x(x^2 - 2) = 8(x^2 - 2)$$

Hoe los je deze vergelijkingen op?

Cat 1: links en rechts wegdenken

Cat 2: terugwerken (met pijlenketting)

Cat 3: meerdere bordjes zetten

Cat 4: product = 0 (evt. d.m.v. ontbinden)

Cat 5: abc formule

Cat 6: eyecatchers

$$(2x - 3)^4 = x^4$$

Hoe los je deze vergelijkingen op?

Cat 1: links en rechts wegdenken

Cat 2: terugwerken (met pijlenketting)

Cat 3: meerdere bordjes zetten

Cat 4: product = 0 (evt. d.m.v. ontbinden)

Cat 5: abc formule

Cat 6: eyecatchers

$$2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 4\frac{1}{2}$$

Ontwikkelen van GAAV identificeren en oplossen

STAP 1: Identificatiealgoritme

Bepaal tot welke categorie de vergelijking hoort of kan horen (werk de vgl eventueel om)

STAP 2: Oplossingsalgoritme

Los de standaardvergelijking op volgens de aangegeven oplossingsmethode

Iteratief proces: indien weer een vergelijking dan weer stap 1

Ontwikkelen van GAAV zes categorieën aanleren

Implementatie in WIMS

<http://wims.math.leidenuniv.nl/wims/>

Onder studenten bereik
GAAV

login: test

wachtwoord: gaav

Gaav (alle) en tweedegraads vergelijkingen

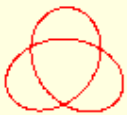
WWW interactive multipurpose server - Mozilla Firefox

File Edit View History Bookmarks Tools Help


http://wims.math.leidenuniv.nl/ Google

WWW Interactieve Mathematica Server

(WIMS) bij wims.math.leidenuniv.nl






[nieuwste](#) [forums](#) [mirrors](#) [instellingen](#) [help](#)



Virtuele Klaslokalen [studenten bereik](#) [leraren bereik](#) [demonstratie klassen](#) [help](#)

Zoeken onder andere [browsen](#)

Op deze website, vind je

-  Alle [Nederlandse](#) modules
-  Alle [Engelse](#) modules
-  Alle [Franse](#) modules
- Alle modules [gesorteerd](#) op onderwerp
- [Lesmateriaal en verwijzingen](#) naar diverse onderwerpen.
- [Online rekenmachines en functie plotters](#) : getallen, functies, matrices, krommen, oppervlakken, etc.
- [Interactieve oefeningen](#) van verschillende stijl en moeilijkheidsgraad.
- [Wiskundige Ontspanning](#) : puzzels en spelletjes.
- [Virtuele Klaslokalen](#) , waar leerlingen kunnen oefenen en worden beoordeeld.
- [Interactieve Documenten](#)

Je kunt ook gewoon [deze website browsen...](#)

maak je eigen [simpele interactieve oefeningen](#) of [full-power modules](#)

[technische documentatie](#) [download](#) [backward links](#) [gebruiks statistieken](#)

Werkblad #1

Kwadratische vergelijkingen per categorie

Je kunt per categorie oefenen met kwadratische vergelijkingen. Je krijgt steeds 3 sommen per oefening. Aan het eind van iedere oefening volgt een overzicht van jouw resultaten. Succes!

Je kunt aan dit werkblad werken **tot** 31 Augustus 2008. De opdrachten in dit werkblad: (cijfer registratie is open, maar je kunt het [opschorten](#).)

- 1. [Categorie 1](#), 10 uit 10 punten behaald, gemiddelde score van 10/10.
- 2. [Categorie 2](#), 0 uit 10 punten behaald, gemiddelde score van 0/10.
- 3. [Categorie 3](#), 0 uit 10 punten behaald, gemiddelde score van 0/10.
- 4. [Categorie 4](#), 0 uit 10 punten behaald, gemiddelde score van 0/10.
- 5. [Categorie 5](#), 0 uit 10 punten behaald, gemiddelde score van 0/10.
- 6. [Categorie 6](#), 10 uit 10 punten behaald, gemiddelde score van 10/10.

Kwadratische vergelijkingen



Los de volgende vergelijking op:




$$(5x - 4)^2 = (3x)^2 \rightarrow$$

OK + OPSTUREN

GEEN IDEE

[Vernieuw de Oefening](#)

Kwadratische vergelijkingen

Oplossing	Jouw antwoord	Resultaat
$(5x - 9)^2 = (7x)^2 \rightarrow x = -9/2$ of $x = 3/4$ $5x - 9 = 7x$ of $5x - 9 = -7x$	$x = 3$	
$(5x - 1)^2 = (9x)^2 \rightarrow x = -1/4$ of $x = 1/14$ $5x - 1 = 9x$ of $5x - 1 = -9x$	$x = -\frac{1}{4}$ of $x = 2$	
$(9x - 7)^2 = (8x)^2 \rightarrow x = 7$ of $x = 7/17$ $9x - 7 = 8x$ of $9x - 7 = -8x$	$x = 7$ of $x = \frac{7}{17}$	 mooi exact berekend

Je hebt 5 (uit 10) punten behaald.

Oplossing bij oefenen complexe vergelijkingen

$$\frac{12}{\sqrt{2+x}} - \sqrt{x+2} = 1 \quad \rightarrow \quad x = 7$$

Gebruik categorie 3, $p = \sqrt{x+2}$.

$${}^2\log(x) + 3 = {}^2\log(x+16) \quad \rightarrow \quad x = \frac{16}{7}$$

Gebruik categorie 6, rekenregels voor logaritmen.

$$3(x-7)^3(x^2-7) = 0 \quad \rightarrow \quad x = -\sqrt{7} \quad \text{of} \quad x = \sqrt{7} \quad \text{of} \quad x = 7$$

Gebruik categorie 4.