Tentamen Lineaire Algebra 1, deel 2
WI1807 TH1, 31 oktober 2012 19:30-21:00.

Het gebruik van hulpmiddelen is niet toegestaan. Wanneer u een stelsel gaat vegen, geef dan duidelijk aan (voordat u gaat vegen) waarom u juist *dat* stelsel gaat vegen. Motiveer altijd uw antwoorden.

1. Maak de volgende definities af:

   (a) Het span van de vectoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ is ...

   (b) Een deelruimte H van $\mathbb{R}^n$ is ...

2. Van een stelsel is de bijbehorende aangevulde matrix gegeven, waarbij $h \in \mathbb{R}$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} h^2-1 & 1 & 4 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & h+3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & h+2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

   Veeg, voor alle waarden van h, de aangevulde matrix naar echelonvorm en bepaal het aantal oplossingen. Denk om de argumenten/motivatie!

3. Gegeven is de matrix A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

   Bepaal (indien mogelijk) de inverse van A. Geef duidelijk de stappen aan.

4. Gegeven zijn de vectoren $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ en $\mathbf{w}$:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 15 \\ -2 \\ 7 \\ 14 \end{bmatrix}$$

   (a) Bepaal of deze vectoren (on)afhankelijk zijn.

   (b) Geef een afhankelijksrelatie tussen deze vectoren of leg uit waarom een dergelijke relatie niet bestaat.

Z.O.Z.

5. Een lineaire transformatie $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ draait vectoren (rond de oorsprong) over $\frac{5\pi}{4}$ met de klok mee. Een lineaire transformatie $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ spiegelt vectoren in de lijn $x_1 = -x_2$. Een lineaire transformatie T draait vectoren eerst (rond de oorsprong) over $\frac{5\pi}{4}$ met de klok mee en spiegelt ze vervolgens in de lijn $x_1 = -x_2$.

   (a) Bepaal de standaardmatrix van R. Gebruik een (nette!) schets om te laten zien hoe u aan uw antwoord komt.

   (b) Bepaal de standaardmatrix van S. Gebruik een (nette!) schets om te laten zien hoe u aan uw antwoord komt.

   (c) Bepaal met behulp van de antwoorden op (a) en (b) de standaardmatrix van T.

   (d) Geef een meetkundig argument om te bepalen of T surjectief (onto) is (i.e. zonder gebruik te maken van de standaardmatrix).

6. (a) De verzameling $B = \{\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_n}\}$ is een basis voor een deelruimte H =Span$\{\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_n}\}$. Waar of niet waar: elke $b \in H$ kan slechts op één manier geschreven worden als lineaire combinatie van $\{\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_n}\}$.

   (b) Waar of niet waar: als A en B gelijksoortig (similar) zijn en als A inverteerbaar is, dan is ook B inverteerbaar. Denkt u dat dit waar is, geef dan ook een formule voor B^{-1}.

Normering: 1: 12, 2: 8, 3: 9, 4: 6, 5: 15, 6: 10

Eindcijfer: (K: aantal punten deel 1, S: aantal punten deel 2)
$K < 4$: O.
$K \geq 4$: $C = 1 + \frac{K}{3} + \frac{S}{10}$.