Lineaire Schakelingen

ET1300

Instructie 8

Slides by Marijn van dongen, et al.

Differentiaalvergelijkingen

- Dynamische elementen:

Condensator: $I = C\dfrac{dV}{dt}$ Spoel: $V = L\dfrac{dI}{dt}$

Nu niet meer alleen *de waarde* van de spanning of stroom belangrijk, maar ook de *mate van verandering (afgeleide)* is belangrijk

Eerste orde circuits

Beschouw t=0-
Vind V_C(0-) of I_L(0-)
1

Beschouw t=0+
C $\rightarrow$ ~spanningsbron $V_C(0+)=V_C(0-)$,
L $\rightarrow$ ~stroombron $I_L(0+) = I_L(0-)$
Vind x(t0+)
2

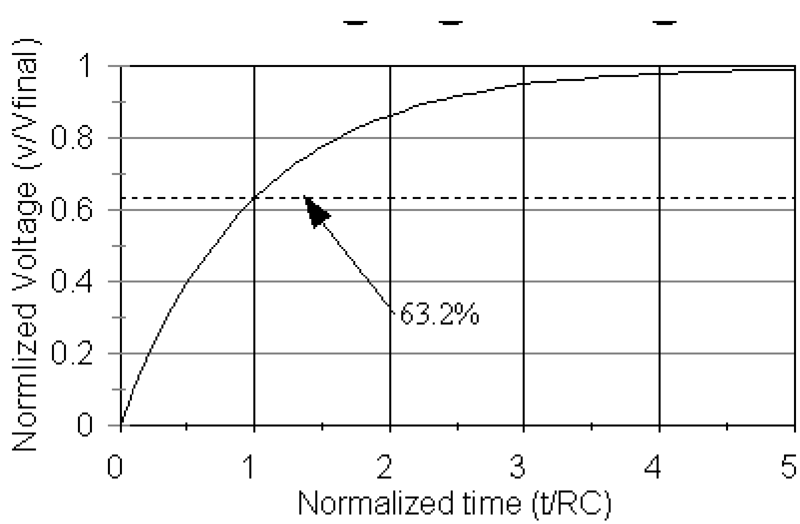
Beschouw t=∞
(C $\rightarrow$ open, L $\rightarrow$ kort)
Vind nu x(∞)
3

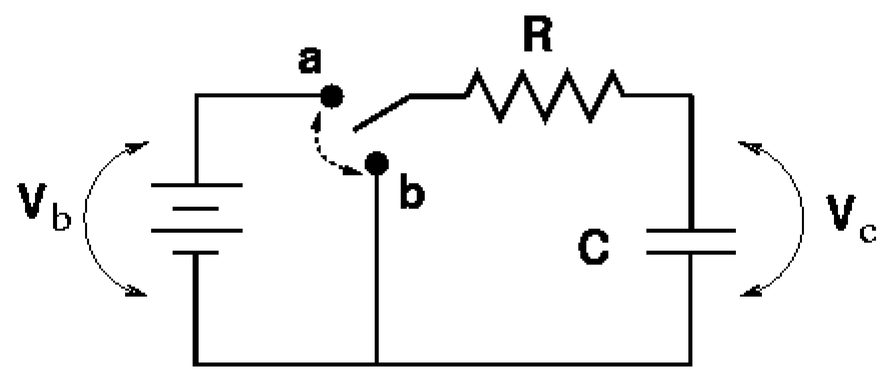
Bepaal tijdconstante
Bepaal de thevenin resistantie aan de klemmen van C of L
Vind nu $\tau=R_{th}C$ of $\tau=L/R_{th}$
4

$$x(t) = x(\infty) + [x(0+) - x(\infty)]\exp(-t/\tau)$$

Eerste orde circuits (één C of L)

- Voorbeeld opladen capaciteit
- De stroom door de capaciteit (hoe snel deze oplaadt), hangt af van de afgeleide van de spanning





Tweede orde circuits

Wat kunnen we verwachten?

- Zowel een C als een L
- Interactie:
  energie kan zich verplaatsen van spoel naar condensator en visa versa…
- Een R zorgt voor demping

$$I = C\frac{dV}{dt}$$

$$\updownarrow$$

$$V = L\frac{dI}{dt}$$

Tweede orde circuits

Stappen

- Stel knooppunt / maasvergelijking op
- Bepaal differentiaal vergelijking + beginvoorwaarden
- Bepaal karakteristieke vergelijking
- Soort responsie bepalen
- Algemene oplossing
- Coëfficiënten oplossen m.b.v. beginvoorwaarden (t=0) eindvoorwaarden

Tweede orde circuits

Stel de differentiaalvergelijking op: $$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_o\frac{dx(t)}{dt} + \omega_o^2 x(t) = 0$$

Bepaal kar. Vergelijking: $s^2 + 2\zeta\omega_o s + \omega_o^2 = 0$

Bepaal de oplossing:

$$s_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\zeta\omega_o \pm \omega_o\sqrt{\zeta^2 - 1} = -\sigma \pm j\omega_d$$

s_1 en s_2 zijn de natuurlijke frequenties
ω_o is de ongedempte natuurlijke frequentie
ω_d is de gedempte natuurlijke frequentie

met: $\sigma = \zeta\omega_o$

$$\omega_d = \omega_o\sqrt{1-\zeta^2}$$

Bepaal de soort responsie en de bijbehorende algemene oplossing

Overdamped (ζ>1→ D>0), $s_1 \neq s_2$ en reëel → $x(t) = K_1e^{s_1t} + K_2e^{s_2t} + K_3$

Critically damped (ζ=1 → D=0) $s_1 = s_2$ → $x(t) = K_1e^{s_1t} + K_2te^{s_2t} + K_3$

Underdamped (ζ<1→ D<0), s_1 = conj(s_2) en compl. →

$$x(t) = e^{-\sigma t}\left(K_1\cos(\omega_d t) + K_2\sin(\omega_d t)\right) + K_3$$

Tweede orde circuits

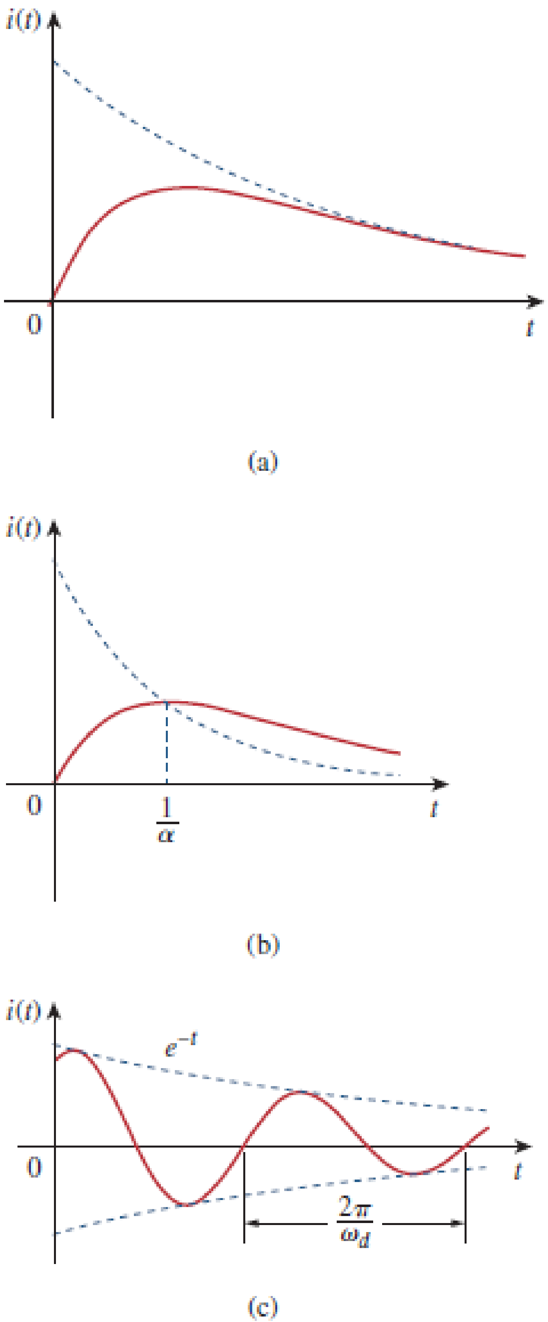


Figure 8.9
(a) Overdamped response, (b) critically damped response, (c) underdamped response.

ζ > 1: geen oscillaties
(overgedempt)

Dempingsfactor: ζ
Nauurlijke frequentie: ω

ζ = 1: net geen
oscillaties (kritisch gedempt)

ζ < 1: gedempte oscillatie
ζ = 0: sinusvormig
ζ < 0: exploderende
oscillatie

(ondergedempt)

Tweede orde circuits

Coëfficiënten oplossen m.b.v.:

- beginvoorwaarden (t=0)
- eindvoorwaarden (t=∞)
- Bekende waarde afgeleiden bij (t=0)

Hierbij maken we nog steeds gebruik van het feit dat:

- De spanning van een condensator niet sprongsgewijs kan veranderen
- De stroom van een spoel niet sprongsgewijs kan veranderen

Appendix A

Hoe komen we aan de karakteristieke vergelijking?

$$\boxed{x(t) = ke^{st}} \Rightarrow \quad x'(t) = ske^{st} = s\,x(t)$$

$$x''(t) = s^2ke^{st} = s^2\,x(t)$$

aannemen als oplossing

invullen:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + b\frac{dx(t)}{dt} + c\,x(t) = 0$$

$$k\frac{d^2e^{st}}{dt^2} + bk\frac{de^{st}}{dt} + cke^{st} = 0$$

$$ke^{st}\underbrace{(s^2 + bs + c)} = 0$$

kan niet 0 zijn want dit is x(t) dus de oplossing!

$$s^2 + bs + c = 0$$ karakteristieke vgl.