

# module 0

**Inleiding optimaliseren in netwerken**

Dit studiemateriaal is ontwikkeld door de kerngroep wiskunde D Delft en mag gratis gebruikt worden in het wiskundeonderwijs in het vo.

Kerngroep wiskunde D Delft

Liesbeth Bos

Wim Caspers

**Wim van Dijk**

David Lans

Jan Moen

Rob van Oord

Sanne Schaap

Jan Schrik

Jeroen Spandaw

Agnes Verweij

Scala College

TU Delft / Adelbert College

**Montessori Lyceum**

Emmaus College

Int. College Edith Stein

Coenecoop College

Marecollege

Christelijk Lyceum Delft

TU Delft

TU Delft

**module 0**

website: [www.wiskundedsteun.nl](http://www.wiskundedsteun.nl)

contact: [w.t.m.caspers@tudelft.nl](mailto:w.t.m.caspers@tudelft.nl)

Alle rechten voorbehouden. Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand, of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen, of op enige andere manier, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de kerngroep.

<b>Module 0</b>	<b>Inleiding optimaliseren in netwerken</b>
<b>Theorie</b>	-
<b>Opdrachten</b>	p. 5
<b>Antwoorden</b>	p. 6
<b>Bestuderen van wetenschappelijk materiaal</b>	p. 7
<b>Programmeren</b>	p. 8-9
<b>Extra</b>	<b>Woordenlijst</b>
<b>Literatuur</b>	<b>Introduction to Operations Research, Hillier / Lieberman</b> <b>paragraaf 9.1 en 9.2</b>

**Geachte docent,**

Ter inleiding op een of meer onderwerpen van Optimaliseren in netwerken kunt u op diverse wijzen gebruik maken van bovengenoemd materiaal.

U kunt de opdrachten voorleggen aan de leerlingen en de antwoorden voor uzelf houden. U kunt er ook voor kiezen de antwoorden ook aan de leerlingen uit te delen.

Om leerlingen van het begin af aan vertrouwd te maken met Engelstalig studiemateriaal op dit gebied kunt u ze ook direct de genoemde paragrafen uit Introduction to Operations Research (Hillier / Lieberman) voorleggen. Dit boek wordt aan universiteiten gebruikt. Wellicht kan de woordenlijst het lezen van dit universitair studiemateriaal bij volgende onderwerpen van Optimaliseren in netwerken vergemakkelijken.

Als u er voor kiest de leerlingen te toetsen aan de hand van een in te leveren verslag of werkstuk, is het stuk over programmeren misschien interessant. Met dit gratis programma van het Freudenthal Instituut kunnen de leerlingen een graaf tekenen en bijbehorende afstandentabel invullen.

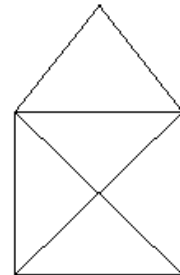
## Module 0

### *Inleiding Optimaliseren in netwerken*

#### 1 Huisje

Je hebt vast het huisje in figuur 1 wel eens gezien en daarbij de opdracht gekregen: "teken alle lijnen één keer zonder je pen van het papier te halen". Wellicht is het je opgevallen, dat als je in een van de hoekpunten onderaan begint, het meestal (altijd?) wel lukt, maar als je ergens anders start dan lukt het zeker niet.

- Probeer uit te vinden hoe dit komt.

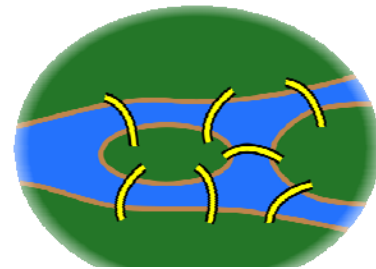


*Figuur 1: elk huisje draagt zijn kruisje*

#### 2 Koningsberger bruggen

Een klassiek probleem is dat van de bruggen van Koningsbergen. Deze stad was gebouwd op twee eilanden in de rivier, waarbij bruggen de eilanden onderling en met de oever verbonden op de manier zoals in figuur 2. De vraag was of het mogelijk is in een wandeling precies één keer over alle bruggen te gaan.

- Leg uit waarom dit wel/niet kan.  
Aanwijzing: maak eerst een schema met de verbindingen tussen de twee eilanden en de beide oevers. Het antwoord op die vraag kun je vinden door op eenzelfde manier te redeneren als bij het huisje.



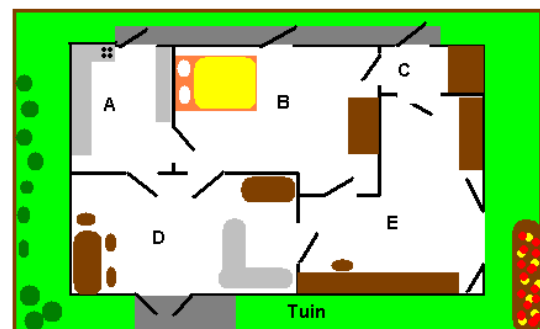
*Figuur 2: Koningsberger bruggen*

#### 3 Veel deuren

In het derde probleem is er een huis met vijf kamers. Alle kamers die naast elkaar liggen, zijn verbonden door een deur; bovendien is er van elk van de kamers een deur naar de tuin.

- Hier is de vraag of het mogelijk is een rondgang te maken waarbij elke deur één keer gepasseerd wordt.

TIP: probeer een schematische tekening van de situatie te maken!

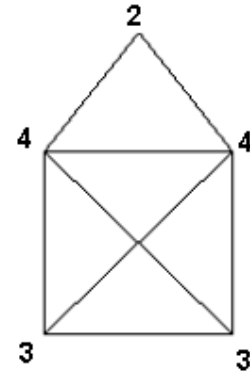


*Figuur 3: veel deuren*

## Antwoorden

### 1 Huisje

Let op het aantal lijnstukken dat aan een punt grenst. Als bij het tekenen van het huisje een punt gepasseerd wordt, tekent men daarbij 2 lijnstukken (inkomend en vertrekkend). Bij elke passage is dit het geval; dus is bij bijna elk punt bij een rondgang het aantal inkomende en uitgaande lijnen een even aantal. De enige uitzonderingen kunnen het startpunt en het eindpunt zijn; als deze niet samenvallen, is dit een oneven aantal. Het aantal inkomende en uitgaande lijnen bij een punt wordt de graad van een punt noemen. Er is dus alleen een rondgang mogelijk als er twee punten of geen punten met een oneven graad zijn.

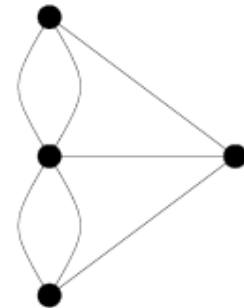


Figuur 4

### 2 Koningsberger bruggen

Als we de eilanden presenteren als een stip en de bruggen als een verbinding hiertussen, krijgen we figuur 5.

Hier is de graad van alle vier de punten oneven, een rondgang is dus niet mogelijk. Dit hebben we vastgesteld in opgave 1.



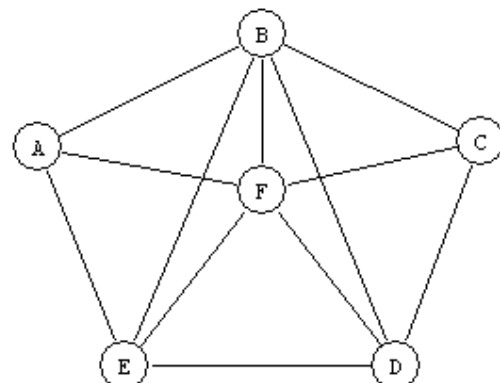
Figuur 5

### 3 Veel deuren

In een schematische voorstelling van de situatie tekenen we niet alleen punten voor de kamers A, B, C, D en E, maar ook één voor de tuin F.

De verbindingen zijn de deuren.

De graad van D en E is even, maar van de andere vier punten is hij oneven: er is géén rondgang mogelijk. Dit hebben we vastgesteld in opgave 1.



Figuur 6

## Bestuderen van wetenschappelijk materiaal

In bovenstaande problemen was het steeds handig een schematische voorstelling van de situatie te maken. Zo'n schematische voorstelling noemen we een **graaf**. De verbindingen heten **takken** of **kanten** (in het Engels: **edges**); de punten die door de takken verbonden worden, heten **knooppunten** of kortweg **knopen** (in het Engels: **vertices**, enkelvoud: **vertex**).

In de voorbeelden hadden de takken geen gewicht, deed het er niet toe hoe "duur" het doorlopen van een tak was. Bij veel praktische problemen doet het er wél toe hoe de takken gewogen worden. Denk bijvoorbeeld aan een routeplanner voor een auto. Daar is het van belang dat de route zo kort mogelijk is (km), zo snel mogelijk (uur) of zo goedkoop mogelijk (euro). Soms kan men zijn prioriteit instellen: verschillende instellingen geven dan mogelijk verschillende oplossingen. In het onderdeel optimaliseren is één van de problemen hoe zo'n route gepland wordt en hoe zo'n berekening efficiënt aangepakt kan worden.

Het gaat dan steeds om het vinden van een optimale oplossing. De routeplanner lost het zogenaamde **kortste pad probleem** op. Hierbij kan *kort* afstand betekenen, maar in een andere context ook tijd, of geld.

In de inleiding en §9.1 uit Hillier en Lieberman worden behalve het kortste pad probleem ook het probleem van **de minimaal opspannende boom** en dat van de **maximale stroom met minimale kosten** beschreven. Dit zijn ook voorbeelden van optimaliseringsproblemen.

- 1 Lees §9.1 en denk daarbij aan de verschillende betekenissen die knopen, verbindingen en stromen kunnen hebben. Kun je zelf het lijstje met voorbeelden uitbreiden?

knopen	takken	stroom
kruispunten	wegen	voertuigen
luchthavens	luchtwegen	vliegtuigen
schakelpunten	draden	boodschappen
pompstations	leidingen/buizen	vloeistoffen
...	...	...

In §9.2 van Hillier en Lieberman kom je beschrijvingen van begrippen tegen die bij netwerkproblemen worden gebruikt.

- 2 Lees §9.2. Zoek bij een (vetgedrukt) Engels begrip steeds de Nederlandse vertaling en omschrijf het vervolgens in het Nederlands. Voor de vertalingen van de vetgedrukte woorden kun je gebruik maken van de volgende (alfabetische) lijst. Je mag ook woorden combineren.

boom	knoop	pijl
bron	netwerk	put
capaciteit	ongericht	tussenstation
cykel (kring)	opgespannen	verbinding
gericht	pad	verbonden

## Programmeren

Zoals je al hebt kunnen zien in de oefeningen kan het soms handig zijn om een plaatje om te zetten in een schematische tekening met punten en lijnen. Zo'n schematische tekening wordt ook wel een graaf genoemd met knopen en verbindingen.

We gaan nu een programma gebruiken om zulke grafen makkelijk te kunnen tekenen. Volg stap voor stap de onderstaande punten en ook jij kan straks een echte graaf tekenen!

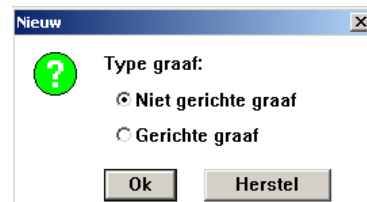
### Het opstarten van het programma

Het programma heet 'grafmat'. Je docent zal vertellen waar dit op de computer te vinden is. Start het programma.

Bij het opstarten zie je het schermje van figuur 1. Hier staan copyright gegevens op. Klik op 'OK' om door te gaan.



Figuur 1



Figuur 2

### Het begin

Klik op 'Bestand' en dan op 'Nieuw'. Je krijgt nu het schermje van figuur 2 met de vraag of je een gerichte of een ongerichte graaf wilt werken. Om te beginnen gaan we werken met een ongerichte graaf. Als we straks klaar zijn, mag je zelf proberen een gerichte graaf te maken. Klik op 'Ok' om door te gaan.

### Het maken van de graaf

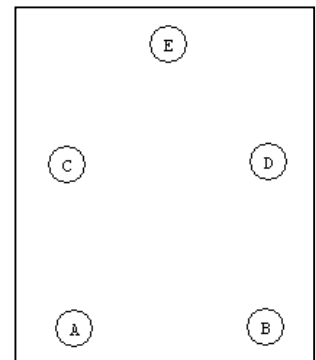
Je scherm is nu in twee helften verdeeld. Straks komt in het bovenste venster de graaf te staan en in het onderste venster de afstandentabel. Als eerste moet je de knopen aangeven. Laten we het voorbeeld van het huisjes probleem gebruiken, uit opgave 1. We hadden daar 5 hoekpunten, ofwel 5 knopen. Die gaan we nu ook maken door op 'Teken' te klikken in het menuutje aan de linkerkant, zie figuur 3.

Als je nu ergens klikt in het bovenste venster, dan maakt het programma een knoop en noemt deze knoop automatisch 'A', daarna 'B', 'C' etc.



Figuur 3

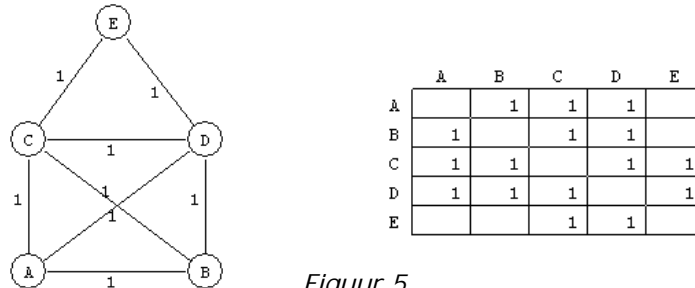
Probeer nu de knopen van het huisje te tekenen, zoals in figuur 4 is aangegeven.



Figuur 4

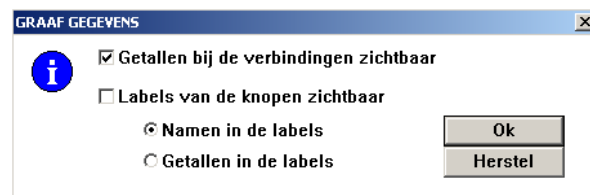


Nu gaan we de verbindingen aangeven. Dit doen we met behulp van de afstandentabel in het onderste scherm, die ontstaan is tijdens het plaatsen van de knopen. De verbindingen van het huisje hadden allemaal geen gewicht, maar laten we voor elke verbinding het gewicht 1 invullen. Klik op een vakje om daar iets in te zetten. De verbinding tussen knoop A en B is het vakje van kolom A en rij B, of van rij A en kolom B. Je zult zien dat als je voor de eerste optie kiest, het programma dan automatisch ook bij de tweede optie hetzelfde getal neerzet. Dit komt omdat het een ongerichte graaf is, je kan zowel van A naar B als van B naar A. Als je alle verbindingen in de afstandentabel hebt gezet, moeten de tabel en de graaf eruit zien als in figuur 5.



Figuur 5

Het kan zijn dat jouw lijntjes niet zo netjes horizontaal en verticaal zijn geworden. Als je in het linkermenuutje op 'Wijs' klikt, dan kan je daarna de knopen rechtzetten door ze te verslepen. Omdat in dit voorbeeld het gewicht van de verbindingen eigenlijk niet belangrijk is, kan je ze weglaten in de graaf. Deze kun je onzichtbaar maken door in het linkermenuutje op 'Info' te klikken. Je krijgt figuur 6.



Figuur 6

Door het eerste vinkje uit te zetten maak je de getallen bij de verbindingen onzichtbaar. Je kunt er hier ook voor kiezen om de knopen een naam te geven, door er een labeltje aan te voegen of om de knopen te nummeren. Helaas heeft het programma geen mogelijkheid om de figuren als een plaatje op te slaan. Als je dit toch graag wilt, dan kan je op de 'Print screen' knop op de toetsenbord drukken (deze knop zit in de buurt van de 'delete' knop). Als je nu een tekenprogramma opent (zoals Microsoft Paint, onder bureau-accessoires) en op 'Plakken' klikt (sneltoets CTRL-V), dan zie je het hele beeldscherm als plaatje. Hier kun je nu uit selecteren wat je wilt hebben, om het vervolgens op te slaan als plaatje (.bmp, .jpg of .gif).

### Oefening

Probeer nu zelf de graaf te maken met behulp van het programma 'grafmat' van het 'veel deuren' probleem.

## ***Woordenlijst Engels-Nederlands***

ENGELS	NEDERLANDS
adjacent	aangrenzend
arc	pijl/verbinding
arc progression	pijlenreeks
bounded	begrensd
chain	keten
conformal flows	gelijkgerichte stromen
connected graph	samenhangende graaf
cut	snede
directed	gericht
distance	afstand
edge	tak
feasible	toelaatbaar
flow	stroom
graph	graaf
Intermediate..	tussen-
link	verbinding
path	pad
reach	bereik
saturated	verzadigd
set	verzameling
sink	put
source	bron
spanning tree	voortbrengende boom
tree	boom
undirected	niet-gericht
value of the flow	waarde van de stroom
vertex	knooppunt
vertices	knooppunten

