TU Delft

Technische Universiteit Delft

module 1

Minimaal opspannende bomen

Dit studiemateriaal is ontwikkeld door de kerngroep wiskunde D Delft en mag gratis gebruikt worden in het wiskundeonderwijs in het vo.

Kerngroep wiskunde D Delft

Liesbeth Bos	Scala College	
Wim Caspers	TU Delft / Adelbert College	
Wim van Dijk	Montessori Lyceum	
David Lans	Emmaus College	
Jan Moen	Int. College Edith Stein	
Rob van Oord	Coenecoop College	
Sanne Schaap	Marecollege	
Jan Schrik	**Christelijk Lyceum Delft**	**module 1**
Jeroen Spandaw	TU Delft	
Agnes Verweij	TU Delft	

website: www.wiskundedsteun.nl
contact: w.t.m.caspers@tudelft.nl

Module 1	**Minimaal opspannende boom**	
Theorie	**p. 5-12**	
Opgaven	**p. 13-16**	
Antwoorden	**p. 17-21**	
Bestuderen van wetenschappelijke literatuur	**p. 23-25**	
Programmeren	**p. 27-28**	
Toetsopgaven	**p. 29-39**	
Extra opgaven	**p.**	
Antwoorden extra opgaven	**p.**	
Literatuur	**Introduction to Operations Research, Hillier / Lieberman**	**paragraaf 9.1 en 9.2**
	Operationele analyse, Tijms	**paragraaf 3.3**

Geachte docent,

Om uw leerlingen zich het onderwerp Minimaal opspannende bomen eigen te laten maken kunt u op diverse wijzen gebruik maken van het materiaal in deze module.

U kunt de moduletekst voorleggen aan de leerlingen en de genoemde literatuur gebruiken voor uzelf, als achtergrondinformatie.

U kunt het materiaal gebruiken om een eigen vorm te geven aan uw lessen. U gebruikt de diverse onderdelen om uw eigen verhaal over het onderwerp voor te bereiden. De opdrachten uit de module gebruikt u dan bijvoorbeeld als oefenmateriaal.

De leerlingen kunnen zich verdiepen in het onderwerp door middel van eigen onderzoek. U heeft dan materiaal en literatuur beschikbaar als achtergrondinformatie.

Om leerlingen vertrouwd te maken met wetenschappelijk studiemateriaal kunt u ze ook direct de genoemde paragraaf uit Introductions to Operations Research (Hillier / Lieberman) voorleggen. Voor de Engelstalige literatuur kan de woordenlijst van module 0 en de oefening met het lezen van universitair studiemateriaal van dienst zijn.

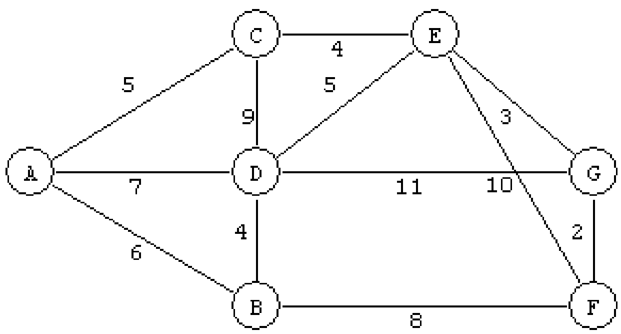
Bij dit onderwerp kan de grafische rekenmachine ook een rol spelen. Ook voor dat materiaal geldt dat u het de leerlingen direct kunt verstrekken of maar u kunt het ze ook zelf proberen te laten schrijven.

De toetsopgaven zijn te gebruiken voor het samenstellen van een toets. Vanzelfsprekend kunnen leerlingen door middel van een verslag of een presentatie ook laten zien in hoeverre zij de materie beheersen. De kennis van het programma ‘grafmat’ uit module 0 kan daarbij van dienst kan zijn.

Module 1

Minimaal opspannende bomen

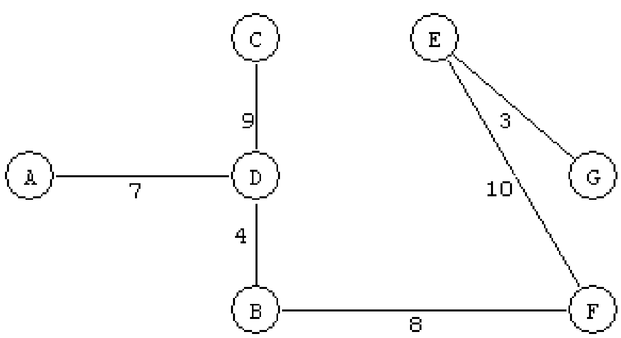
Een aantal boorplatforms moet onderling en met de kust A worden verbonden via een zo goedkoop mogelijk pijpleidingennet. De kosten (in kosteneenheden) van elke mogelijke pijpleiding zijn bekend, zoals weergegeven in figuur 1.



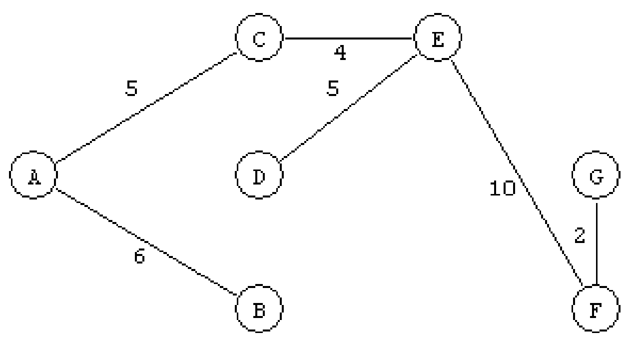
Figuur 1: kosten van mogelijke pijpleidingen

We gaan nu bekijken hoe hoog de kosten zijn van verschillende leidingennetten. Deze gaan we optimaliseren, zodat er netten ontstaan die met een minimaal aantal leidingen, de boorplatforms onderling en met de kust verbinden. Bovendien moeten de kosten van die leidingen ook minimaal zijn.

In dit geval is het minimale aantal leidingen 6 (bedenk zelf waarom!).
In de figuren 2 en 3 zijn twee mogelijke leidingennetten getekend met dat minimaal aantal verbindingen, waarbij alle platforms onderling en met de kust verbonden zijn.



Figuur 2



Figuur 3

De kosten bedragen respectievelijk 41 en 32 kosteneenheden.
De vraag is of er misschien een toegestaan leidingennet bestaat met nog minder kosten.

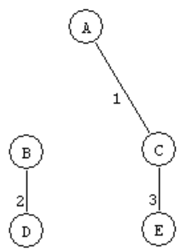
Oefening

1. Zoek in de hierboven beschreven situatie een mogelijk leidingennet op met een waarde van 24 kosteneenheden.
2. Probeer na te gaan of er een mogelijke leidingennet is met een waarde van minder dan 24 kosteenheden.

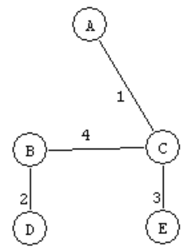
In deze oefening hebben we een leidingennet gevonden met **minimale** kosten.
Dit netwerk noemen we **optimaal**.

Een paar begrippen

Voordat we twee efficiënte oplossingsmethoden van het probleem van de boorplatforms zullen bespreken zijn een paar begrippen van belang.
We bekijken in dit gedeelte grafen (netwerken) die **samenhangend** zijn, dat wil zeggen dat ieder punt verbonden is met elk ander punt via de verbindingslijnen en punten van de graaf.



Figuur 4: onsamenhangende graaf



Figuur 5: samenhangende graaf

Als een graaf een of meer **cykels** heeft dan wil dit zeggen dat je rondjes kunt lopen in de graaf.

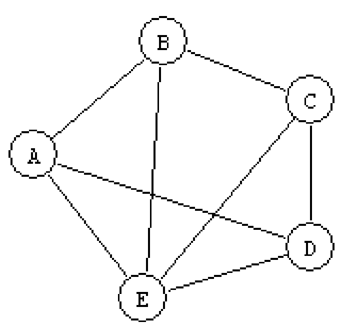
Definitie 1: Een **pad tussen twee punten** is een verzameling van verschillende verbindingslijnen die deze twee punten met elkaar verbinden.

Definitie 2: Een pad.dat begint en eindigt in hetzelfde punt wordt een **cykel** genoemd.

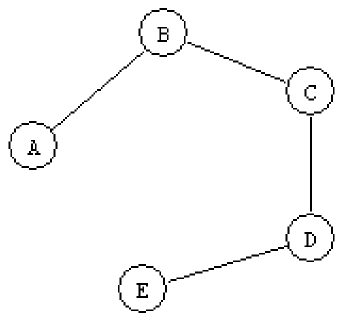
Definitie 3: Een **opspannende boom** van een samenhangende graaf is een deelgraaf die alle punten van de graaf bevat en een boom is.

Definitie 4: Een **boom** is een samenhangende graaf die geen cykels bevat.

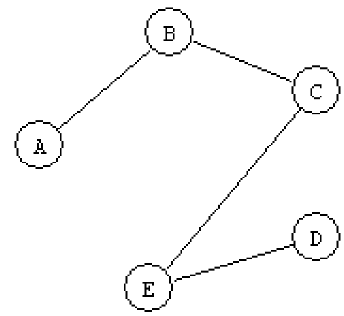
Van onderstaande graaf (figuur 6) is een aantal **opspannende bomen** te maken. In de figuren 7 en 8 zie je er twee.



Figuur 6: een voorbeeld

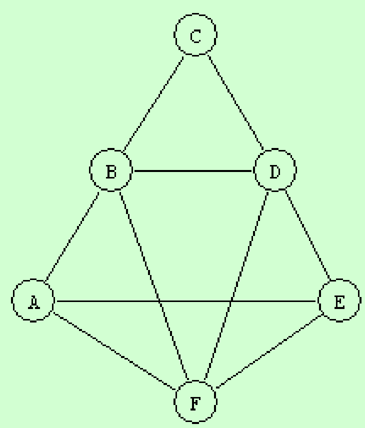


Figuur 7: een opspannende boom



Figuur 8: een opspannende boom

Oefening
Teken van onderstaande graaf drie verschillende opspannende bomen.



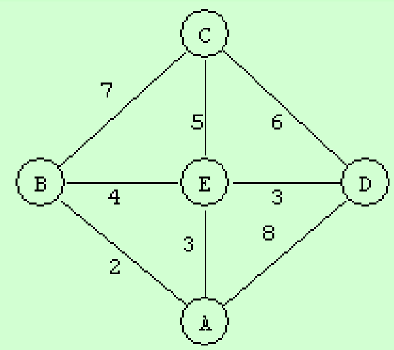
Zoals je gezien hebt in het voorbeeld van de boorplatforms wordt er aan verbindingslijnen soms een **waarde** gegeven. In het leidingennet van de platforms werden zo de kosten aangegeven. Maar zo kan ook het aantal kilometers tussen twee plaatsen, of de tijd die het kost om van de ene plaats naar de ander plaats te gaan genoteerd worden. In plaats van waarde wordt ook wel het woord **gewicht** gebruikt.
Een graaf voorzien van gewichten wordt een **gewogen graaf** genoemd of een **netwerk**. De verbindingslijnen worden ook wel **takken** of **wegen** genoemd.

Net als bij het boorplatformprobleem zijn we geïnteresseerd in het totale gewicht van een opspannende boom van een netwerk. Denk maar aan het voorbeeld uit de inleiding.

Oefening

Gegeven is de gewogen graaf hieronder.

1. Teken twee opspannende bomen, één met totaal gewicht 16 en één met totaal gewicht 26.
2. Kun je een opspannende boom tekenen met een totaal gewicht kleiner dan 16?



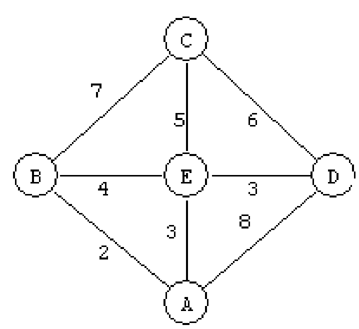
Vaak is het vinden van een opspannende boom waarvan het totale gewicht minimaal (zo klein mogelijk) is van belang, bijvoorbeeld om een zo goedkoop mogelijk netwerk aan te leggen. Een dergelijke boom heet een **minimaal opspannende boom**.

De netwerken die we tot nu toe bekeken hebben, zijn redelijk eenvoudig. Een minimaal opspannende boom is met een beetje geluk nog wel te vinden. Je kunt je voorstellen dat voor ingewikkelde situaties het handig zou kunnen zijn om een soort recept ter beschikking te hebben.
Er zijn diverse **algoritmes** (een algoritme is een soort recept van hoe je iets moet doen) die ons in staat stellen minimaal opspannende bomen te vinden. We bespreken het algoritme van Kruskal en het algoritme van Prim.

Het algoritme van Kruskal

Hoe dit algoritme werkt, zullen we aan de hand van de graaf uit de laatste oefening bekijken, (zie figuur 9).

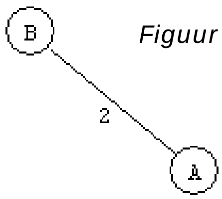
Stap 1
Zoek een verbindingslijn met het kleinste gewicht.
Dit is in dit voorbeeld de lijn van A naar B (zie figuur 10a)



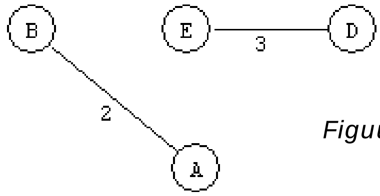
Figuur 9

Stap 2
Voeg nu toe een lijn met het laagste gewicht zonder dat er een cykel ontstaat. Dit is hier bijvoorbeeld de lijn van E naar D (zie figuur 10b)

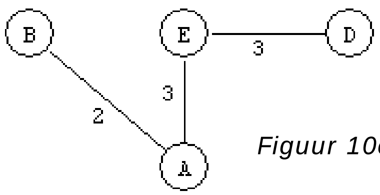
Stap 3
Herhaal stap 2 totdat geen nieuwe lijn meer gekozen kan worden. Zie de figuren 10c en 10d.



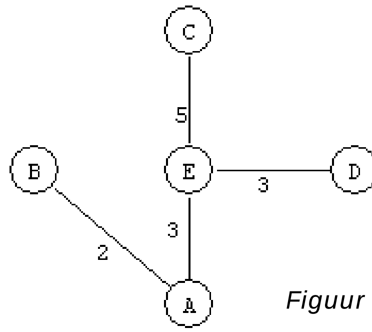
Figuur 10a



Figuur 10b



Figuur 10c



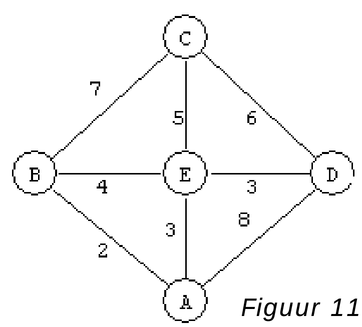
Figuur 10d

Deze minimaal opspannende boom heeft een waarde (gewicht) van 13.

Het algoritme van Prim

Ook nu gebruiken we weer de graaf uit de laatste oefening om uit te leggen hoe dit algoritme werkt (zie figuur 11).

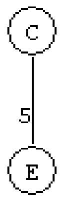
Stap 1
Kies een willekeurig punt van de graaf, bijvoorbeeld C. Neem nu een met dit punt verbonden lijn waarvan het gewicht zo laag mogelijk is. Dit is de lijn van C naar E (zie figuur 12a)



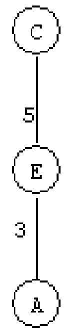
Figuur 11

Stap 2
Zoek onder alle verbindingslijnen tussen een **niet** verbonden punt en een inmiddels **wel** verbonden punt, de lijn met het laagste gewicht. Dit is bijvoorbeeld de lijn van A naar E (zie figuur 12b)

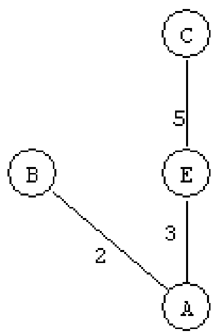
Stap 3
Herhaal stap 2 totdat een opspannende boom is ontstaan.
Zie de figuren 12c en 12d.



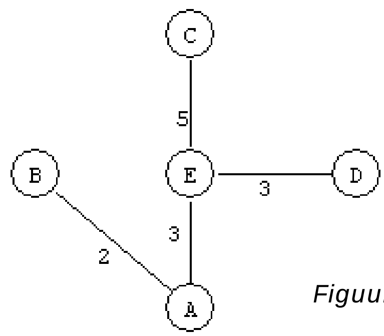
Figuur 12a



Figuur 12b



Figuur 12c



Figuur 12d

Het algoritme van Prim werkt

Gegeven is een (niet-gerichte) samenhangende graaf G, bestaande uit een verzameling knooppunten en een aantal wegen tussen die knooppunten. Het algoritme van Prim levert als volgt een boom op. Noem de verzameling van knooppunten die tot de boom gaan behoren K en de verzameling wegen die tot de boom gaan behoren W.
Om te beginnen stoppen we een willekeurig knooppunt (k_1) in K. Vervolgens bepalen we het knooppunt dat het dichtste bij het eerste knooppunt ligt (k_2) en dat stoppen we ook in K. De weg w_1 die de twee knooppunten met elkaar verbindt, stoppen we in W.
Als volgende stap bepalen we een knooppunt k_3 dat nog niet in K zit en het dichtste bij één van de knooppunten in K zit. De weg die die verbinding vormt, w_2 stoppen we in W.
Die laatste stap wordt herhaald, en zo vinden we k_4 en w_3. Enzovoorts, totdat alle knooppunten in K zijn gestopt. Als de oorspronkelijke graaf n knooppunten heeft, dan zitten er uiteindelijk n-1 wegen in W.

Bijvoorbeeld, als de graaf 18 knooppunten heeft, dan levert het algoritme van Prim een verzameling knooppunten k_1, k_2, ..., k_{18} en een verzameling wegen w_1, w_2, ..., w_{17}.

Levert dit algoritme nu ook een minimaal opspannende boom? De boom die het algoritme, uitgaande van graaf G, levert noemen we P. De vraag is dan: is P een minimaal opspannende boom. G heeft in ieder geval wel minimaal opspannende bomen. We noemen de minimaal opspannende boom die het meest op P lijkt T. Uiteindelijk zal blijken dat P hetzelfde is als T, en dus is P al die tijd al een opspannende boom geweest.
Wat bedoelen we met “**T lijkt het meeste op P**”. Een boom T lijkt op P, wanneer een aantal wegen, bijvoorbeeld w_1, w_2, w_3, ..., w_9 van P ook deel uit maken van T. Een boom T lijkt meer op P als zelfs het rijtje w_1, w_2, w_3, ..., w_9, w_{10}, w_{11} deel uit maakt van T. De boom die het meeste lijkt op P heeft het langste rijtje w_1, w_2, w_3, ..., w_{k-1} dat deel uit maakt van P. Als T niet hetzelfde is als P, dan zit de weg w_k zit in dat geval niet in T. De weg w_k zit wel in P en verbindt daar twee knooppunten A en B.
Stel nou eens dat T niet hetzelfde is als P. Splits de boom T in twee stukken. Een stuk met alle knooppunten die horen bij de wegen w_1, w_2, w_3, ..., w_{k-1} en een stuk met de andere knooppunten. A zit in het ene stuk en B zit in het andere stuk. Hoewel w_k niet in T zit, is er wel een pad in T dat A met B verbindt. Dat pad begint met een aantal wegen uit het ene stuk (een aantal wegen van w_1, w_2, w_3, ..., w_{k-1}) gevolgd door een aantal wegen uit het andere stuk om bij B te komen. In dat pad is een weg die het ene stuk met het andere stuk van T verbindt. Deze verbindingsweg is heeft een gewicht dat groter is dan (of gelijk is aan) het gewicht van w_k. Immers: anders zou in het algoritme van Prim wel gekozen zijn voor die verbindingsweg in plaats van w_k.
We slopen de verbindingsweg uit T en in plaats daarvan voegen we de weg w_k toe. Dat levert opnieuw een minimaal opspannende boom S op. (Daar moet je wel even over nadenken ...).
Die boom S heeft behalve w_1, w_2, w_3, ..., w_{k-1} ook nog eens w_k gemeenschappelijk met P. Maar dat was niet de afspraak. T was de boom die het meeste op P leek. Kortom: er is iets mis met die boom S die gemaakt is door het toevoegen van w_k Blijkbaar zaten alle wegen w_1, w_2, w_3, ..., w_{k-1}, w_k. al in T, oftewel T is hetzelfde als P. En dus is P een minimaal opspannende boom.

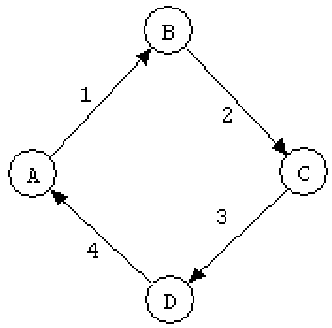
Extra: nog een algoritme

Bij dit algoritme verwijder je steeds de langste tak, maar zorg er wel voor dat de graaf samenhangend blijft.

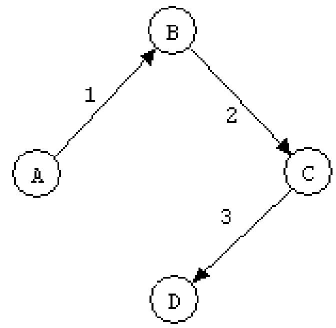
Oefening
Pas dit algoritme toe op de graaf in figuur 11.

Dit derde algoritme is overigens ook toe te passen bij een **gerichte graaf**, waarbij de verbindingslijnen niet alleen een gewicht hebben, maar ook een richting, aangegeven met een pijl. De algoritmes van Prim en Kruskal kunnen alleen toegepast worden op een ongerichte graaf (een graaf waarbij de verbindingslijnen geen richting hebben).

Beschouw de volgende gerichte graaf. (figuur 13)
De minimaal opspannende boom is in figuur 14 weergegeven (controleer dit!).



Figuur 13: een gerichte graaf



Figuur 14: de bijbehorende minimaal opspannende boom

Het algoritme van Prim met tabellen

Tot nu toe hebben we voorbeelden gezien van eenvoudige netwerken, maar een netwerk kan ook uit erg veel wegen bestaan. Ga je een dergelijk netwerk tekenen dan lopen er vaak erg veel wegen door elkaar heen. De tekening is dan erg onoverzichtelijk.
In het volgende voorbeeld zie je hoe je met behulp van tabellen een minimaal opspannende boom kunt bepalen. We gebruiken het algoritme van Prim.
De verbindingen zetten we in een tabel.

	A	B	C	D	E
A	-	6	4	9	2
B	6	-	5	9	6
C	4	5	-	11	4
D	9	9	11	-	7
E	2	6	4	7	-

Tabel 1: een voorbeeld

Je kan uit de tabel aflezen, dat er bijvoorbeeld tussen punt D en E een verbinding is met een gewicht van 7 eenheden.

Het algoritme van Prim pas je in een tabel als volgt toe:

Stap 1
Neem een willekeurig beginpunt bijvoorbeeld punt B. Teken punt B, het begin van de minimaal opspannende boom.

Stap 2
Verwijder **rij** B uit de tabel en zoek de kleinste waarde op in **kolom** B. (zie de tabellen 2 en 3)

	A	B	C	D	E
A	-	6	4	9	2
B	6	-	5	9	6
C	4	5	-	11	4
D	9	9	11	-	7
E	2	6	4	7	-

Tabel 2: Verwijder rij B

	A	B	C	D	E
A	-	6	4	9	2
C	4	**5**	-	11	4
D	9	9	11	-	7
E	2	6	4	7	-

Tabel 3: Zoek de kleinste waarde in kolom B

Stap 3
De kleinste waarde in kolom B is 5. Voeg punt C toe aan de boom en teken BC.

Stap 4
Verwijder **rij** C uit de tabel. Zoek de kleinste waarde op die in **kolom** B of in **kolom** C voorkomt. (zie de tabellen 4 en 5)

	A	B	C	D	E
A	-	6	4	9	2
C	4	**5**	-	11	4
D	9	9	11	-	7
E	2	6	4	7	-

Tabel 4: Verwijder rij C

	A	B	C	D	E
A	-	6	**4**	9	2
D	9	9	11	-	7
E	2	6	**4**	7	-

Tabel 5: Zoek de kleinste waarde in kolom B of C

Stap 5
De kleinste waarde is 4 en komt twee keer voor. Kies een van de twee mogelijkheden, bijvoorbeeld punt A. Voeg punt A toe aan de boom en teken AC.

Stap 6
Verwijder **rij** A. Zoek de kleinste waarde die voorkomt in een van de **kolommen** A, B of C.

	A	B	C	D	E
A	-	6	**4**	9	2
D	9	9	11	-	7
E	2	6	4	7	-

Tabel 6: Verwijder rij A

	A	B	C	D	E
D	9	9	11	-	7
E	**2**	6	4	7	-

Tabel 7: Zoek de kleinste waarde in kolom A,B of C

Stap 7
De kleinste waarde is 2. Voeg punt E toe en teken AE. Haal rij E uit de tabel.

Stap 8
De kleinste waarde is 7 en zit in **kolom** E. Voeg ED toe aan de boom.

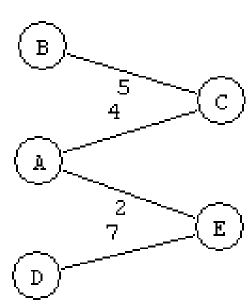
	A	B	C	D	E
D	9	9	11	-	7
E	**2**	6	4	7	-

Tabel 8: Verwijder rij E

	A	B	C	D	E
D	9	9	11	-	**7**

Tabel 9: Zoek de kleinste waarde in kolom A,B,C of E

De onderstaande opspannende boom is het resultaat.

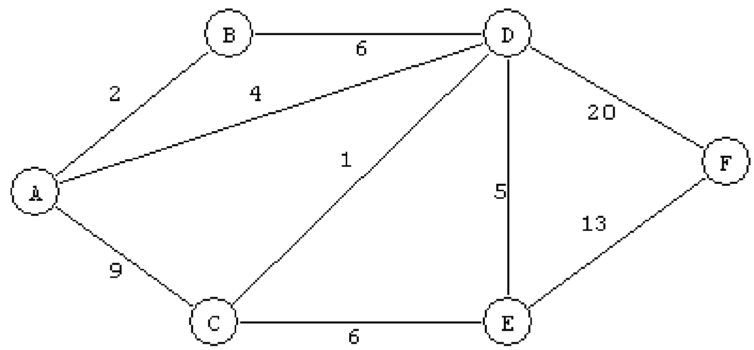


Figuur 11: de gevonden minimaal opspannende boom

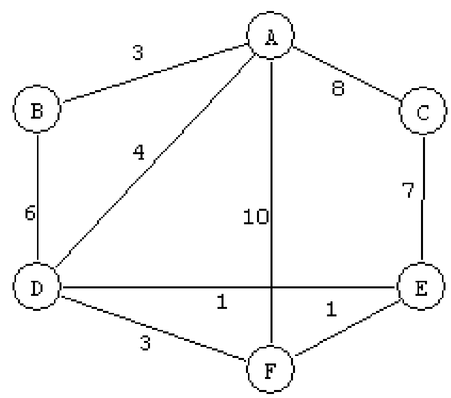
Opgaven

Voor het oplossen van de opgaven mag het algoritme van Prim of Kruskal worden gebruikt.

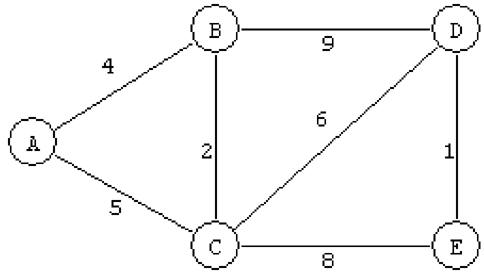
1 Bepaal van de onderstaande graaf de lengte van de minimaal opspannende boom.



2 Bepaal van onderstaande graaf de lengte van de minimaal opspannende boom.

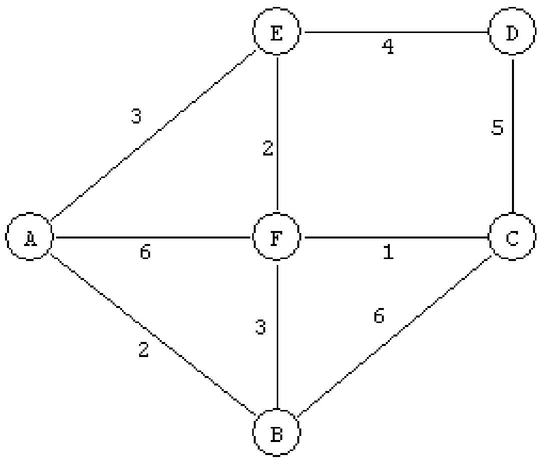


3 Bepaal van onderstaande graaf de lengte van de minimaal opspannende boom.

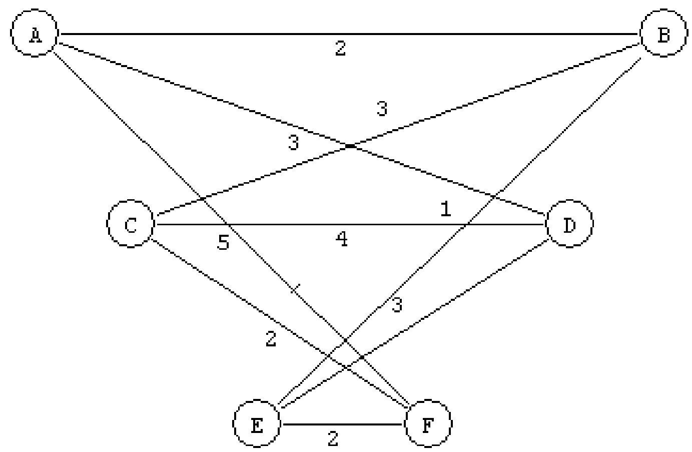


4 Bepaal van beide grafen de lengte van de minimaal opspannende boom.

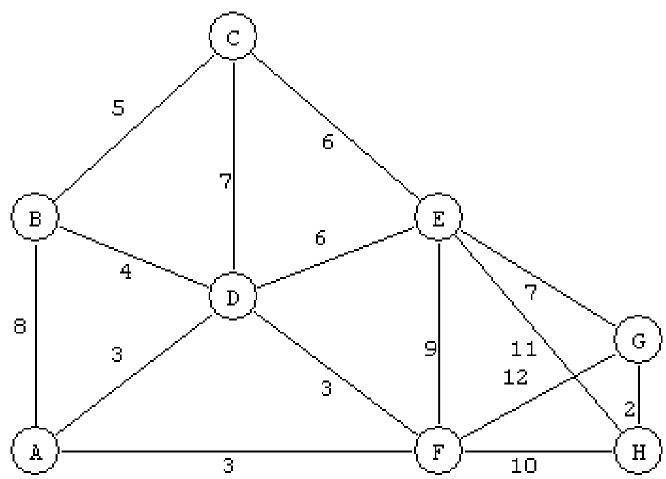
a



b



5 Een aantal boorplatforms moet onderling en met de kust worden verbonden via een zo goedkoop mogelijk pijpleidingennet. De kosten (in kosteneenheden) van elke mogelijke leiding zijn bekend.
Bepaal een optimaal leidingennet met minimale kosten.



6 In één van de zes wijken (A, B, C, D, E en F) van een stad moet een dokterspost komen. In onderstaande tabel staan tussen haakjes steeds twee getallen. Het eerste getal is de afstand (in km) tussen de centra van twee wijken. Het tweede getal geeft de gemiddelde tijd (in minuten) aan die nodig is om van het centrum van de ene wijk naar het centrum van de andere wijk te komen.
Een liggend streepje geeft aan dat er geen rechtstreekse weg is tussen de twee wijken.

	B	C	D	E	F
A	(7,1;3,5)	-	-	(7,3;3,3)	(6,8;2,9)
	B	(6,6;3,3)	(6,5;2,8)	(5,8;2,7)	-
		C	(6,1;2,9)	(6,2;3,6)	-
			D	(7,0;3,5)	-
				E	(6,5;3,1)

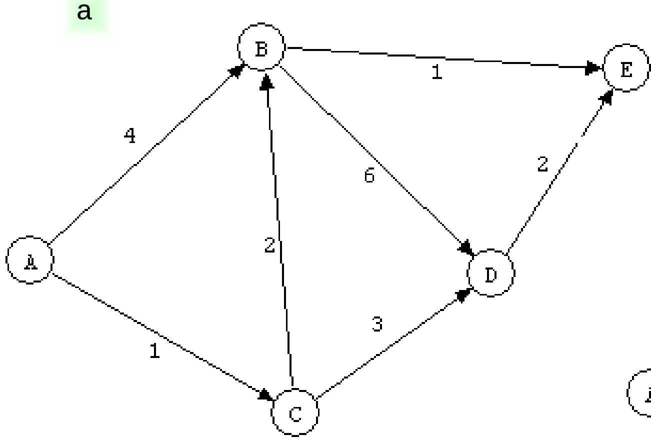
Er zijn twee gegevens waar naar gekeken kan worden, namelijk de afstand en de tijd. In de wijk die het meest centraal gelegen is, komt de dokterspost.

a Bepaal door een minimaal opspannende boom te tekenen, de meest centrale wijk(en) wanneer men let op afstand.

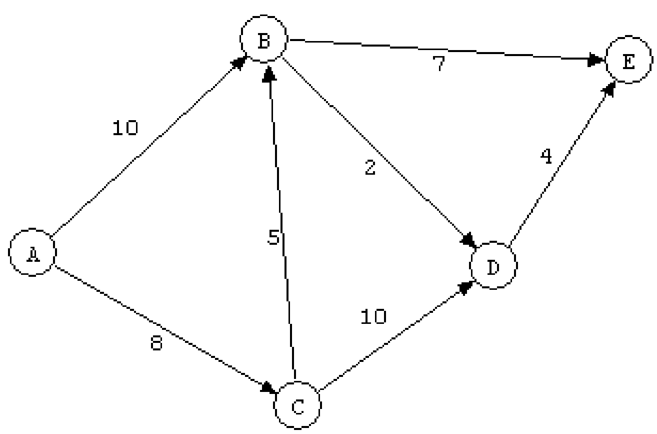
b Bepaal door een minimaal opspannende boom te tekenen, de meest centrale wijk(en) wanneer men let op tijd.

7 EXTRA: Bepaal van de onderstaande <u>gerichte</u> grafen de minimaal opspannende boom.

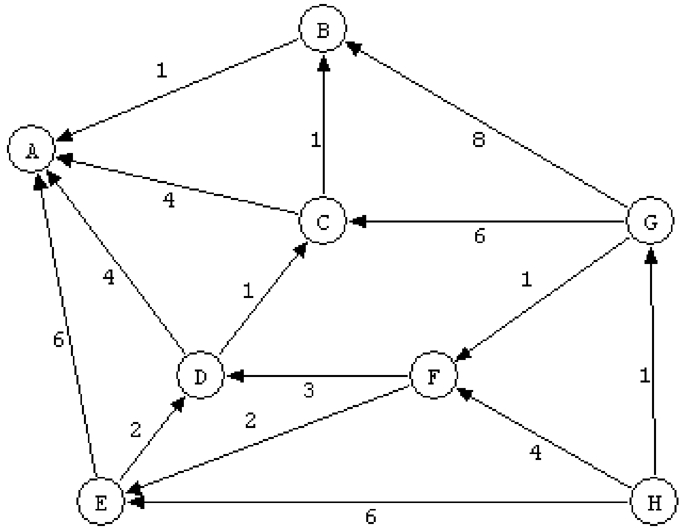
a



b



8 In het netwerk hiernaast zijn afstanden in kilometers aangegeven.
Bepaal de lengte van de minimaal opspannende boom van dit netwerk.



9 In de volgende tabel zie je de afstanden (in mijlen) tussen zes plaatsen in Ierland.

a Bepaal een minimaal opspannende boom tussen deze plaatsen en bereken de bijbehorende lengte.

b Bepaal een maximaal opspannende boom tussen deze plaatsen en bereken de bijbehorende lengte.

	Athlone	*Dublin*	*Galway*	*Limerick*	*Sligo*	*Wexford*
Athlone	-	78	56	73	71	114
Dublin	78	-	132	121	135	96
Galway	56	132	-	64	85	154
Limerick	73	121	64	-	144	116
Sligo	71	135	85	144	-	185
Wexford	114	96	154	116	185	-

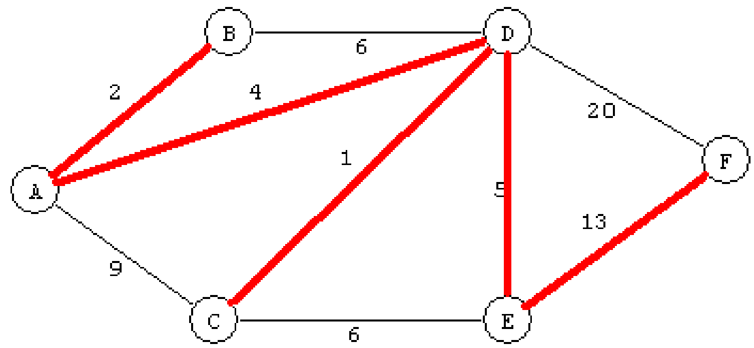
Eindopdracht

Bepaal een minimaal opspannende boom van de graaf met als knooppunten de hoofdsteden van de twaalf provincies en Amsterdam.

Antwoorden

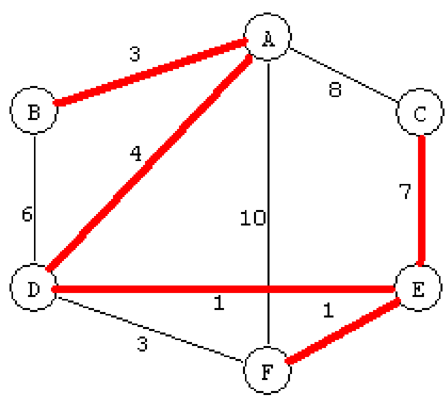
1

De lengte is 25



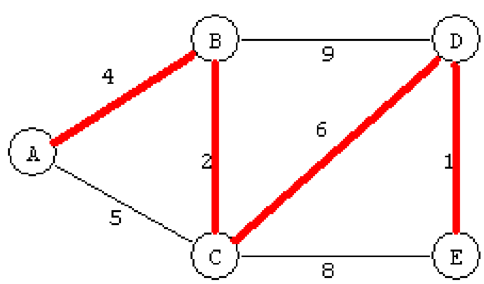
2

De lengte is 16



3

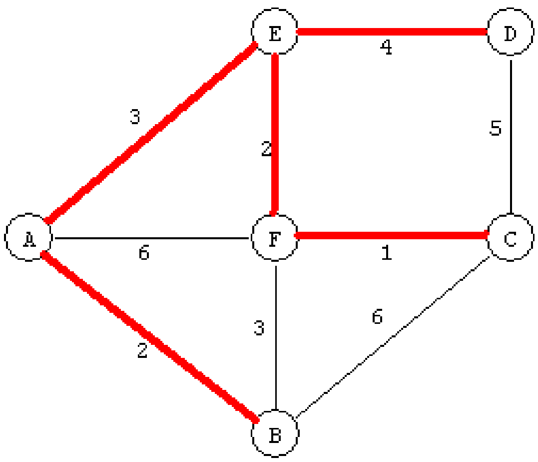
De lengte is 13.

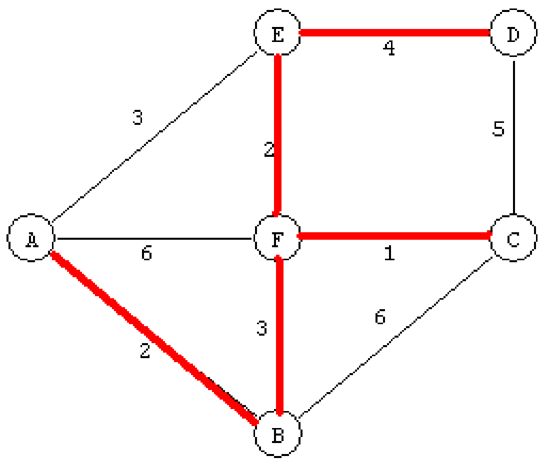


4

a

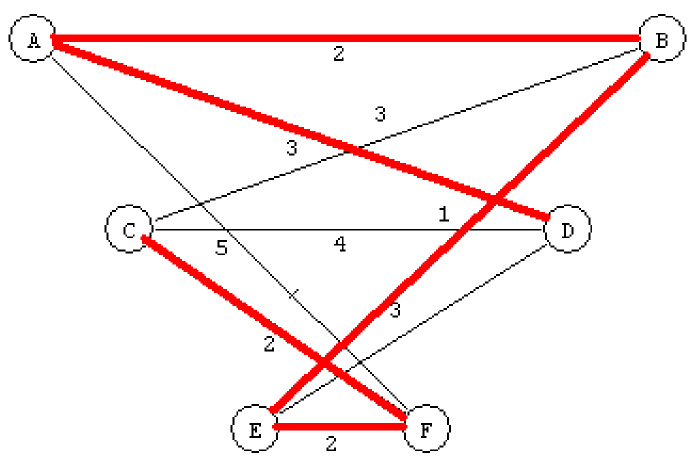
De lengte is 12
(er zijn 2 oplossingen)





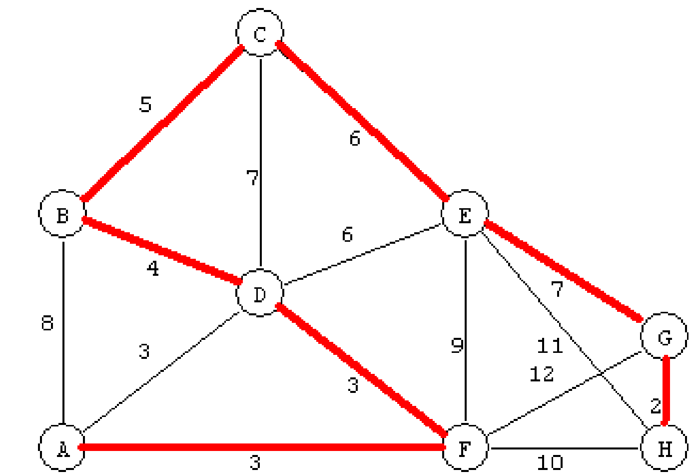
b

De lengte is 10



5

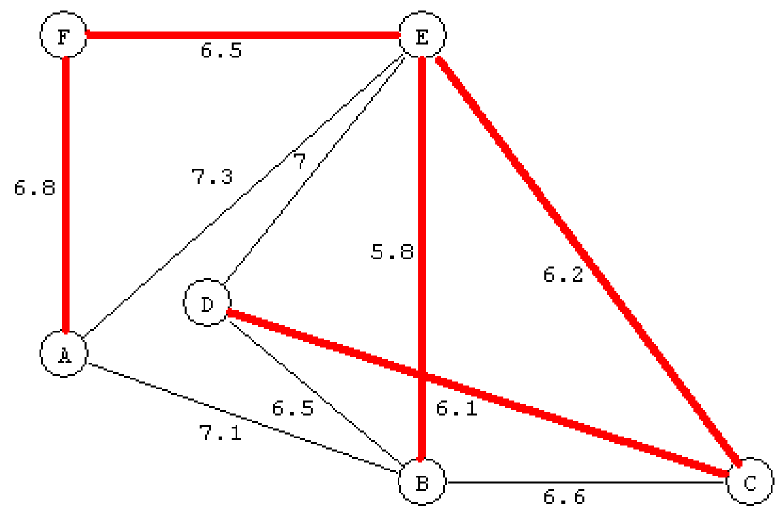
De minimaal kosten zijn 30



6

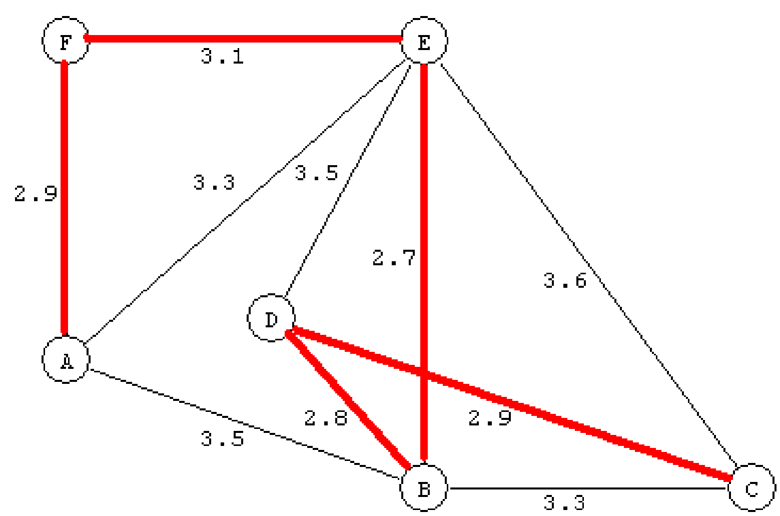
a

De lengte is 31.4 km



b

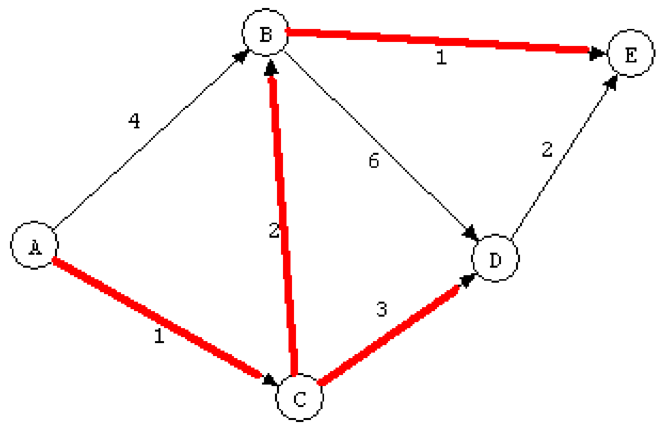
De tijd is 14.4 minuten



7

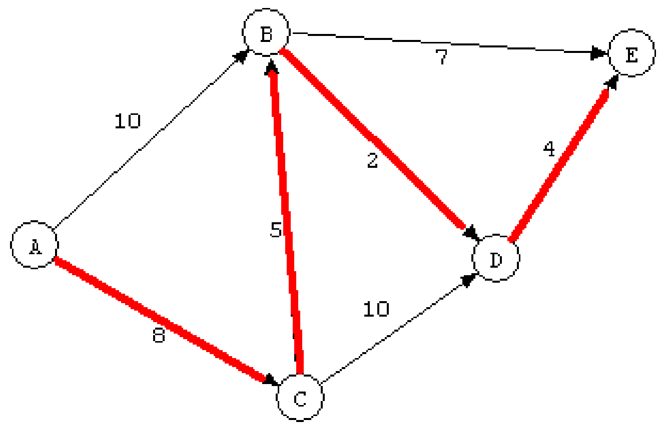
a

De lengte is 7



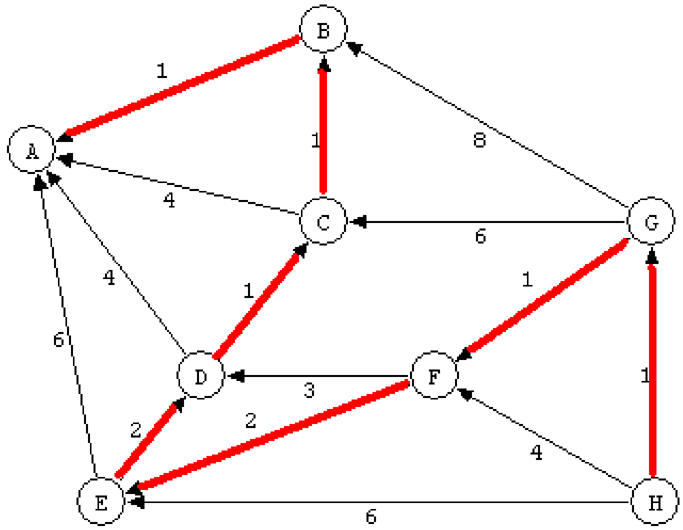
b

De lengte is 19



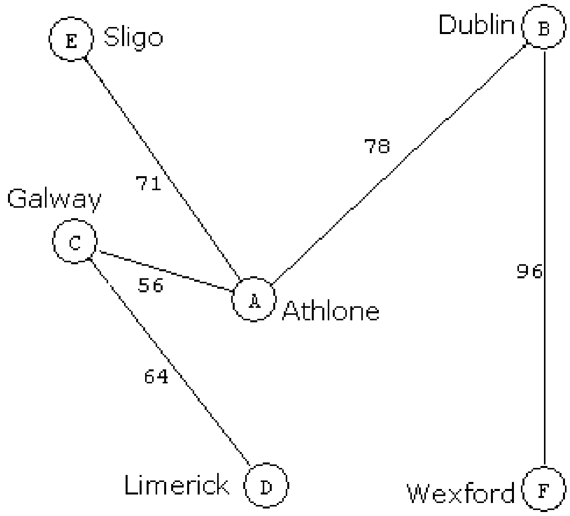
8

Begin met het wegstrepen van de langste verbinding. Dit is BG, met een gewicht van 8. Daarna zijn er drie verbindingen met een gewicht van 6 (AE, CG en EH). Deze kunnen ook allemaal weggestreept worden, zonder de boom onsamenhangend te maken. Daarna is het gewicht 4 het grootst. De verbindingen AC, AD en FH kunnen ook alle drie verwijderd worden zonder de boom onsamenhangend te maken. Alleen de verbinding DF is nu nog overbodig om een minimaal opspannende boom te maken, met een lengte van 9.

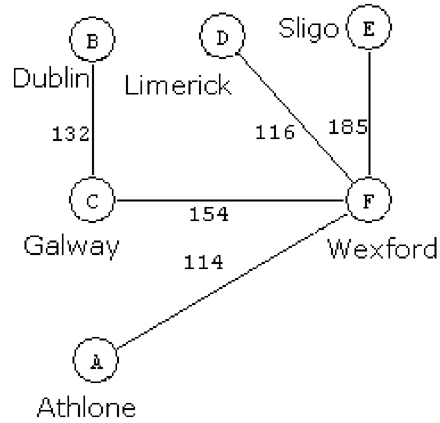


9

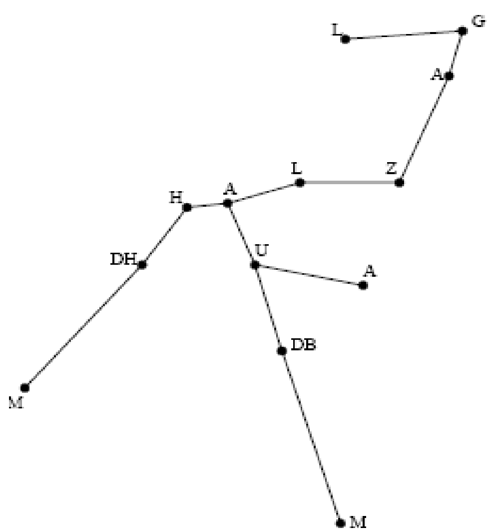
a De lengte is 365 mijl



b De lengte is 701 mijl



Eindopdracht



Bestuderen van wetenschappelijke literatuur.

Materiaal: Introduction to operations research, p. 374 - 379, 384 - 388
Auteurs: Hillier / Lieberman
Uitgever: McGraw-Hill

Het lezen van universitaire studieboeken vereist in veel gevallen een actievere manier van lezen dan je gewend bent van de studieboeken op de middelbare school. Daar waar je op de middelbare school door de lesstof heen wordt geleid zul je dat bij universitaire studieboeken zelf moeten doen.
Een extra moeilijkheid is dat veel studieboeken op de universiteit Engelstalig zijn. Over het onderwerp “Minimaal opspannende bomen” is een aantal pagina’s uit een Engelstalig boek overgenomen. Het zal niet altijd eenvoudig zijn om te begrijpen wat er staat. Bij een onderwerp uit de wiskunde horen vaak specifieke begrippen.
Het is daarom belangrijk om jezelf vragen te stellen of opdrachten te geven. Je kunt bijvoorbeeld vragen wat de Nederlandse betekenis is van de Engelse begrippen. Je kunt nagaan of een bepaalde berekening klopt, of je afvragen of een bewering al dan niet waar is en waarom bepaalde illustraties (en dergelijke) in de tekst staan en welke gegevens je uit die illustraties kunt halen.
Het is de bedoeling om je een idee te geven hoe je een stuk tekst eigen kunt maken.
Hieronder staan vragen die betrekking hebben op de pagina’s uit het hierboven genoemde boek.
Het is steeds de bedoeling dat je een stuk tekst, bijvoorbeeld 1 of 2 alinea’s kritisch doorleest. Beantwoord daarna de vragen die over dit gedeelte gaan.

Vragen bij het wetenschappelijk materiaal

9.1 Prototype example, p. 374-376

In dit gedeelte worden drie problemen genoemd die kunnen voorkomen in netwerken.

1) Beschrijf elk probleem in eigen woorden.
2) Vergelijk je antwoord met wat een medeleerling erover heeft opgeschreven.

9.2 The terminology of networks, p. 376-379

alinea's 1,2 en 3

1) In deze alinea's worden de woorden **arc** en **directed arc** gebruikt. Wat is het verschil?
2) Is er een verschil tussen een **directed arc AB** en een **directed arc BA**?

alinea 4

3) Welk woord heeft de voorkeur van de schrijvers?

alinea 5

4) Verbindingen in netwerken tussen twee knooppunten kunnen twee richtingen hebben. Welke aanname wordt in het eerste gedeelte van deze alinea gemaakt? Hoe wordt dit in deze alinea nader uitgewerkt?
5) Welke opmerking wordt in de laatste twee regels gemaakt?

alinea 6

6) Welke naam kun je geven aan een netwerk als er gerichte en ongerichte verbindingen voorkomen?

alinea's 7 en 8

7) Kunnen in een ongericht pad gerichte verbindingen voorkomen?
8) Welke paden spelen een belangrijke rol in gerichte netwerken?

alinea 9

9) Let alleen op de eerste twee zinnen. Begrijp je wat een cycle is?

alinea 10

10) Maak een overzicht van de begrippen uit deze paragraaf.

alinea 11

11) Wanneer spreken we van een "spanning tree"? (opspannende boom)
12) Waarom kan in een opspannende boom met n knooppunten het aantal verbindingen niet tenminste gelijk zijn aan n?

alinea 12

13) In figuur 9.3 is een opspannende boom gemaakt van figuur 9.2. Teken nog een aantal opspannende bomen van figuur 9.2.

9.4 The minimum spanning tree problem, p. 384-388

alinea 1

1) In de tekst wordt uitgelegd wat het verschil is tussen het vinden van de minimaal opspannende boom (the minimum spanning tree) en het vinden van het kortste pad (the shortest -path problem). Leg uit wat het verschil is tussen de twee genoemde problemen.

alinea 2

2) Waar het bij het vinden van de minimaal opspannende boom om gaat wordt in drie punten uitgelegd. Vertaal deze zinnen voor jezelf in het Nederlands.

alinea's 3 en 4

3) Ga bij jezelf na of je uit de tekst die je tot nu toe hebt gelezen en uit figuur 9.5 kunt begrijpen wat een "spanning tree" is.
4) Waarom is figuur 9.5c volgens de schrijvers niet de minimaal opspannende boom?

An algorithm

5) In de eerste zin staat het woord *greedy*. Wat houdt dit woord in?

6) Om de minimaal opspannende boom te vinden wordt een uitleg gegeven in drie stappen.
    a. Ga elk van de stappen na aan de hand van het uitgewerkte voorbeeld.
    b. Vergelijk het resultaat met wat er in de alinea onder figuur 9.5 staat.
    c. Vergelijk de methode van Hillier en Lieberman met het algoritme van Kruskal en met het algoritme van Prim. Op welk algoritme lijkt de methode het meest?

7) Is het, volgens hetgeen in de tekst staat, noodzakelijk om in punt O te beginnen om de minimaal opspannende boom te vinden?

Programma voor de TI83 (Plus): het algoritme van Prim

De programma's kunnen gemaakt, verbeterd/aangevuld en uitgevoerd worden via resp. PRGM NEW, PRGM EDIT en PRGM EXEC. Bij het editen geldt:
De dubbele punt in het begin van de regel verschijnt bij het editen na ENTER.
Er kan een regel tussengevoegd worden via 2nd INS ENTER.
De dik gedrukte woorden en tekens kunnen uit de CATALOG gehaald worden.
Namen van matrices kunnen ook opgehaald worden via MATRX NAMES.
→ wordt verkregen via de toets STO→.

De regels die inspringen, kunnen zonder bezwaar weggelaten worden. Deze regels bevatten commentaar, al dan niet bij de uitvoering zichtbaar.

```
PROGRAM: PRIM
                    : Disp "VOORAF MATRIX D"
                    : Disp "INVOEREN ZO DAT"
                    : Disp "D(I, J)=AFSTAND"
                    : Disp "LANGS TAK VAN"
                    : Disp "KNOOP I NAAR J"
                    : Disp "EN D(I, J)=10^10"
                    : Disp "ALS GEEN TAK."
: dim ([D])→L2
: L2(1)→N
                    : "DE ENEN EN NULLEN IN L1 GEVEN AAN WELKE KNOPEN
                    WEL RESP NIET AL VERBONDEN ZIJN"
: N→dim (L1)
: Fill (0, L1)
: 1→L1(1)
                    : "EINDE INITIALISATIE"
: While min(L1)<1
: prgmZOEKTAK
: {N,N}→dim ([E])
                    : "IN MATRIX E WORDT STEEDS OP DE POSITIES (U,V) EN
                    (V,U) DE LENGTE VAN DE TOEGEVOEGDE TAK
                    WEGGESCHREVEN"
: [D](U,V)→[E](U,V)
: [D](V,U)→[E](V,U)
: 1→L1(U)
: End
                    : Disp "DE MINIMALE"
                    : Disp "OPSPANNENDE"
                    : Disp "BOOM VOLGT UIT"
: [E]
```

In dit programma wordt er gebruik gemaakt van het programma ZOEKTAK. Dit programma zie je op de volgende pagina. Ook hiervan is het eventueel weg te laten commentaar ingesprongen weergegeven.

```
PROGRAM: ZOEKTAK
: "ZO WORDT DE KORTSTE TAK VAN EEN NIET-VERBONDEN
KNOOP NAAR EEN WELVERBONDEN KNOOP GEZOCHT
(PRIM)"
: 10^10→P
: For (I, 1, N, 1)
: If L1(I)=0
: Then
: For (J, 1, N, 1)
: If L1(J)=1
: Then
: If [D](I, J)<P
: Then
: [D](I, J)→P
: I→U
: J→V
: End
: End
: End
: End
: End
```

Voordat het programma PRIM uitgevoerd gaat worden, moeten de gegevens van het netwerk ingevuld worden in de matrix D:

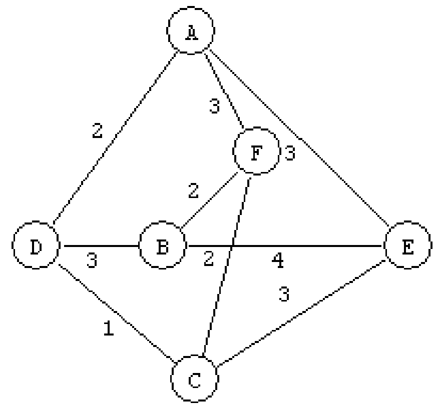
- geef eerst de knopen opvolgende nummers 1, 2, 3, ..., N (waarin N een getal is),
- geef de matrix D de afmetingen N bij N (waarin N een getal is), bijvoorbeeld via {N, N}→ **dim ([**D**]**),
- vul de matrix eerst met uitsluitend getallen 10^10, bijvoorbeeld via **Fill (**10^10, **[**D**]**),
- verander daarna voor iedere tak van het netwerk die een knoop i met een knoop j verbindt, het getal 10^10 dat in de i-de rij en de j-de kolom van de matrix D staat en ook het getal 10^10 dat in de j-de rij en de i-de kolom van de matrix D staat met behulp van MATRX EDIT [D] in de afstand tussen knoop i en knoop j via die tak.

Aanbevolen opties onder Mode:
Normal en, als de afstanden in het netwerk geheel zijn, Float 0.

Toetsopgaven

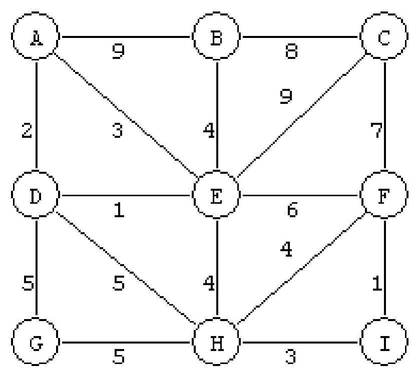
1

Bepaal een minimaal opspannende boom en bereken de bijbehorende lengte.



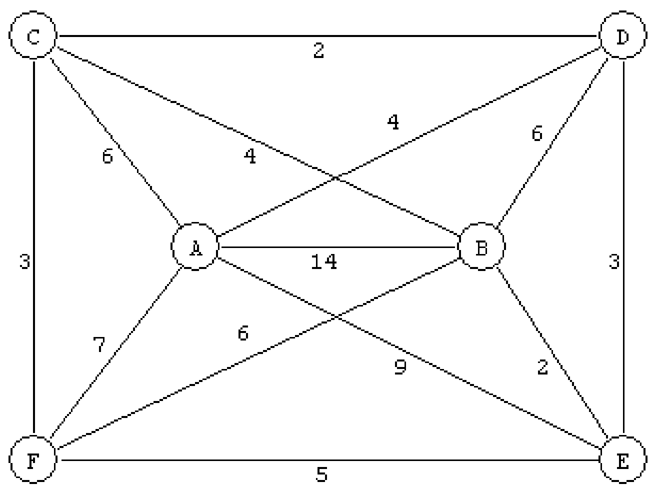
2

Bepaal met het algoritme van Prim de minimaal opspannende boom, uitgaande van knoop 1.
(tentamenopgave december 2000)



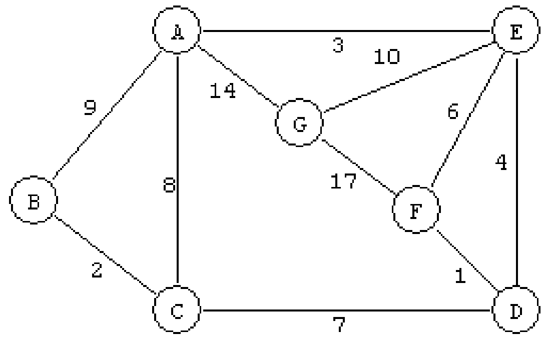
3

Bepaal een minimaal opspannende boom en bereken de bijbehorende lengte.
(tentamenopgave juni 1998)



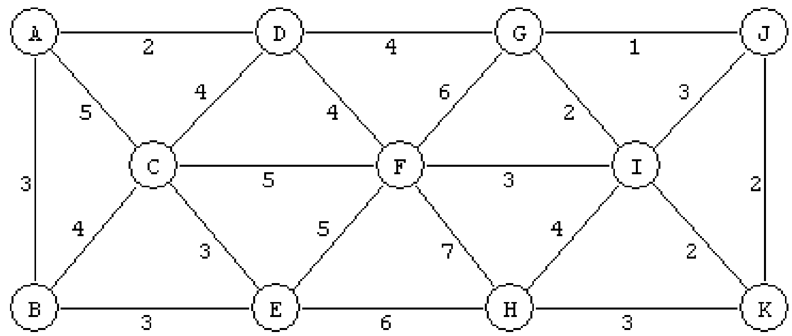
4

Bepaal een minimaal opspannende boom en bereken de bijbehorende lengte.
(tentamenopgave augustus 2001)



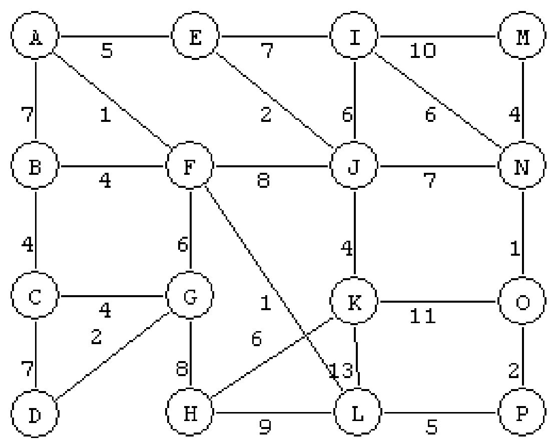
5

Bepaal een minimaal opspannende boom en bereken de bijbehorende lengte.
(Uit een Course in Combinatorial Optimalization,
A. Schrijver)



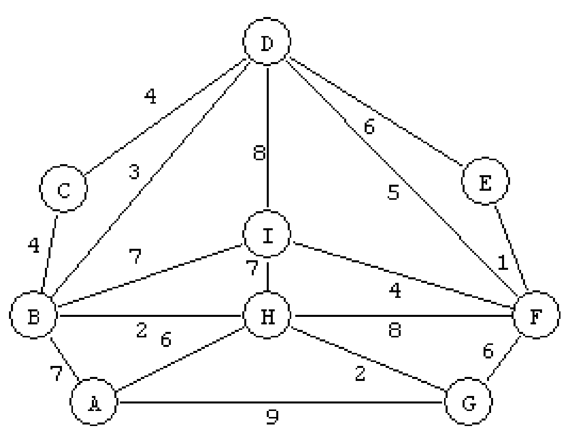
6

Bepaal een minimaal opspannende boom en bereken de bijbehorende lengte.
(tentamenopgave augustus 2000)



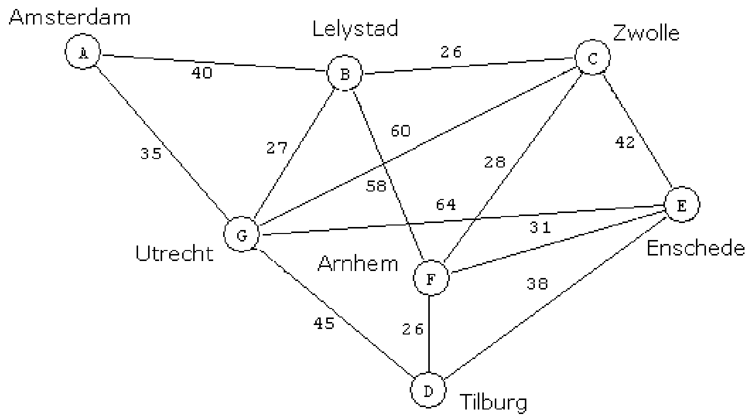
7

Bepaal met het algoritme van Prim de minimaal opspannende boom, uitgaande van knoop 1.
(tentamenopgave januari 2002)



8

Op een kaart zijn plaatsen met elkaar verbonden door spoorlijnen. De afstanden zijn gegeven in kilometers. De spoorweg-maatschappij besluit enkele lijnen op te heffen; wel moet elke plaats bereikbaar blijven vanuit elke andere plaats.
Welke lijnen zou je opheffen, als je een zo klein mogelijke totale lengte over moet houden?



9

Beschouw een aantal plaatsen waarvan de onderlinge lengtes in onderstaande tabel staan. Hoe moeten deze plaatsen door elektriciteitskabels worden verbonden zodat iedere plaats is aangesloten en er zo min mogelijk kabel wordt gebruikt? Let op! De tabel is symmetrisch.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	0	43	27	60	40	70	50
2	43	0	28	20	40	35	24
3	27	28	0	26	14	35	50
4	60	20	26	0	19	18	40
5	40	40	14	19	0	24	40
6	70	35	35	18	24	0	22
7	50	24	50	40	40	22	0

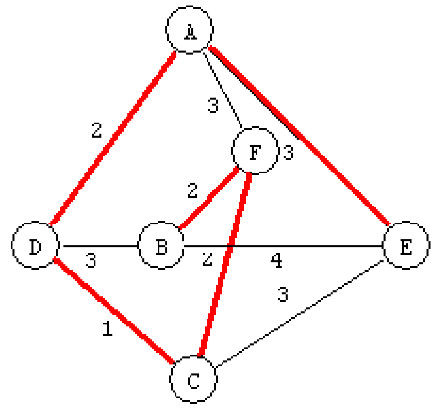
10

Beschouw een netwerk van 10 knooppunten waarvan de lengtes in de onderstaande tabel staan. Een streepje betekent dat er geen verbinding is. Bepaal de minimaal opspannende boom en de bijbehorende lengte. Let op! De tabel is symmetrisch.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	0	18	-	4	11	-	-	-	-	-
2	18	0	17	-	20	16	-	-	-	-
3	-	17	0	-	-	15	12	-	-	-
4	4	-	-	0	19	-	-	10	-	-
5	11	20	-	19	0	7	-	8	13	-
6	-	16	15	-	7	0	14	-	5	2
7	-	-	12	-	-	14	0	-	-	9
8	-	-	-	10	8	-	-	0	3	-
9	-	-	-	-	13	5	-	3	0	6
10	-	-	-	-	-	2	9	-	6	0

Antwoorden Toetsopgaven

1

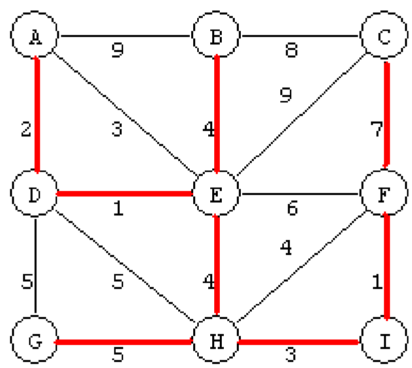


Bepaal een minimaal opspannende boom en bereken de bijbehorende lengte.

Lengte is 10

AE mag ook vervangen worden door CE.

2

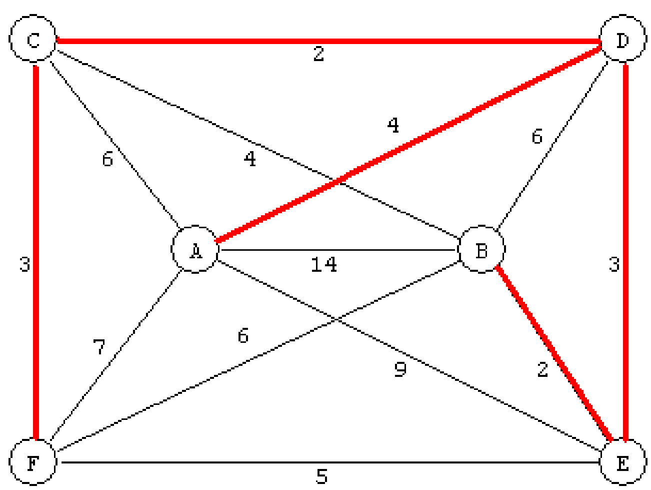


Bepaal met het algoritme van Prim de minimaal opspannende boom, uitgaande van knoop 1.
(tentamenopgave december 2000)

Lengte is 27

GH mag ook vervangen worden door DG.

3



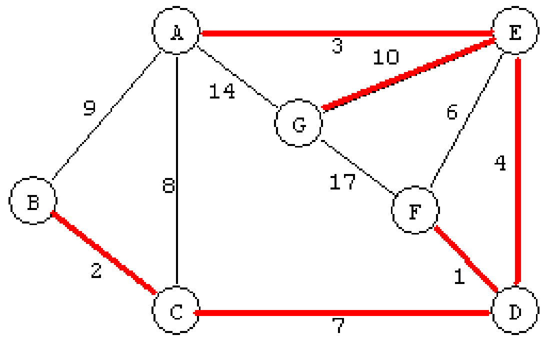
Bepaal een minimaal opspannende boom en bereken de bijbehorende lengte.
(tentamenopgave juni 1998)

Lengte is 14

4

Bepaal een minimaal opspannende boom en bereken de bijbehorende lengte.
(tentamenopgave augustus 2001)

De lengte is 27

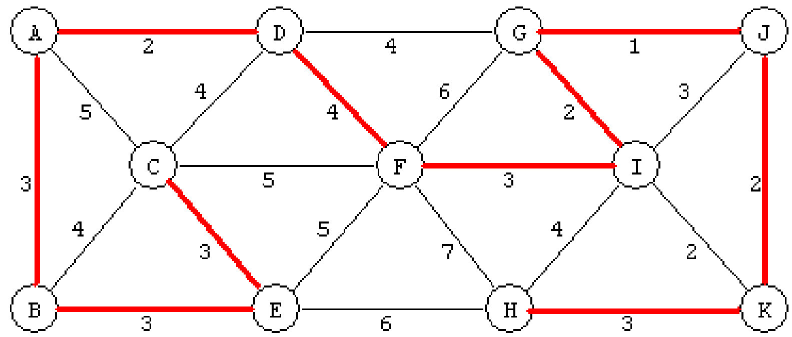


5

Bepaal een minimaal opspannende boom en bereken de bijbehorende lengte. (Uit een Course in Combinatorial Optimalization, A. Schrijver)

De lengte is 26

DF en GI zijn te vervangen door KI en DG.

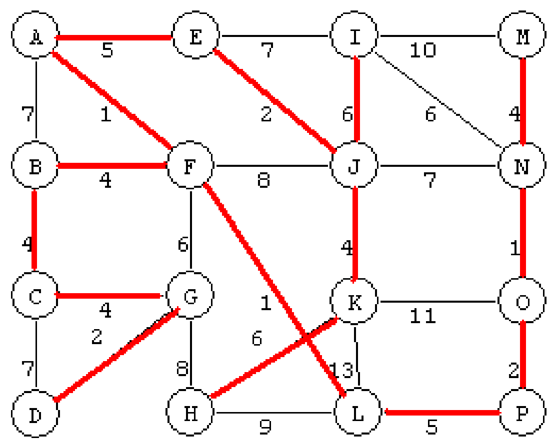


6

Bepaal een minimaal opspannende boom en bereken de bijbehorende lengte.
(tentamenopgave augustus 2000)

De lengte is 51

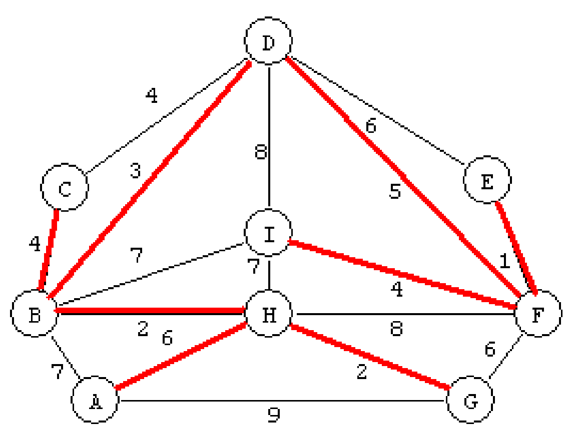
IJ is te vervangen door IN



7

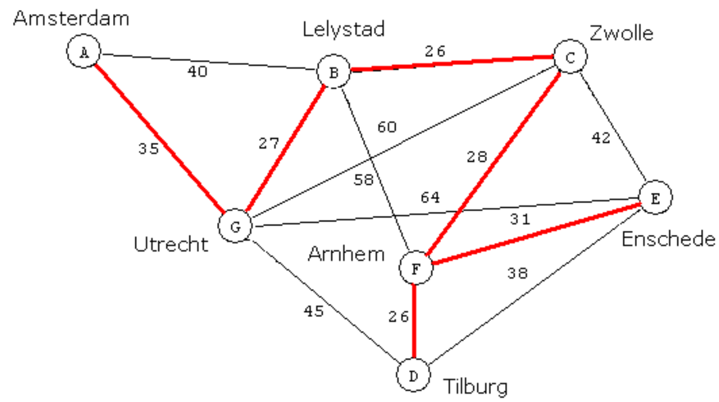
Bepaal met het algoritme van Prim de minimaal opspannende boom, uitgaande van knoop A.
(tentamenopgave januari 2002)

De lengte is 27



8

Op een kaart zijn plaatsen met elkaar verbonden door spoorlijnen. De afstanden zijn gegeven in kilometers. De spoorweg-maatschappij besluit enkele lijnen op te heffen; wel moet elke plaats bereikbaar blijven vanuit elke andere plaats. Welke lijnen zou je opheffen, als je een zo klein mogelijke totale lengte over moet houden?



De lijnen die je moet opheffen zijn AB, BF, GC, GE, GD, DE. De lengte van de spoorbaan wordt dan 173 km.

9

Stap 1: begin bij punt 1, streep rij 1 weg. Vind het kleinste getal in kolom 1. Dit is 27 in rij 3.

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	43	27	60	40	70	50
2	43	0	28	20	40	35	24
3	27	28	0	26	14	35	50
4	60	20	26	0	19	18	40
5	40	40	14	19	0	24	40
6	70	35	35	18	24	0	22
7	50	24	50	40	40	22	0

Stap 2: streep rij 3 weg. Vind het kleinste getal in een van de kolommen 1 en 3. Dit is 14 in rij 5.

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	43	27	60	40	70	50
2	43	0	28	20	40	35	24
3	27	28	0	26	14	35	50
4	60	20	26	0	19	18	40
5	40	40	14	19	0	24	40
6	70	35	35	18	24	0	22
7	50	24	50	40	40	22	0

Stap 3: streep rij 5 weg. Vind het kleinste getal in een van de kolommen 1,3 of 5.
Dit is 19 in rij 4.

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	43	27	60	40	70	50
2	43	0	28	20	40	35	24
3	27	28	0	26	14	35	50
4	60	20	26	0	19	18	40
5	40	40	14	19	0	24	40
6	70	35	35	18	24	0	22
7	50	24	50	40	40	22	0

Stap 4: streep rij 4 weg. Vind het kleinste getal in een van de kolommen 1,3,4 of 5.
Dit is 18 in rij 6.

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	43	27	60	40	70	50
2	43	0	28	20	40	35	24
3	27	28	0	26	14	35	50
4	60	20	26	0	19	18	40
5	40	40	14	19	0	24	40
6	70	35	35	18	24	0	22
7	50	24	50	40	40	22	0

Stap 5: streep rij 6 weg. Vind het kleinste getal in een van de kolommen 1,3,4,5 of 6.
Dit is 20 in rij 2.

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	43	27	60	40	70	50
2	43	0	28	20	40	35	24
3	27	28	0	26	14	35	50
4	60	20	26	0	19	18	40
5	40	40	14	19	0	24	40
6	70	35	35	18	24	0	22
7	50	24	50	40	40	22	0

Stap 6: streep rij 2 weg. Vind het kleinste getal in een van de kolommen 1,2,3,4,5 of 6.
Dit is 22 in rij 7.

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	43	27	60	40	70	50
2	43	0	28	20	40	35	24
3	27	28	0	26	14	35	50
4	60	20	26	0	19	18	40
5	40	40	14	19	0	24	40
6	70	35	35	18	24	0	22
7	50	24	50	40	40	22	0

Klaar: de som van de geselecteerde getallen is 120 met de verbindingen (1,3), (3,5), (4,2), (4,6), (5,4), (6,7)

10

Stap 1: begin met punt 1. Streep rij 1 weg. Vind het kleinste getal kolom 1:
Dit is 4 in rij 4.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	18	-	4	11	-	-	-	-	-
2	18	0	17	-	20	16	-	-	-	-
3	-	17	0	-	-	15	12	-	-	-
4	4	-	-	0	19	-	-	10	-	-
5	11	20	-	19	0	7	-	8	13	-
6	-	16	15	-	7	0	14	-	5	2
7	-	-	12	-	-	14	0	-	-	9
8	-	-	-	10	8	-	-	0	3	-
9	-	-	-	-	13	5	-	3	0	6
10	-	-	-	-	-	2	9	-	6	0

Stap 2: streep rij 4 weg. Vind het kleinste getal in een van de kolommen 1 en 4.
Dit is 10 in rij 8.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	18	-	4	11	-	-	-	-	-
2	18	0	17	-	20	16	-	-	-	-
3	-	17	0	-	-	15	12	-	-	-
4	4	-	-	0	19	-	-	10	-	-
5	11	20	-	19	0	7	-	8	13	-
6	-	16	15	-	7	0	14	-	5	2
7	-	-	12	-	-	14	0	-	-	9
8	-	-	-	10	8	-	-	0	3	-
9	-	-	-	-	13	5	-	3	0	6
10	-	-	-	-	-	2	9	-	6	0

Stap 3: streep rij 8 weg. Vind het kleinste getal in een van de kolommen 1,4 of 8.
Dit is 3 in rij 9.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	18	-	4	11	-	-	-	-	-
2	18	0	17	-	20	16	-	-	-	-
3	-	17	0	-	-	15	12	-	-	-
4	4	-	-	0	19	-	-	10	-	-
5	11	20	-	19	0	7	-	8	13	-
6	-	16	15	-	7	0	14	-	5	2
7	-	-	12	-	-	14	0	-	-	9
8	-	-	-	10	8	-	-	0	3	-
9	-	-	-	-	13	5	-	3	0	6
10	-	-	-	-	-	2	9	-	6	0

Stap 4: streep rij 9 weg. Vind het kleinste getal in een van de kolommen 1,4,8 of 9.
Dit is 5 in rij 6.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	18	-	4	11	-	-	-	-	-
2	18	0	17	-	20	16	-	-	-	-
3	-	17	0	-	-	15	12	-	-	-
4	4	-	-	0	19	-	-	10	-	-
5	11	20	-	19	0	7	-	8	13	-
6	-	16	15	-	7	0	14	-	5	2
7	-	-	12	-	-	14	0	-	-	9
8	-	-	-	10	8	-	-	0	3	-
9	-	-	-	-	13	5	-	3	0	6
10	-	-	-	-	-	2	9	-	6	0

Stap 5: streep rij 6 weg. Vind het kleinste getal in een van de kolommen 1,4,6,8 of 9.
Dit is 2 in rij 10.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	18	-	4	11	-	-	-	-	-
2	18	0	17	-	20	16	-	-	-	-
3	-	17	0	-	-	15	12	-	-	-
4	4	-	-	0	19	-	-	10	-	-
5	11	20	-	19	0	7	-	8	13	-
6	-	16	15	-	7	0	14	-	5	2
7	-	-	12	-	-	14	0	-	-	9
8	-	-	-	10	8	-	-	0	3	-
9	-	-	-	-	13	5	-	3	0	6
10	-	-	-	-	-	2	9	-	6	0

Stap 6: streep rij 10 weg. Vind het kleinste getal in een van de kolommen 1,4,6,8,9 of 10.
Dit is 7 in rij 5.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	18	-	4	11	-	-	-	-	-
2	18	0	17	-	20	16	-	-	-	-
3	-	17	0	-	-	15	12	-	-	-
4	4	-	-	0	19	-	-	10	-	-
5	11	20	-	19	0	7	-	8	13	-
6	-	16	15	-	7	0	14	-	5	2
7	-	-	12	-	-	14	0	-	-	9
8	-	-	-	10	8	-	-	0	3	-
9	-	-	-	-	13	5	-	3	0	6
10	-	-	-	-	-	2	9	-	6	0

Stap 7: streep rij 5 weg. Vind het kleinste getal in een van de kolommen 1,4,5,6,8,9 of 10.
Dit is 9 in rij 7.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	18	-	4	11	-	-	-	-	-
2	18	0	17	-	20	16	-	-	-	-
3	-	17	0	-	-	15	12	-	-	-
4	4	-	-	0	19	-	-	10	-	-
5	11	20	-	19	0	7	-	8	13	-
6	-	16	15	-	7	0	14	-	5	2
7	-	-	12	-	-	14	0	-	-	9
8	-	-	-	10	8	-	-	0	3	-
9	-	-	-	-	13	5	-	3	0	6
10	-	-	-	-	-	2	9	-	6	0

Stap 8: streep rij 7 weg. Vind het kleinste getal in een van de kolommen 1,4,5,6,7,8,9 of 10.
Dit is 12 in rij 3.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	18	-	4	11	-	-	-	-	-
2	18	0	17	-	20	16	-	-	-	-
3	-	17	0	-	-	15	12	-	-	-
4	4	-	-	0	19	-	-	10	-	-
5	11	20	-	19	0	7	-	8	13	-
6	-	16	15	-	7	0	14	-	5	2
7	-	-	12	-	-	14	0	-	-	9
8	-	-	-	10	8	-	-	0	3	-
9	-	-	-	-	13	5	-	3	0	6
10	-	-	-	-	-	2	9	-	6	0

Stap 9: streep rij 3 weg. Vind het kleinste getal in een van de kolommen 1,3,4,5,6,7,8,9 of 10.

Dit is 16 in rij 2.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	18	-	4	11	-	-	-	-	-
2	18	0	17	-	20	16	-	-	-	-
3	-	17	0	-	-	15	12	-	-	-
4	4	-	-	0	19	-	-	10	-	-
5	11	20	-	19	0	7	-	8	13	-
6	-	16	15	-	7	0	14	-	5	2
7	-	-	12	-	-	14	0	-	-	9
8	-	-	-	10	8	-	-	0	3	-
9	-	-	-	-	13	5	-	3	0	6
10	-	-	-	-	-	2	9	-	6	0

Klaar: som van de geselecteerde getallen is 68 met de verbindingen (1,4), (4,8), (2,6), (5,6), (6,10), (3,7), (8,9), (6,9), (7,10)

Extra opgaven

1

In onderstaande tabel staan de onderlinge afstanden, afgerond op een geheel aantal kilometers, van een aantal plaatsen in Zuid-Holland.
De gegevens zijn afkomstig van de routeplanner van de ANWB.

	Den Haag	Leiden	Gouda	Delft	Rotterdam
Den Haag	-	26	38	9	25
Leiden	26	-	41	23	36
Gouda	38	41	-	35	25
Delft	9	23	35	-	17
Rotterdam	25	36	25	17	-

We willen deze plaatsen onderling verbinden met een wegennet met een minimaal aantal kilometers. Bepaal dit wegennet en bereken het bijbehorende aantal kilometers.

2

In onderstaande tabel staan de onderlinge reistijden, afgerond op een geheel aantal minuten, van een aantal plaatsen in Zuid-Holland.
De gegevens zijn afkomstig van de routeplanner van de ANWB.

	Den Haag	Leiden	Gouda	Delft	Rotterdam
Den Haag	-	25	38	15	28
Leiden	25	-	38	22	31
Gouda	38	38	-	33	29
Delft	15	22	33	-	21
Rotterdam	28	31	29	21	-

Bepaal de minimale totale reistijd tussen deze 5 plaatsen als deze plaatsen minimaal verbonden zijn.

In en Amerikaans boek staat een algoritme waarmee de minimale-opspannende boom kan worden gevonden. Dit algoritme wordt met behulp van onderstaand voorbeeld nader uitgelegd.

	A	B	C	D	E	F
A	-	20	15	4	3	-
B	20	-	19	-	-	9
C	15	19	-	8	-	10
D	4	-	8	-	6	9
E	3	-	-	6	-	7
F	-	9	10	9	7	-

Stap 1: Begin met een willekeurig punt, bijvoorbeeld punt A.
Stap 2: Verwijder alle elementen uit kolom A en markeer rij A.

	A	B	C	D	E	F	
A	-	20	15	4	3	-	(*)
B	-	-	19	-	-	9	
C	-	19	-	8	-	10	
D	-	-	8	-	6	9	
E	-	-	-	6	-	7	
F	-	9	10	9	7	-	

Stap 3: Zoek het kleinste getal in de gemarkeerde rij. In dit geval is dat het getal 3 in kolom E.
Stap 4: Markeer het getal 3, verwijder de niet gemarkeerde getallen uit kolom E en markeer rij E.

	A	B	C	D	E	F	
A	-	20	15	4	3 (!)	-	(*)
B	-	-	19	-	-	9	
C	-	19	-	8	-	10	
D	-	-	8	-	-	9	
E	-	-	-	6	-	7	(*)
F	-	9	10	9	-	-	

Stap 5: Zoek het kleinste niet gemarkeerde getal in de gemarkeerde rijen. In dit geval is dat het getal 4 in kolom D.
Stap 6: Markeer het getal 4, verwijder de niet gemarkeerde getallen uit kolom D en markeer rij D.

	A	B	C	D	E	F	
A	-	20	15	4 (!)	3 (!)	-	(*)
B	-	-	19	-	-	9	
C	-	19	-	-	-	10	
D	-	-	8	-	-	9	(*)
E	-	-	-	-	-	7	(*)
F	-	9	10	-	-	-	

Stap 7: Zoek het kleinste niet gemarkeerde getal in de gemarkeerde rijen. In dit geval is dat het getal 7 in kolom F.
Stap 8: Markeer het getal 7, verwijder de niet gemarkeerde getallen uit kolom F en markeer rij F.

	A	B	C	D	E	F	
A	-	20	15	4 (!)	3 (!)	-	(*)
B	-	-	19	-	-	-	
C	-	19	-	-	-	-	
D	-	-	8	-	-	-	(*)
E	-	-	-	-	-	7 (!)	(*)
F	-	9	10	-	-	-	(*)

Stap 9: Zoek het kleinste niet gemarkeerde getal in de gemarkeerde rijen. In dit geval is dat het getal 8 in kolom C.
Stap 10: Markeer het getal 8, verwijder de niet gemarkeerde getallen uit kolom C en markeer rij C.

	A	B	C	D	E	F	
A	-	20	-	4 (!)	3 (!)	-	(*)
B	-	-	-	-	-	-	
C	-	19	-	-	-	-	(*)
D	-	-	8 (!)	-	-	-	(*)
E	-	-	-	-	-	7 (!)	(*)
F	-	9	-	-	-	-	(*)

Stap 10: Zoek het kleinste niet gemarkeerde getal in de gemarkeerde rijen. In dit geval is dat het getal 9 in kolom B.
Stap 11: Markeer het getal 9, verwijder de niet gemarkeerde getallen uit kolom B en markeer rij B.

	A	B	C	D	E	F	
A	-	-	-	4 (!)	3 (!)	-	(*)
B	-	-	-	-	-	-	(*)
C	-	-	-	-	-	-	(*)
D	-	-	8 (!)	-	-	-	(*)
E	-	-	-	-	-	7 (!)	(*)
F	-	9 (!)	-	-	-	-	(*)

Het algoritme stopt als alle rijen gemarkeerd zijn.
De minimale-opspannende boom bestaat nu uit de wegen AE, AD, FE, CD, BF met een totaal gewicht van 31.

3

Gegeven is de volgende tabel:

	A	B	C	D	E	F
A	-	1	-	4	1	-
B	1	-	2	-	1	-
C	-	2	-	-	2	3
D	4	-	-	-	4	-
E	1	1	2	4	-	3
F	-	-	3	-	3	-

Bepaal welke wegen de minimale-opspannende boom vormen en bereken hiervan de lengte.

4

Bepaal de minimale-opspannende boom.

	A	B	C	D	E	F
A	-	20	15	4	3	-
B	20	-	19	-	-	9
C	15	19	-	8	-	10
D	4	-	8	-	6	9
E	3	-	-	6	-	7
F	-	9	10	9	7	-

Antwoorden Extra opgaven

1

	Den Haag	Leiden	Gouda	Delft	Rotterdam
Den Haag	-	26	38	9	25
Leiden	26	-	41	23	36
Gouda	38	41	-	35	25
Delft	9	23	35	-	17
Rotterdam	25	36	25	17	-

Stap 1: Neem een willekeurig beginpunt. Kies bijvoorbeeld punt Den Haag.
Stap 2: De rij van Den Haag verwijderen.

	Den Haag	Leiden	Gouda	Delft	Rotterdam
Leiden	26	-	41	23	36
Gouda	38	41	-	35	25
Delft	9	23	35	-	17
Rotterdam	25	36	25	17	-

Stap 3: Zoek het kleinste getal op in de kolom Den Haag. Dit is het getal 9.
Teken dus de weg van Den Haag naar Delft.
Stap 4: Verwijder de rij Delft.

	Den Haag	Leiden	Gouda	Delft	Rotterdam
Leiden	26	-	41	23	36
Gouda	38	41	-	35	25
Rotterdam	25	36	25	17	-

Stap 5: Zoek in de kolommen Den Haag en Delft naar het kleinste getal. Dit is het getal 17. Teken dus de weg van Delft naar Rotterdam.
Stap 6: Verwijder de rij Rotterdam.

	Den Haag	Leiden	Gouda	Delft	Rotterdam
Leiden	26	-	41	23	36
Gouda	38	41	-	35	25

Stap 7: Zoek in de kolommen Den Haag, Delft, Rotterdam naar het kleinste getal. Dit is het getal 23. Teken dus de weg van Delft naar Leiden.
Stap 8: Verwijder de rij Leiden.

	Den Haag	Leiden	Gouda	Delft	Rotterdam
Gouda	38	41	-	35	25

Stap 9: Het kleinste getal is 25. Teken dus de weg van Rotterdam naar Gouda.

Het kleinste aantal kilometers is dus: 9 + 17 + 23 + 25 = 74.

2

	Den Haag	Leiden	Gouda	Delft	Rotterdam
Den Haag	-	25	38	15	28
Leiden	25	-	38	22	31
Gouda	38	38	-	33	29
Delft	15	22	33	-	21
Rotterdam	28	31	29	21	-

Stap 1: Neem een willekeurig beginpunt. Kies bijvoorbeeld punt Den Haag.
Stap 2: De rij van Den Haag verwijderen.

	Den Haag	Leiden	Gouda	Delft	Rotterdam
Leiden	25	-	38	22	31
Gouda	38	38	-	33	29
Delft	15	22	33	-	21
Rotterdam	28	31	29	21	-

Stap 3: Zoek het kleinste getal op in de kolom Den Haag. Dit is het getal 15. Teken dus de weg van Den Haag naar Delft.
Stap 4: Verwijder de rij Delft.

	Den Haag	Leiden	Gouda	Delft	Rotterdam
Leiden	25	-	38	22	31
Gouda	38	38	-	33	29
Rotterdam	28	31	29	21	-

Stap 5: Zoek in de kolommen Den Haag en Delft naar het kleinste getal. Dit is het getal 21. Teken dus de weg van Delft naar Rotterdam.
Stap 6: Verwijder de rij Rotterdam.

	Den Haag	Leiden	Gouda	Delft	Rotterdam
Leiden	25	-	38	22	31
Gouda	38	38	-	33	29

Stap 7: Zoek in de kolommen Den Haag, Delft, Rotterdam naar het kleinste getal. Dit is het getal 25. Teken dus de weg van Delft naar Leiden.
Stap 8: Verwijder de rij Leiden.

	Den Haag	Leiden	Gouda	Delft	Rotterdam
Gouda	38	38	-	33	29

Stap 9: Het kleinste getal is 29. Teken dus de weg van Rotterdam naar Gouda.

Het minimale aantal minuten is dus: 15 + 21 + 25 + 29 = 90.

3

Ga uit van punt A, verwijder alle elementen van kolom A en markeer rij A.
Zoek het kleinste getal in rij A. Dit is getal 1 van kolom B. Markeer dit getal en rij B en verwijder ook alle niet gemarkeerde getallen in kolom B.

	A	B	C	D	E	F	
A	-	1 (!)	-	4	1	-	(*)
B	-	-	2	-	1	-	(*)
C	-	-	-	-	2	3	
D	-	-	-	-	4	-	
E	-	-	2	4	-	3	
F	-	-	3	-	3	-	

Zoek het kleinste niet gemarkeerde getal in de gemarkeerde rijen. In dit geval is dat het getal 1 in kolom E.
Markeer het getal 1, verwijder de niet gemarkeerde getallen uit kolom E en markeer rij E.

	A	B	C	D	E	F	
A	-	1 (!)	-	4	1 (!)	-	(*)
B	-	-	2	-	-	-	(*)
C	-	-	-	-	-	3	
D	-	-	-	-	-	-	
E	-	-	2	4	-	3	(*)
F	-	-	3	-	-	-	

Zoek het kleinste niet gemarkeerde getal in de gemarkeerde rijen. In dit geval is dat het getal 2 in kolom C.
Markeer het getal 2, verwijder de niet gemarkeerde getallen uit kolom C en markeer rij C.

	A	B	C	D	E	F	
A	-	1 (!)	-	4	1 (!)	-	(*)
B	-	-	2 (!)	-	-	-	(*)
C	-	-	-	-	-	3	(*)
D	-	-	-	-	-	-	
E	-	-	-	4	-	3	(*)
F	-	-	-	-	-	-	

Zoek het kleinste niet gemarkeerde getal in de gemarkeerde rijen. In dit geval is dat het getal 3 in kolom F.
Markeer het getal 3, verwijder de niet gemarkeerde getallen uit kolom F en markeer rij F.

	A	B	C	D	E	F	
A	-	1 (!)	-	4	1 (!)	-	(*)
B	-	-	2 (!)	-	-	-	(*)
C	-	-	-	-	-	3 (!)	(*)
D	-	-	-	-	-	-	
E	-	-	-	4	-	-	(*)
F	-	-	-	-	-	-	(*)

Zoek het kleinste niet gemarkeerde getal in de gemarkeerde rijen. In dit geval is dat het getal 4 in kolom D.
Markeer het getal 4, verwijder de niet gemarkeerde getallen uit kolom D en markeer rij D.

	A	B	C	D	E	F	
A	-	1 (!)	-	4 (!)	1 (!)	-	(*)
B	-	-	2 (!)	-	-	-	(*)
C	-	-	-	-	-	3 (!)	(*)
D	-	-	-	-	-	-	(*)
E	-	-	-	-	-	-	(*)
F	-	-	-	-	-	-	(*)

De minimale-opspannende boom bestaat uit de wegen: AB, BC,AD, AE en FC met een lengte van 11.

4

In deze uitwerkingen is gebruik gemaakt van het “Amerikaans”algoritme.

	A	B	C	D	E	F
A	-	20	15	4	3	-
B	20	-	19	-	-	9
C	15	19	-	8	-	10
D	4	-	8	-	6	9
E	3	-	-	6	-	7
F	-	9	10	9	7	-

- Begin met A, markeer rij A en verwijder alle getallen uit kolom A.
- Zoek het kleinste getal op in rij A. Dit is het getal 3 in kolom E.
- Markeer het getal 3, verwijder de niet gemarkeerde getallen uit kolom E en markeer rij E

	A	B	C	D	E	F	
A	-	20	15	4	3 (!)	-	(*)
B	-	-	19	-	-	9	
C	-	19	-	8	-	10	
D	-	-	8	-	-	9	
E	-	-	-	6	-	7	(*)
F	-	9	10	9	-	-	

- Zoek in de rijen A en E het kleinste niet gemarkeerde getal. Dit is het getal 4 in kolom D, rij A.
- Markeer het getal 4, verwijder alle andere getallen in kolom D en markeer rij D.

	A	B	C	D	E	F	
A	-	20	15	4 (!)	3 (!)	-	(*)
B	-	-	19	-	-	9	
C	-	19	-	-	-	10	
D	-	-	8	-	-	9	(*)
E	-	-	-	-	-	7	(*)
F	-	9	10	-	-	-	

- Zoek in de rijen A, D en E het kleinste niet gemarkeerde getal. Dit is het getal 7 in kolom F, rij E.
- Markeer dit getal 7, verwijder alle niet gemarkeerde getallen in kolom F en markeer rij F.

	A	B	C	D	E	F	
A	-	20	15	4 (!)	3 (!)	-	(*)
B	-	-	19	-	-	-	
C	-	19	-	-	-	-	
D	-	-	8	-	-	-	(*)
E	-	-	-	-	-	7 (!)	(*)
F	-	9	10	-	-	-	(*)

- Zoek in de gemarkeerde rijen het kleinste getal. Dit is het getal 8 in kolom C, rij D.
- Markeer dit getal, verwijder alle niet gemarkeerde getallen in kolom C en markeer rij C.

	A	B	C	D	E	F	
A	-	20	-	4 (!)	3 (!)	-	(*)
B	-	-	-	-	-	-	
C	-	19	-	-	-	-	(*)
D	-	-	8 (!)	-	-	-	(*)
E	-	-	-	-	-	7 (!)	(*)
F	-	9	-	-	-	-	(*)

De laatste verbinding is nu van F naar B.

	A	B	C	D	E	F	
A	-	-	-	4 (!)	3 (!)	-	(*)
B	-	-	-	-	-	-	(*)
C	-	-	-	-	-	-	(*)
D	-	-	8 (!)	-	-	-	(*)
E	-	-	-	-	-	7 (!)	(*)
F	-	9 (!)	-	-	-	-	(*)

De lengte van de minimale-opspannende boom is 31 en wordt gevormd door de verbindingen AD, AE, DC, EF, FB.