

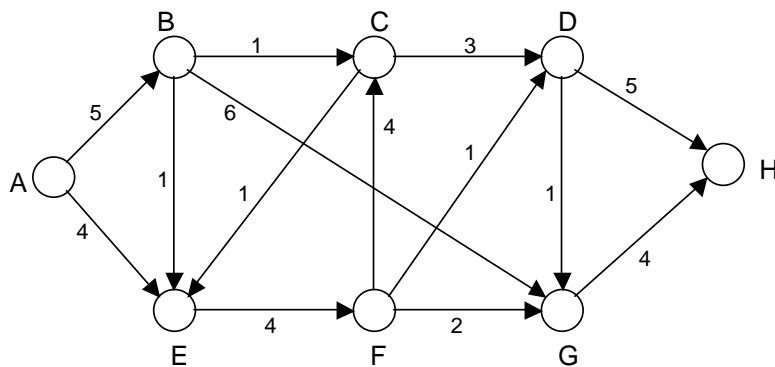
Module 3

Maximale stromen

In november 2006 legde een stroomstoring een gedeelte van Europa plat. Overal moesten de kaarsen aan. Doordat een gedeelte van het elektriciteitsnet uitviel, was er te weinig **capaciteit** om aan de vraag te voldoen. Om na te gaan of er aan de vraag kan worden voldaan, kun je gebruik maken van het optimaliseren van de grootte van een stroom in een netwerk. Je kijkt dan hoe groot de maximaal mogelijke stroom is in het net. In november kon er te weinig "stroom" van de ene plaats naar een andere plaats gestuurd worden via het nog werkende gedeelte van het netwerk. Een probleem waarbij je nagaat hoe groot de maximale stroom is die van de ene plaats in een netwerk naar een andere plaats in het netwerk gestuurd kan worden, noemt men: een maximale-stroom probleem.

Definitie 1: Bij een **maximale-stroomprobleem** ga je na hoe groot de maximale stroom is, die je van een beginknoop "**bron**", naar een eindknoop "**put**" kan sturen.

Daarbij kan "stroom" meer betekenen dan de letterlijke vertaling. Er kan een stroom aan informatie, boodschappen, voertuigen, vloeistof, elektriciteit, enzovoorts worden bedoeld. Vaak wordt daarbij duidelijk op welke plaatsen in het netwerk problemen ontstaan. Een voorbeeld van een netwerk waarbij de maximale stroom bepaald kan worden is gegeven in figuur 1.



Figuur 1

Knoop A stelt bijvoorbeeld een olieveld voor en knoop H de raffinaderij. Knoop A is hier de “bron” en knoop H de “put”. Er moet zoveel mogelijk olie door het netwerk van pijpleidingen gestuurd worden van A naar H. Langs de takken in het netwerk staan getallen, die de **maximale capaciteit** (eenheden olie) aangeven die door een pijpleiding gestuurd kan worden.

Afspraken:

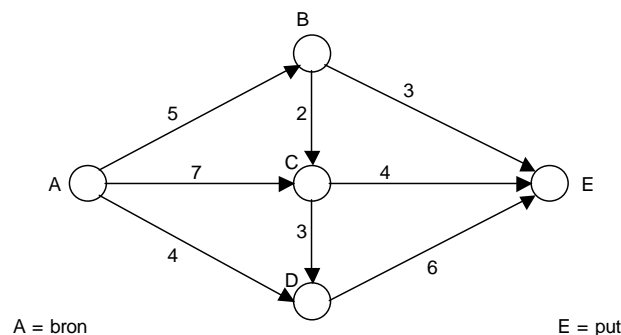
Afspraak 1: In de knopen B t/m G kan geen olie worden opgeslagen en daar vindt ook geen productie plaats. Het gevolg is dat er evenveel olie moet vertrekken uit de knopen B t/m G als er in ieder van die knopen aankomt.

Afspraak 2: Alleen in de aangegeven richting kan olie door de pijpleidingen gestuurd worden.

Oefening 1

Bedenk zelf een methode om zoveel mogelijk olie van A naar H te sturen door dit netwerk. Het gaat vooral om het vinden van een methode! Het gaat er niet om of het de juiste oplossing is.

Er bestaan algoritmen (een soort recepten) om tot een maximale stroom te komen. Dit algoritme gaan we stap voor stap doornemen aan de hand van het voorbeeld in figuur 2.

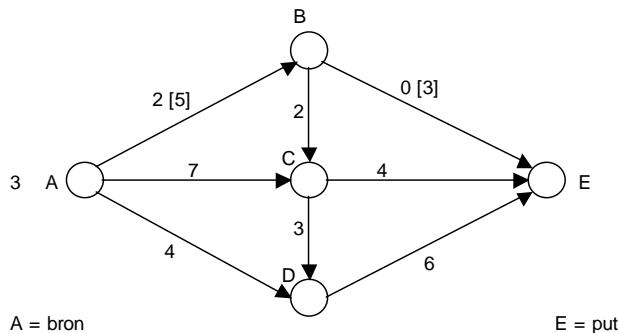


Figuur 2

In het netwerk staan bij de takken (verbindingspijlen) van het netwerk getallen. Het getal 7 bij de tak tussen A en C geeft aan dat er maximaal 7 eenheden per tijdseenheid door die leiding kunnen gaan, de **capaciteit** van deze leiding. Het probleem waaraan we gaan werken is om na te gaan op welke manier we zo veel mogelijk olie per tijdseenheid van A naar E kunnen transporteren: hoe vind je de maximale stroom? Het algoritme om tot een maximale stroom te komen laten we in de volgende stappen zien.

Stap 1

Kies willekeurig een route van A naar E door het netwerk: bijvoorbeeld de route A-B-E. De leiding met de kleinste capaciteit van die route is de verbinding tussen B en E, namelijk 3. We kunnen dus over de route A-B-E een hoeveelheid van 3 eenheden per tijdseenheid sturen. Voor de tak van A naar B blijft dan nog een (rest)capaciteit van $5 - 3 = 2$ eenheden over. We krijgen dan het volgende plaatje (figuur 3).

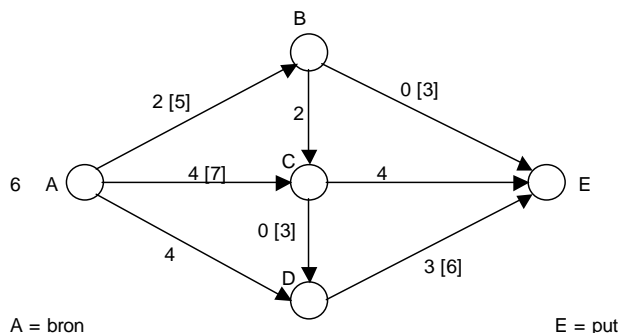


Figuur 3

Het getal 3 voor knoop A geeft aan dat we nu 3 eenheden olie van A naar E hebben gestuurd. Het getal 2 naast [5] geeft aan dat we op de tak tussen A en B nog een capaciteit van 2 eenheden per tijdseenheid over hebben. Tenslotte geeft het getal 0 naast [3] op de tak tussen B en E aan dat over de tak tussen B en E alle capaciteit is verbruikt.

Stap 2

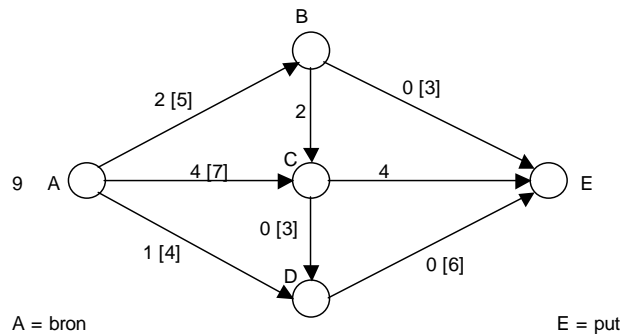
Zoek een route die geen verbindingen bevat, waarop de gehele capaciteit is verbruikt. Zo'n route is bijvoorbeeld A-C-D-E. De route A-C-D-E heeft als verbinding met de laagste capaciteit de tak tussen C en D. Stuur nu 3 eenheden over de route A-C-D-E. Dat geeft het volgende plaatje (figuur 4).



Figuur 4

Stap 3

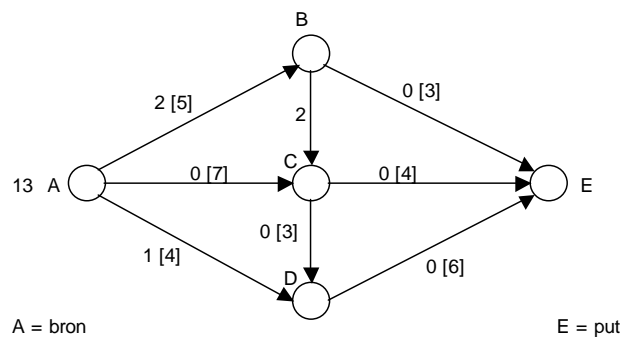
Er blijven nog routes over waarop nog niet de hele capaciteit gebruikt is. Een ervan is de route A-D-E. De laagste capaciteit op die route is 3. We sturen dus 3 eenheden over de route A-D-E (figuur 5).



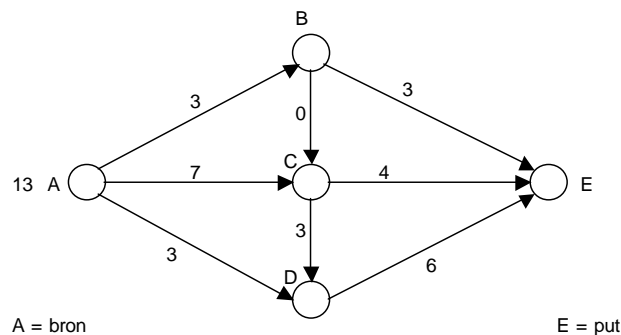
figuur 5

Stap 4

Er zijn nog twee routes te vinden waarop nog capaciteit over is: de routes A-C-E en A-B-C-E. Kiezen we de route A-C-E om die te optimaliseren dan krijgen we figuur 6a en het eindresultaat, weergegeven in figuur 6b.



figuur 6a



figuur 6b (eindsituatie)

Maar pas op: de getallen langs de takken geven in de eindsituatie aan hoeveel olie er door iedere leiding stroomt.

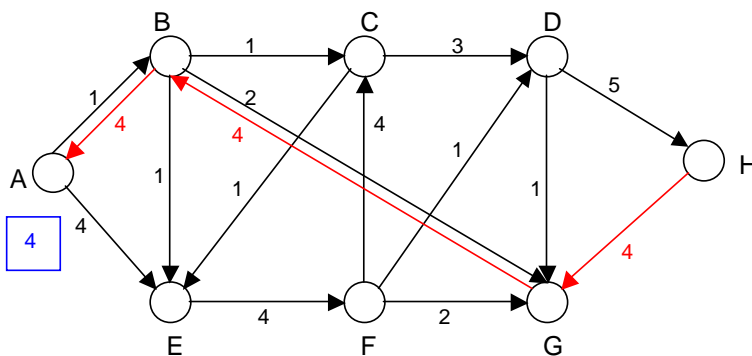
Oefening 2

- Ga na dat in geen van de knopen B, C en D sprake is van een ophoping van olie.
- Waarom kan het getal 13 bij de bron A niet worden verhoogd?

In de tekst hierboven zijn steeds keuzes gemaakt als het ging om routes waarop de totale capaciteit nog niet gebruikt is.

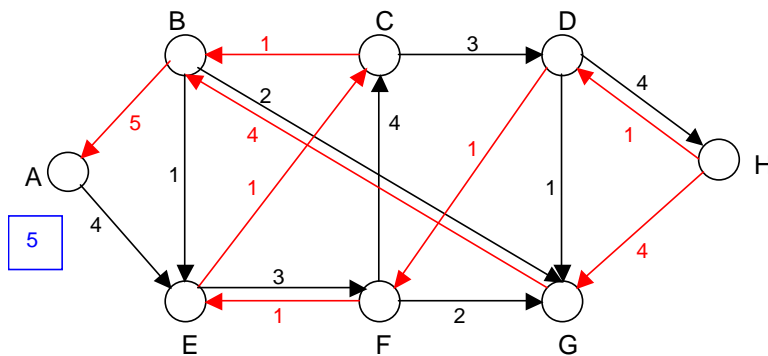
- Kies nu zelf andere routes of dezelfde routes in een andere volgorde en ga na welke eigenschappen van een optimale doorstroming er veranderen en welke gelijk blijven.

We gaan terug naar figuur 1. Wanneer je voor een bepaalde stroom gekozen hebt, wil je soms daarin ook veranderingen kunnen aanbrengen. Om dat voor elkaar te krijgen voeren we tegengesteld gerichte pijlen aan het netwerk toe, die aangeven hoeveel stroom door die tak gestuurd is. Langs de andere pijl zetten we dan de resterende hoeveelheid stroom die nog verstuurd kan worden. We sturen een stroom 4 door het netwerk van figuur 1 van A naar H via B en G. Dat betekent dat we van B naar A een pijl met waarde 4 tekenen en dat van A naar B een pijl met waarde 1 ($5 - 4$) overblijft. Van G naar B ook een pijl van 4 en van B naar G een pijl 2 en tenslotte van H naar G een pijl 4. Van G naar H kan geen stroom meer gestuurd worden (zie figuur 7). In het blauwe vierkantje staat de hoeveelheid stroom die we gestuurd hebben en de tegengesteld gerichte pijlen zijn met rood getekend.



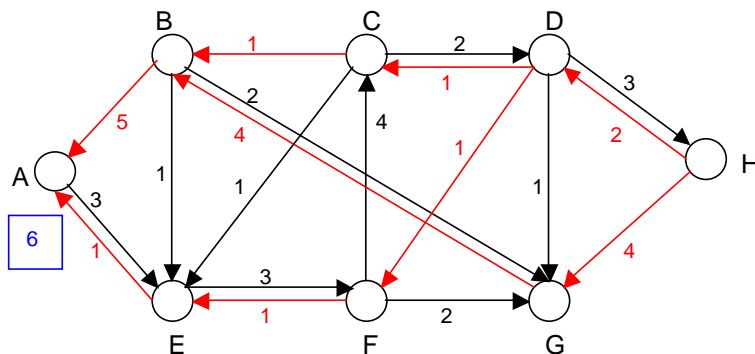
Figuur 7

De volgende stap is een stroom van 1 via de weg ABCEFDH (geen logische keuze). We passen het netwerk weer aan en krijgen figuur 8.



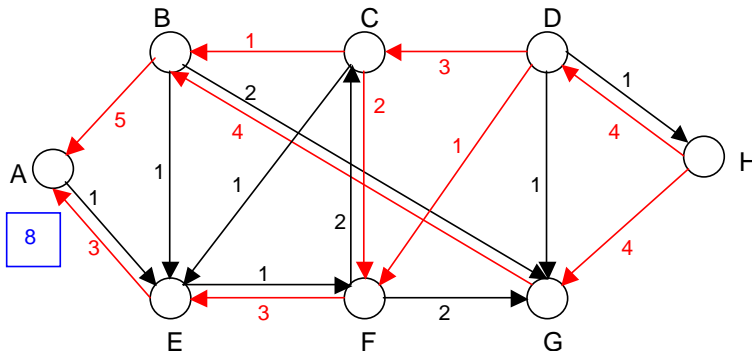
Figuur 8

De volgende stap is een stroom 1 via de weg AECDH. We passen het netwerk weer aan en krijgen figuur 9.



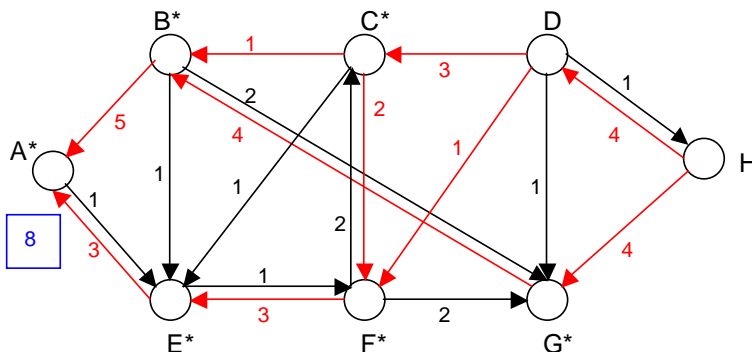
Figuur 9

Je ziet dat door het gebruik van tegengesteld gerichte pijlen we de stroom van 1 die we van C naar E hadden gestuurd weer hebben teruggedraaid. De laatste stap is een stroom van 2 via de route AEFCDH. Na aanpassen van het netwerk krijgen we dan figuur 10.



Figuur 10

Er is nu geen stroom meer mogelijk van A naar H. Dit kunnen we onderzoeken door de knopen in het netwerk te labelen. We beginnen in punt A en geven de knooppunten die we vanuit A kunnen bereiken een *. Dat is alleen E. Dan kijk je welke knopen je vanuit E kunt bereiken. Dat is F en die geef je ook een *. Zo loop je alle knopen af en het resultaat zie je in figuur 11. Je ziet dat je de punten D en H niet meer kunt bereiken, dus is er geen extra stroom meer mogelijk.



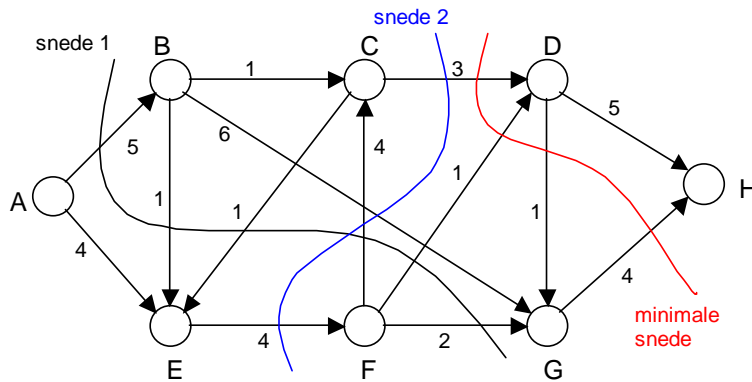
Figuur 11

Bij maximale stromen geldt het volgende principe:

De waarde van de maximale stroom is gelijk aan de capaciteit van de minimale snede (max flow, min cut).

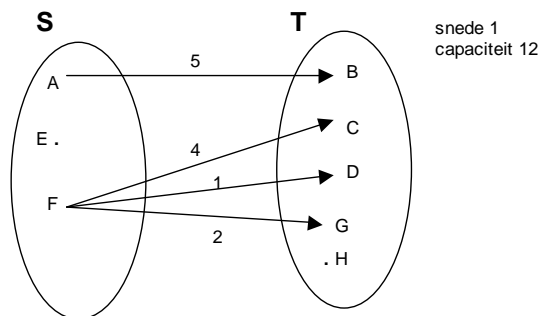
We zullen dit toelichten. We moeten eerst afspreken wat we onder een snede verstaan. We verdelen de knooppunten in twee verzamelingen S en T. In verzameling S zit de bron (A in ons probleem) en in verzameling T zit de put (H in ons probleem). De bron en de put kunnen nooit in dezelfde verzameling zitten. Alle takken, die van de knooppunten uit de verzameling S naar de knooppunten

in de verzameling T gaan, vormen samen de snede. In figuur 12 zijn snede 1 (zwart) en snede 2 (blauw) twee mogelijkheden van een snede.

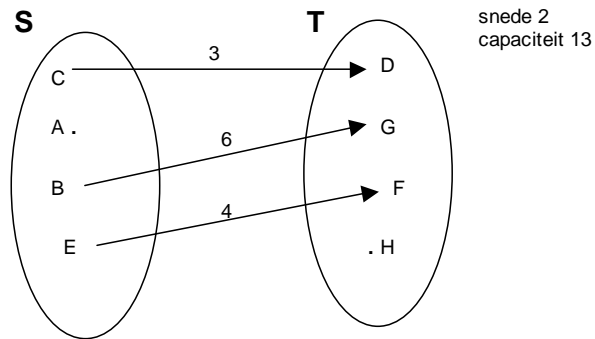


Figuur 12

In de figuren 13 en 14 hebben we de twee verzamelingen getekend met alle takken die van verzameling S naar verzameling T gaan met de bijbehorende capaciteiten.

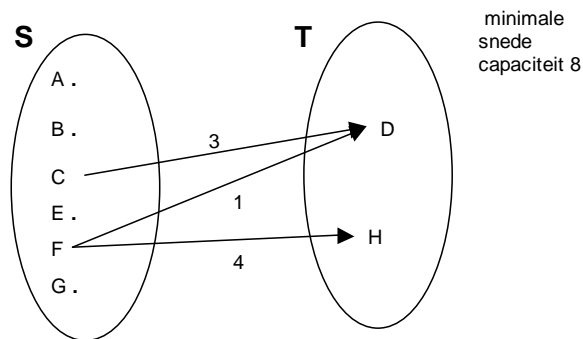


Figuur 13



Figuur 14

Met rood is in figuur 12 ook een minimale snede aangegeven. In dit geval is de snede zodanig gekozen, dat in de verzameling S alle gelabelde knopen zitten en in de verzameling T alle ongelabelde knopen. Zoals je kunt zien is de capaciteit van deze snede inderdaad gelijk aan de maximale stroom van 8 (zie figuur 15).

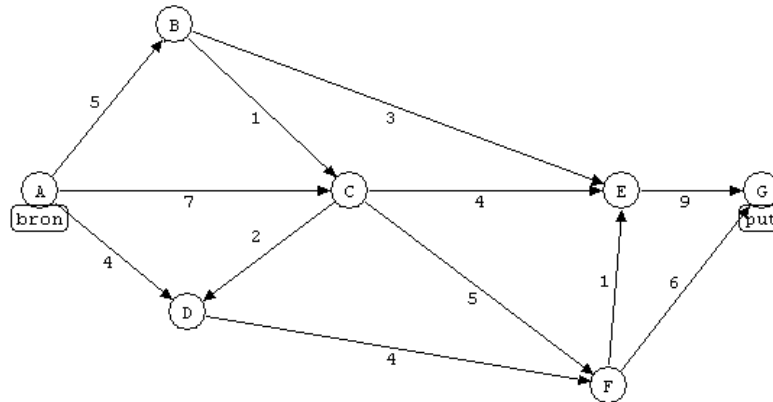


Figuur 15

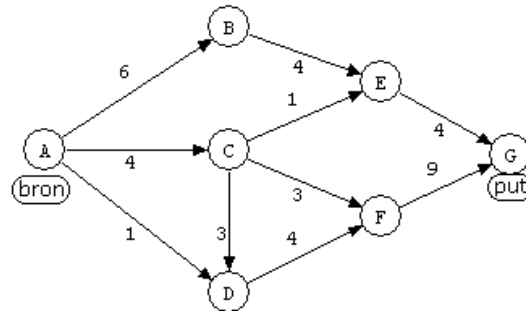
Opgaven

Bepaal van alle onderstaande netwerken de maximale stroom van de bron naar de put met het beschreven algoritme en controleer je antwoord met de max-flow min-cut theorie.

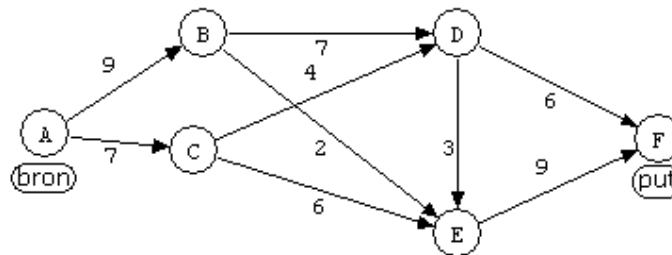
1



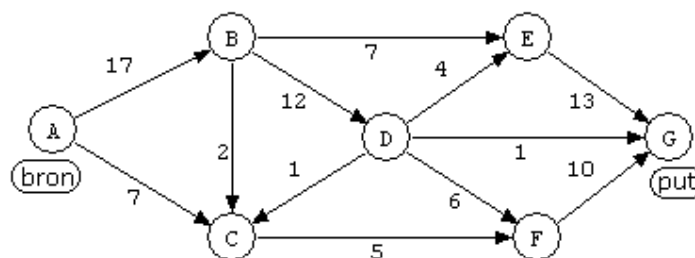
2



3



4



5

Als onderdeel van een tijdelijke omleiding moet snelwegverkeer door een stad geleid worden. De snelweg kan 2000 auto's per uur aan gedurende piekuren. Er is een verzameling van mogelijke routes door de stad voorgesteld. De straten van het wegennetwerk en de bijbehorende capaciteiten zijn gegeven in de tabel, waarbij E het punt is waar de auto's de stad binnenkomen, J_1 , J_2 , J_3 , J_4 en J_5 de kruisingen zijn van het wegennetwerk. L staat voor het punt waar de auto's de stad weer verlaten. De stroomcapaciteiten zijn gegeven in eenheden van 100 auto's per uur. De meeste straten zijn straten met eenrichtingsverkeer. Is het mogelijk om 2000 auto's per uur op te vangen met dit wegennetwerk?

<i>Naar</i>	<i>E</i>	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	<i>L</i>
<i>Van</i>							
E	-	7	9	8	*	*	*
J_1	*	-	4	*	7	*	*
J_2	*	4	-	5	3	7	*
J_3	*	*	5	-	*	8	*
J_4	*	*	*	*	-	5	10
J_5	*	*	*	*	*	-	12

6

Er vindt een belangrijk sportevenement plaats in Rome. Om supporters vanuit Amsterdam naar Rome te vervoeren zijn er vliegverbindingen tussen verschillende steden. Een reisorganisatie wil onderzoeken hoeveel supporters maximaal van Amsterdam naar Rome vervoerd kunnen worden. De getallen in deze opgave zijn verzonnen. De steden met luchthavens zijn: Amsterdam (A); Berlijn (BN); Londen (L); Brussel (BL); Düsseldorf (D); Parijs (P); Geneve (G); Madrid (M) en Rome (R).

In onderstaande tabel staat aangegeven hoeveel passagiers van elke plaats naar een andere plaats maximaal vervoerd kunnen worden.

<i>Van</i>	<i>A</i>	<i>BN</i>	<i>L</i>	<i>BL</i>	<i>D</i>	<i>P</i>	<i>G</i>	<i>M</i>	<i>R</i>
<i>Naar</i>									
A	-	*	*	*	*	*	*	*	*
BN	43	-	*	*	*	*	*	*	*
L	132	*	-	*	*	*	*	*	*
BL	95	*	*	-	32	*	*	*	*
D	48	11	*	*	-	*	*	*	*
P	*	*	24	32	*	-	*	*	*
G	24	*	*	15	17	11	-	8	*
M	*	*	93	18	*	37	*	-	*
R	430	16	*	74	*	*	72	312	-

Onderzoek hoeveel supporters maximaal vervoerd kunnen worden van Amsterdam naar Rome.

Antwoorden

- 1 De maximale stroom is 14.
- 2 De maximale stroom is 9.
- 3 De maximale stroom is 15.
- 4 De maximale stroom is 22.
- 5 Het is mogelijk, de maximale stroom is 22, ofwel 2200 auto's.
- 6 Er kunnen maximaal 731 supporters naar Rome vervoerd worden.

Bestuderen wetenschappelijk materiaal.

I. Paragraaf 9.5 uit Operations Research van Hillier en Lieberman tot **Using Excel** (blz. 395).

Opdracht 1.

- Lees het eerste gedeelte tot **An Algorithm** op blz. 390 en probeer zoveel mogelijk te begrijpen van de tekst.
- Ga het gedeelte nu aandachtiger lezen en noteer alle belangrijke Engelse woorden en hun Nederlandse betekenis.
- Maak nu een samenvatting over dit gedeelte in het Nederlands.

Opdracht 2.

- Lees het volgende gedeelte tot **Applying This Algorithm...**
- Lees het gedeelte nu aandachtiger door en noteer weer alle belangrijke Engelse woorden en hun Nederlandse betekenis.
- Vertel nu in eigen woorden de afspraken en de manier waarop het algoritme werkt.

Opdracht 3.

- Lees het laatste gedeelte door.
- Lees het gedeelte nu aandachtiger door en noteer weer alle belangrijke Engelse woorden en hun betekenis.
- Doe dezelfde stappen als in het boek genoemd voor jezelf op een apart papier.
- Vertel het max-flow-min-cut principe in je eigen woorden.

II. Paragraaf 3.2 uit Operationele analyse van Henk Tijms. (Opm.: gebruik eventueel voor dit gedeelte de powerpointpresentatie)

Opdracht 1.

- Lees het gedeelte op blz. 153 tot "Voordat we de basisgedachten ..."

Opdracht 2.

- Lees het gedeelte van "**Basisidee van het maximaal-stroomalgoritme**" tot figuur 3.4.
- Welke afspraken staan in dit gedeelte en welke symbolen worden gebruikt.
- Wat is het verschil tussen $x^{(0)}$ en $x_{ij}^{(0)}$.

Opdracht 3.

- Lees verder tot "**De labelprocedure**".
- Leg het begrip stroomvermeerderende keten in eigen woorden uit.
- Leg de begrippen Δ_f en Δ_b uit in eigen woorden.

Opdracht 4.

- Lees de gedeeltes "**De labelprocedure**" en "**Illustratie**".
- Beschrijf de labelprocedure in eigen woorden.
- Doe dezelfde stappen als in "**Illustratie**" genoemd voor jezelf op een apart papier.

Opdracht 5.

- Lees het gedeelte **Maximale stroom/ Minimale snede**.
- Noteer voor je zelf welke letters gebruikt worden en wat ze betekenen.
- Leg het gedeelte uit in je eigen woorden.

III. Paragraaf 1.2 Maximale stromen uit Optimaliseren in netwerken van prof. Roos.

Opdracht 1.

- Lees het gedeelte tot figuur 6.
- Noteer de verzameling V tussen accolades.
- Noteer de verzameling E tussen accolades.
- Geef van elke tak aan wat zijn capaciteit is.
- Wat wordt bedoeld met de balansvergelijkingen (3) en (4).
- Vertel in eigen woorden wat bedoeld wordt met "de waarde van de stroom x ".
- Lees nu het tweede gedeelte tot je onder stelling 1.2 (max-flow min cut stelling) "vormt hiervan het bewijs" tegen komt.
- Probeer steeds te begrijpen wat er in de verschillende uitdrukkingen en teksten bedoeld wordt