Technische Universiteit Delft

module 4

Steinerpunten

Dit studiemateriaal is ontwikkeld door de kerngroep wiskunde D Delft en mag gratis gebruikt worden in het wiskundeonderwijs in het vo.

Kerngroep wiskunde D Delft

Liesbeth Bos	Scala College	
Wim Caspers	TU Delft / Adelbert College	
Wim van Dijk	Montessori Lyceum	
David Lans	Emmaus College	
Jan Moen	Int. College Edith Stein	
Rob van Oord	Coenecoop College	
Sanne Schaap	Marecollege	
Jan Schrik	**Christelijk Lyceum Delft**	**module 1**
Jeroen Spandaw	TU Delft	
Agnes Verweij	TU Delft	

website: www.wiskundedsteun.nl
contact: w.t.m.caspers@tudelft.nl

Bij module 1	**Steinerpunten**
Theorie	**Pagina's 5 t/m 14**
Opgaven	**Pagina's 15 t/m 18**
Uitwerkingen	**Pagina's 19 t/m 25**
Toetsopgaven	**Pagina's 26 en 27**
Uitwerkingen van de toetsopgaven	**Pagina's 28 t/m 31**
Op het internet	**http://space.geocities.jp/flashr0d/steinertree.html**

Geachte docent,

Deze module vereist als voorkennis de inhoud van Module 1: minimaal opspannende bomen. Om uw leerlingen zich het onderwerp Steinerpunten eigen te laten maken kunt u op diverse wijzen gebruik maken van het materiaal in deze module.

U kunt de moduletekst voorleggen aan de leerlingen en de genoemde internetverwijzingen gebruiken voor uzelf, als achtergrondinformatie.

U kunt het materiaal gebruiken om een eigen vorm te geven aan uw lessen of u gebruikt de diverse onderdelen om uw eigen verhaal over het onderwerp voor te bereiden. De opdrachten uit de module gebruikt u dan bijvoorbeeld als oefenmateriaal.

De leerlingen kunnen zich verdiepen in het onderwerp door middel van eigen onderzoek. U heeft dan materiaal en internetverwijzingen beschikbaar als achtergrondinformatie.

Na pagina 10 kunt u er voor kiezen enkele opgaven te laten maken. Daarna kan dan de theorie van de pagina's 11 tot en met 14 doorgenomen worden en kunnen de laatste opgaven gemaakt worden.

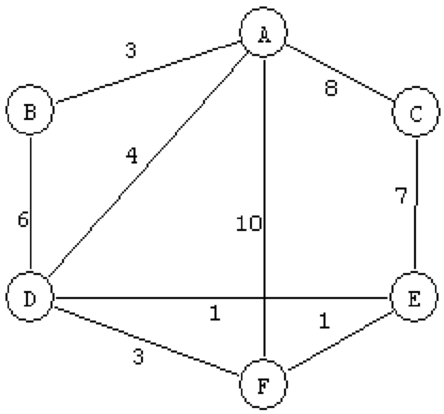
Module 1 is geschikt om in klas 4 te behandelen. Deze aanvulling op module 1 kan beter in klas 5 of klas 6 worden doorgenomen.

De toetsopgaven zijn te gebruiken voor het samenstellen van een toets. Vanzelfsprekend kunnen leerlingen door middel van een verslag of een presentatie ook laten zien in hoeverre zij de materie beheersen. De kennis van het programma 'grafmat' uit module 0 kan daarbij van dienst kan zijn.

Module 4

Steinerbomen

Bij het zoeken naar een minimaal opspannende boom in een netwerk wordt steeds uitgegaan van de wegen en de knopen waaruit dat netwerk bestaat. Uitgaande van het netwerk in onderstaande figuur bijvoorbeeld werd gezocht naar een boom met zo klein mogelijk totaal gewicht die alle knopen verbindt.



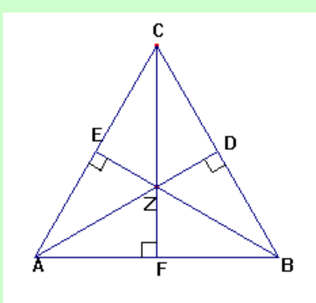
Wanneer nu de knopen supermarkten voorstellen, dan is het natuurlijk reuze interessant om te weten wat de kortste verbinding tussen die supermarkten onderling is. Het is ook mogelijk dat de eigenaar van de supermarktketen veel meer geïnteresseerd is in het antwoord op de vraag waar hij zijn distributiecentrum moet bouwen om zijn winkels zo goedkoop mogelijk te bevoorraden.
Het distributiecentrum hoeft niet in één van die knopen gebouwd te worden en misschien moet hij wel meer dan één distributiecentrum bouwen.

Om een dergelijk probleem op te lossen, voeg je knopen toe aan het netwerk (de plekken waar een distributiecentrum moet komen). Je weet alleen niet precies waar. Je weet alleen wel dat knopen zo economisch mogelijk geplaatst moeten worden en de verbindingswegen naar de oorspronkelijke knopen (de supermarkten) samen zo kort mogelijk moeten zijn.

In het bovenstaande geval kun je je voorstellen dat er extra knopen ergens tussen de bestaande knopen geplaatst moeten worden. Maar waar precies? Dat is nog niet zo eenvoudig.

Laten we wat eenvoudiger beginnen; met drie supermarkten die op de hoekpunten van een gelijkzijdige driehoek liggen. Een verstandige plaats om een distributiecentrum te bouwen is misschien het zwaartepunt. In het voorbeeld hieronder gaan we dit eens nader bekijken.

Voorbeeld



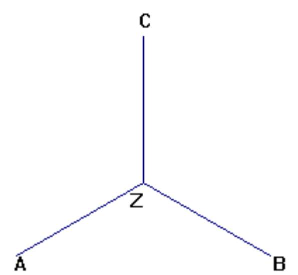
Gegeven is de gelijkzijdige driehoek ABC met zijden van lengte 1. De minimale-opspannende boom heeft lengte 2. In het figuur hiernaast is het zwaartepunt Z van driehoek ABC geconstrueerd.

Met behulp van de stelling van Pythagoras of met behulp van de goniometrie is de lengte van AD te berekenen; $AD = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ (Ga dit zelf na)

Een bekende eigenschap van zwaartelijnen in een driehoek is dat
$AZ : ZD = CZ : ZF = BZ : ZE = 2:1$

Dus: $AZ = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

Op dezelfde manier: $BZ = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ en $CZ = \frac{1}{3}\sqrt{3}$.



Na toevoeging van *Z* aan het netwerk is de gevraagde minimaal opspannende boom hiernaast getekend. De totale lengte is $3 \cdot \frac{1}{3}\sqrt{3} = \sqrt{3}$ en dit is kleiner dan de lengte van de oorspronkelijke minimaal opspannende boom.

Vraag:
Toon aan: $\angle AZB = \angle BZC = \angle CZA = 120^0$

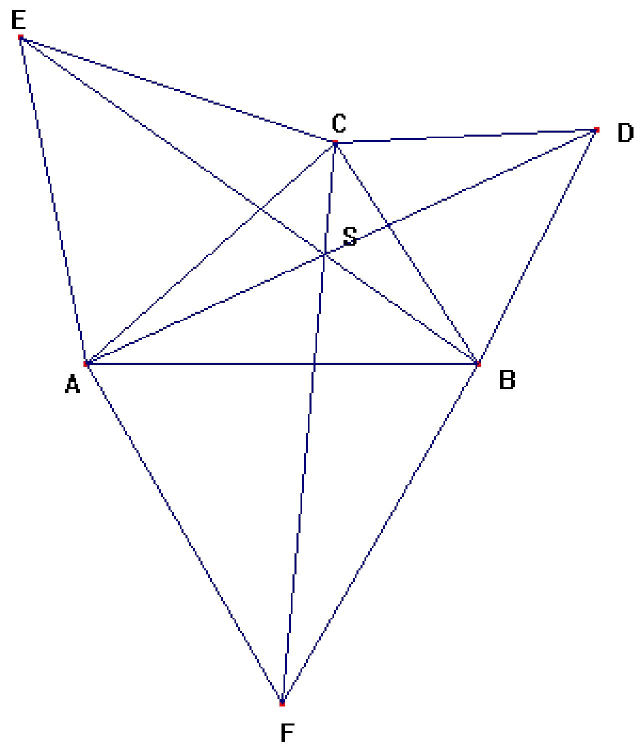
Definitie

Het vinden van een lijnenstelsel dat een aantal punten in het vlak met elkaar verbindt met minimale lengte, heet het vinden van een **Steinerboom**. De punten die toegevoegd worden heten **Steinerpunten**.

In het voorbeeld zie je in het tweede plaatje de Steinerboom getekend en Z is het Steinerpunt, tenminste wanneer er niet een boom te verzinnen is die de drie hoekpunten verbindt, met een nog kleinere totale lengte. Wees gerust, zo'n boom is niet te vinden. We komen hier later op terug. In een driehoek is het toevoegen van één Steinerpunt voldoende en in een gelijkzijdige driehoek is dat het zwaartepunt. In een niet gelijkzijdige driehoek kan het Steinerpunt ook redelijk eenvoudig geconstrueerd worden. In het speciale geval van een driehoek heet het Steinerpunt ook het **punt van Toricelli** (1609-1647) of **punt van Fermat** (1601-1665).

Het punt van Toricelli

Op de zijden van een willekeurige driehoek *ABC*, waarvan de grootste hoek niet groter is dan 120 graden, zijn naar buiten gelijkzijdige driehoeken *ACE*, *CBD* en *ABF* getekend. Vervolgens zijn de lijnstukken *AD*, *BE* en *CF* getekend.



In de figuur is een beetje optimistisch de letter *S* geplaatst. Het lijkt erop dat de lijnen *AD*, *BE* en *CF* elkaar snijden in één punt en dat we daar dan die letter *S* bij kunnen zetten. Hieronder wordt bewezen dat die lijnen elkaar werkelijk snijden in één punt en meer dan dat. De naam *S* zal mooi blijken te zijn gekozen, aangezien het snijpunt het Steinerpunt is van de driehoek; voor elk ander punt *G* binnen de driehoek zal blijken dat $AG+BG+CG$ groter is dan $AS+BS+CS$. Er valt nog meer te vertellen over dit punt *S*, ook bekend als het punt van Toricelli of het punt van Fermat. Er worden acht eigenschappen bewezen. (Totdat bewezen is dat de lijnen *AD*, *BE* en *CF* elkaar in één punt snijden, bedoelen we met *S* het snijpunt van de lijnen *AD* en *BE*.)

Eigenschap 1 *AD*, *BE* en *CF* zijn even lang

Omdat driehoek *ACE* gelijkzijdig is geldt: $AC=EC$ (1)
Omdat driehoek *BCD* gelijkzijdig is geldt: $CD=CB$ (2)
$\angle ACD=\angle ACB+\angle BCD=\angle ACB+60^0=\angle ACB+\angle ACE=\angle ECB$ (3)

Uit (1), (2) en (3) volgt nu: $\Delta ACD \cong \Delta ECB$ (ΔACD is congruent met ΔECB) en dus is lijnstuk AD even lang als lijnstuk BE .

Op dezelfde manier kun je ook bewijzen dat lijnstuk AD even lang is als lijnstuk CF . De drie lijnstukken zijn dus even lang.

Eigenschap 2	$\angle BSC = \angle ASC = \angle ASB = 120^0$
Eigenschap 3	*AD*, *BE* en *CF* snijden elkaar in één punt *S.*
Eigenschap 4	de zes hoeken bij dat snijpunt *S* zijn elk 60^0

We gaan bewijzen dat $\angle BSD = \angle DSC = 60^0$, waarbij S het snijpunt is van *AD* en *BE*.
Stel dat in ΔBCE geldt $\angle SBC = p^0$, dan volgt uit de congruentie van ΔACD en ΔECB dat ook $\angle SDC = p^0$. Verder geldt: omdat ΔDCB gelijkzijdig is, is $\angle DBC = 60^0$
Dus $\angle BDS = 60^0 - \angle SDC = 60^0 - p^0$.
In driehoek BDS geldt nu dat
$\angle BSD = 180^0 - \angle BDS - \angle SBD = 180^0 - (60^0 - p^0) - (60^0 + p^0) = 60^0$

Bekijken we nu vierhoek *BDCS* dan liggen de punten *B*, *D*, *C* en *S* op een gemeenschappelijke cirkel, namelijk de omgeschreven cirkel van driehoek *DSC*. (Door de punten *D*, *S* en *C* gaat een cirkel en verder geldt dat $\angle SDC$ even groot is als $\angle SBC$ en dus staan ze op dezelfde boog *CS*.)
Dus is vierhoek *BDCS* een koordenvierhoek en geldt: $\angle BSC + \angle BDC = 180^0$ en daaruit volgt $\angle BSC = 120^0$. We kunnen nu concluderen dat $\angle DSC = 120^0 - \angle BSD = 60^0$.

Op dezelfde manier als hier boven kunnen we ook bewijzen dat $\angle ASC = 120^0$ en $\angle ASE = \angle ESC = 60^0$.
Verder volgt nu uit het voorgaande dat $\angle ASB = 360^0 - \angle ASC - \angle BSC = 120^0$.

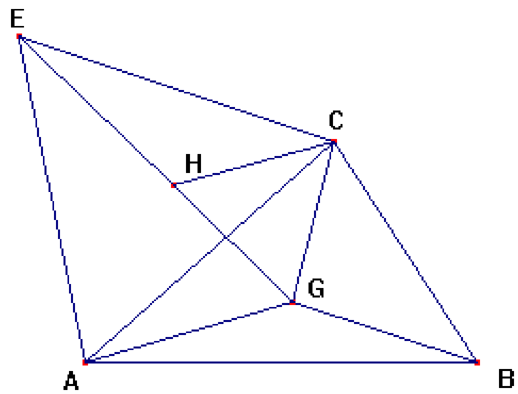
Aangezien $\angle ASB + \angle AFB = 120^0 + 60^0 = 180^0$, is vierhoek *ASBF* een koordenvierhoek en liggen de punten *A*, *S*, *B* en *F* dus op één cirkel. Verder zijn $\angle ASF$ en $\angle ABF$ even groot, omdat ze op dezelfde koorde staan, dus $\angle ASF = 60^0$.
Uit het bovenstaande volgt nu dat $\angle ASC + \angle ASF = 120^0 + 60^0 = 180^0$; $\angle CSF$ is een gestrekte hoek. Dus de lijn door de punten *C* en *F* gaat ook door het punt *S*.
We concluderen dat de lijnen *AD*, *BE* en *CF* door één punt gaan; het punt *S*.

Eigenschap 5	*S* ligt op de omgeschreven cirkels van de driehoeken *ABF, BCD* en *ACE*

Eerder werd al opgemerkt, dat vierhoek *BDCS* een koordenvierhoek is; de punten *B, C, D* en *S* liggen op een cirkel, de omgeschreven cirkel van driehoek *BCD*. Net zo wordt duidelijk dat *S* op de omgeschreven cirkels van de driehoeken *ABF* en *ACE* ligt.

Eigenschap 6 de som van de afstanden $AS+BS+CS$ is minimaal.

In de volgende figuur is *G* een willekeurig gekozen punt in driehoek *ABC*.



Het punt *H* is zo gekozen, dat driehoek *CGH* gelijkzijdig is. Draaien van lijnstuk *CG* om punt *C* over een hoek van 60^0, levert dus lijnstuk *CH*. Dezelfde draaiing van lijnstuk *CA* levert lijnstuk *CE*.
Driehoek *CGA* gaat door deze draaiing over in driehoek *CHE* .
Dan is driehoek *CGA* congruent met driehoek *CHE* en dus is $GA = HE$.

Uit het bovenstaande volgt nu: $BG+CG+AG = BG+GH+HE$
Het rechterlid is de lengte van het pad van punt *B* naar punt *E*. Deze lengte is minstens even groot als de lengte van lijnstuk *BE*. Dus $BE \le AG+BG+CG$.

We voeren nu in het bijzonder deze constructie uit met punt *S* in de rol van *G*, en maken de gelijkzijdige driehoek *CSH.* De punten *S* en *H* liggen op lijnstuk *BE.* En we vinden $AS+BS+CS = HE+BS+SH = BE$. In het bijzonder:
$AS+BS+CS \le AG+BG+CG$

We hebben nu dus ook de volgende eigenschap bewezen:

Eigenschap 7 $AS+BS+CS = BE = AD = CF$

De laatste eigenschap die we bewijzen is:

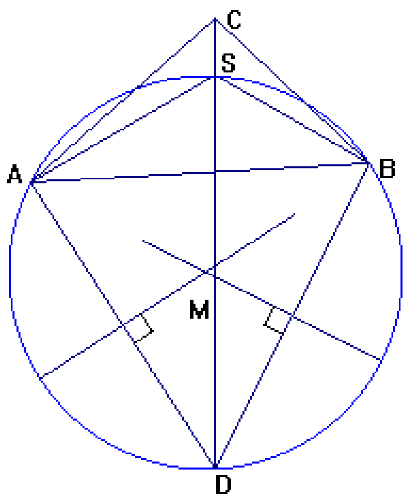
Eigenschap 8 $AS+BS+CS$ is kleiner of gelijk aan de lengte van de minimaal opspannende boom van driehoek *ABC*

Stel de lengte van de minimale-opspannende boom is gelijk aan $AB+AC$ (in andere gevallen is het bewijs gemakkelijk aan te passen).
We weten dat $AC = AE$. De lengte van de minimaal opspannende boom is dus ook gelijk aan $AB+AE$ en deze lengte is groter dan de lengte van lijnstuk *BE*.

Steinerpunten in een driehoek

In de vorige paragraaf werd duidelijk dat de Steinerboom van een driehoek, neerkomt op het construeren van het punt van Toricelli van die driehoek. We beperken ons dan wel tot driehoeken waarvan de grootste hoek kleiner is dan 120^0. Eigenschap 5 uit de vorige paragraaf levert een andere manier om *S* te construeren.

1) Bepaal de grootste hoek van driehoek ABC. Laat dit $\angle C$ zijn en $\angle C < 120^0$.
2) Teken een gelijkzijdige driehoek met de langste zijde van driehoek ABC als een van de zijden. Aangezien tegenover de grootste hoek de langste zijde ligt, is de langste zijde dus zijde AB. Het derde hoekpunt D van deze gelijkzijdige driehoek ligt tegenover punt C.
3) Construeer een cirkel door de punten A, B en D van de gelijkzijdige driehoek ABD; de omgeschreven cirkel van driehoek ABD. Het middelpunt M van deze cirkel is het snijpunt van de middelloodlijnen van de zijden van driehoek ABD.
4) Trek een lijn van punt C naar punt D. Het Steinerpunt *S* is het snijpunt van die lijn tussen C en D met de cirkel.



Deze manier van construeren komt van pas in het vervolg, wanneer we op zoek gaan naar Steinerbomen en –punten van vierhoeken, vijfhoeken, enzovoorts...

Meer dan drie punten

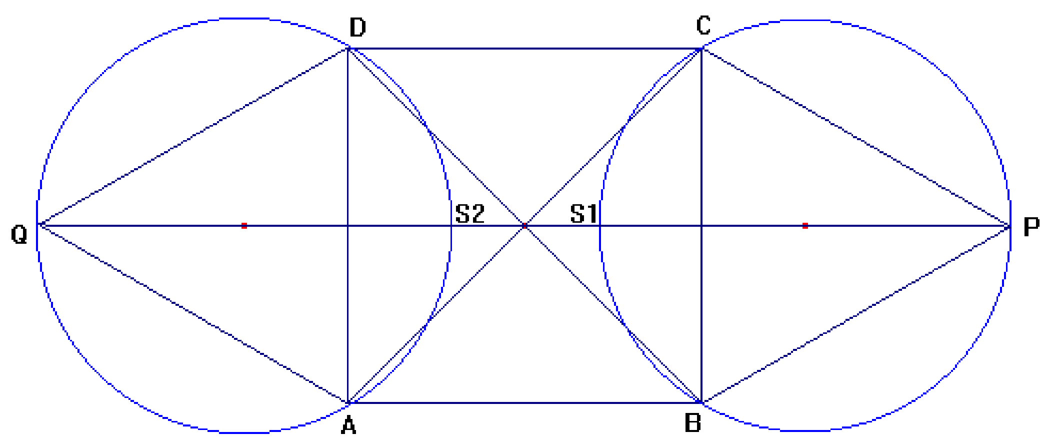
Het kan bewezen worden dat een kortste Steinerboom van een netwerk met *n* punten de volgende eigenschappen heeft:

1) de hoek tussen twee aanliggende verbindingslijnen is gelijk aan 120^0 en precies drie verbindingslijnen komen samen in een Steinerpunt
2) het aantal Steinerpunten is ten hoogste n-2.
3) Voor de lengte L_{Stein} van de kortste Steinerboom en de lengte L_{boom} van de minimale-opspannende boom (zonder de hulppunten) geldt: $0 \leq L_{boom} - L_{Stein} \leq \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot L_{boom}$

In het geval van Steinerbomen voor driehoeken, met andere woorden *n*=3, wil dat zeggen dat het toevoegen van meer dan dat ene punt van Toricelli, geen kortere netwerken oplevert. De hoek tussen de drie verbindingslijnen zijn in de vorige paragraaf inderdaad netjes 120^0 groot gebleken. Over de lengte van de Steinerboom in geval van driehoeken, hadden we nog niet veel ontdekt. In opgave 1 word je uitgenodigd de derde eigenschap te controleren voor een gelijkzijdige driehoek.

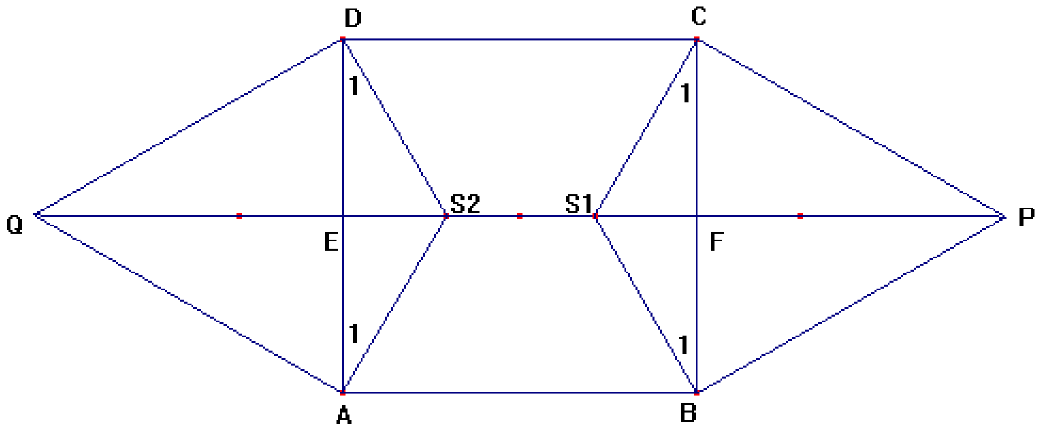
Steinerpunten in een vierkant

Hieronder zijn twee Steinerpunten *S1* en *S2* getekend in een vierkant *ABCD*. De driehoeken *QAD* en *PBC* zijn gelijkzijdig.



Stel de lengte van de zijden van het vierkant gelijk aan *p*. De lengte van de minimaal opspannende boom is gelijk aan $AD + DC + BC = 3p$.

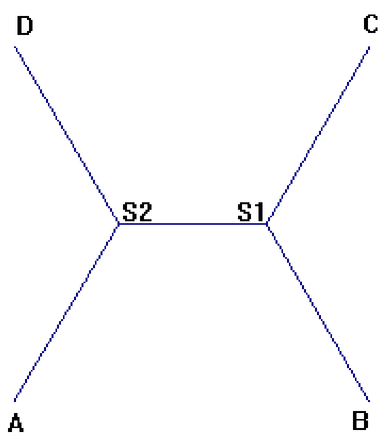
We zullen nu aantonen dat de lengte van de minimaal opspannende boom met de punten *A*, *B*, *C*, *D*, *S1* en *S2* kleiner is dan 3p.



Er geldt: $\angle A_1 = \angle B_1 = \angle C_1 = \angle D_1 = 180^0 - 90^0 - 60^0 = 30^0$.
Verder is $DE = AE = CF = BF = \frac{1}{2}p$.

$\cos \angle D_1 = \dfrac{DE}{DS2}$, dus $DS2 = \dfrac{\frac{1}{2}p}{\cos(30^0)} = \dfrac{\frac{1}{2}p}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \dfrac{p}{\sqrt{3}} \approx 0{,}577p$

$\tan \angle D_1 = \dfrac{ES2}{DE}$, dus $ES2 = \frac{1}{2}p \cdot \tan(30^0) = \frac{1}{2}p \cdot \frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{1}{6}p\sqrt{3} \approx 0{,}289p$



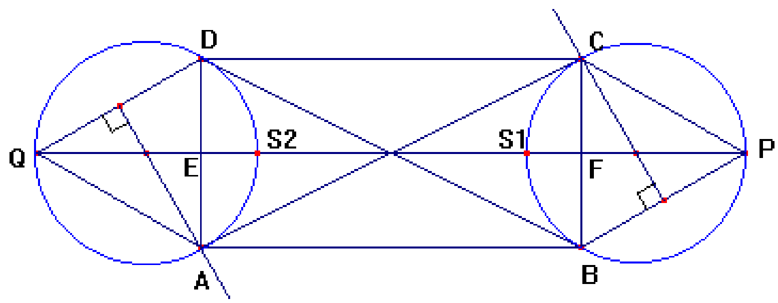
De lengte van de minimale-opspannende boom is nu gelijk aan

$$\frac{4p}{\sqrt{3}} + (p - 2 \cdot \tfrac{1}{6}p\sqrt{3}) = p\sqrt{3} + p \approx 2{,}73p$$

Deze lengte is inderdaad kleiner dan 3p. Of dit ook werkelijk de kortste Steinerboom is, dat laten we even in het midden, totdat we het algemene geval van Steinerpunten in een vierhoek beschouwen. Twee Steinerpunten zou wel voldoende moeten zijn.

Steinerpunten in een rechthoek

Hieronder zijn twee Steinerpunten *S1* en *S2* getekend in een rechthoek *ABCD*. De driehoeken *QAD* en *PBC* zijn ook nu weer gelijkzijdig.

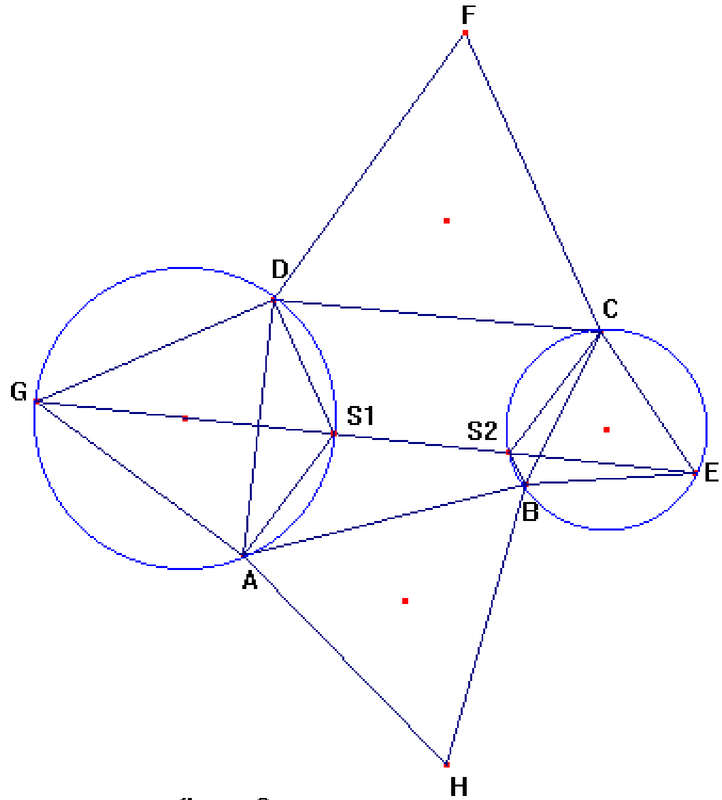


In opgave 7 moet worden aangetoond dat de lengte van de Steinerboom die hoort bij de punten *A*, *B*, *C*, *D*, *S1* en *S2* kleiner is dan de lengte van de minimale-opspannende boom van rechthoek (graaf) *ABCD*. Of hierboven de kortste Steinerboom getekend is, dat wordt hieronder duidelijk, wanneer we het algemene geval van Steinerpunten in een vierhoek beschrijven.

Steinerpunten in een vierhoek

We bekijken nu een vierhoek *ABCD* waar alle hoeken kleiner zijn dan 120^0.
Ook nu construeren we twee Steinerpunten:

- Teken de naar buiten gerichte gelijkzijdige driehoeken *ABH*, *BCE*, *DCF* en *ADG*.
- Ga na welke van de twee lijnstukken *EG* en *HF* de kleinste lengte heeft (in de tekening hieronder is dit lijnstuk *EG*)
- Teken de twee omgeschreven cirkels en snijdt deze met het kortste lijnstuk. (zie de tekening)
- De twee snijpunten *S1* en *S2* zijn nu de Steinerpunten.



figuur 9

Opmerkingen:

1) Om de tekening zo duidelijk mogelijk te houden zijn in het voorbeeld een aantal hulplijnen, zoals de middelloodlijnen van de driehoeken om de middelpunten van de omgeschreven cirkels te bepalen, weggelaten.
2) De lengte van de minimale-opspannende boom van vierhoek *ABCD* is gelijk aan $AD + AB + BC$. In opgave 9 moet je bewijzen dat de lengte van de Steinerboom, dus $AS_1 + BS_2 + CS_2 + DS_1 + S_1S_2$ kleiner is dan de lengte van de minimale-opspannende boom van vierhoek *ABCD*.
3) S_1 is het punt van Toricelli van driehoek S_2AD en S_2 is het punt van Toricelli van driehoek S_1BC
4) Of dit de gezochte Steinerboom is, dat valt nog te bezien.

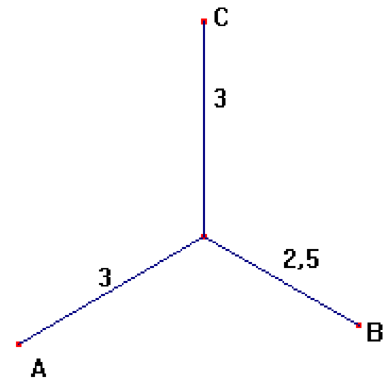
Steinerboom in een vierhoek

De constructie uit voorgaande paragraaf levert inderdaad de Steinerboom op met kortste lengte. We bewijzen niet dat twee Steinerpunten toevoegen voldoende is, dat nemen we als uitgangspunt. Als S_1 het ene toegevoegde Steinerpunt is, dan is het andere Steinerpunt het punt van Toricelli van driehoek S_1BC. Immers, het toevoegen van dat punt van Toricelli levert uitgaande van S_1 de kortste boom op. Dat betekent dat S_2 op de lijn S_1E ligt. Net zo: S_1 ligt op de lijn S_2G. Kortom S_1 en S_2 liggen op de lijn *EG.* De enige andere Steinerboom die in aanmerking kan komen voor het predicaat “met kortste lengte” is de boom die ontstaat door dezelfde constructie uit te voeren op de lijn *HF*. Dat levert echter een boom op met een grotere lengte.

Opgaven over Steinerbomen

1 Ga na dat in geval van een gelijkzijdige driehoek inderdaad voor de lengte L_{Stein} van de kortste Steinerboom en de lengte L_{boom} van de minimale-opspannende boom (zonder de hulppunten) geldt:
$0 \leq L_{boom} - L_{Stein} \leq \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot L_{boom}$.

2 Hiernaast zie je de kortste Steinerboom van driehoek *ABC.* Bereken de lengte van de oorspronkelijke minimale-opspannende boom.



3 Teken een driehoek *ABC*, met $\angle C = 120^0$.
Construeer het punt van Toricelli *P*.
Vergelijk de minimale-opspannende boom van driehoek *ABC* met de minimale-opspannende boom van driehoek *ABC* en het extra punt *P*.

4 Teken een driehoek *ABC*, waarbij $\angle C > 120^0$.
Construeer het punt van Toricelli *P*.
Vergelijk nu de minimale-opspannende boom van driehoek *ABC* met de minimale-opspannende boom van driehoek *ABC* en het extra punt *P*.

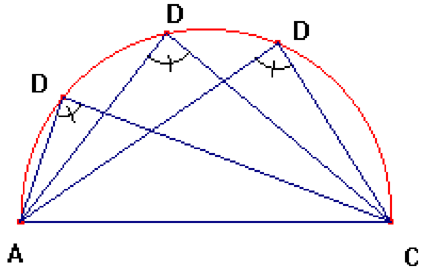
5 Gegeven is een rechthoek *ABCD* met $AD = 4$ en $AB = 6$. Teken de rechthoek en construeer de twee Steinerpunten zoals hierboven beschreven. Bereken exact de lengte van de aldus verkregen Steinerboom.

6 Toon aan dat de bij een rechthoekige graaf met lengte x en breedte y geldt dat de punten die worden toegevoegd, zoals beschreven in de theorie hierboven, om de Steinerboom te vormen, liggen op een afstand $\frac{1}{2}y$ van de langste zijden en een afstand $a = \dfrac{y}{2\sqrt{3}}$ van de kortste zijden.

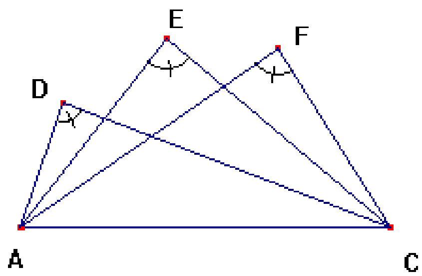
7 Toon aan dat de bij een rechthoekige graaf met lengte x en breedte y, waarbij $y < x$, geldt dat de lengte van de Steinerboom, zoals geconstrueerd in de theorie hierboven, gelijk is aan $x + y\sqrt{3}$.

E Toon in figuur 4 aan: $\angle M_{2,3} = 2 \cdot \angle D_{1,2}$

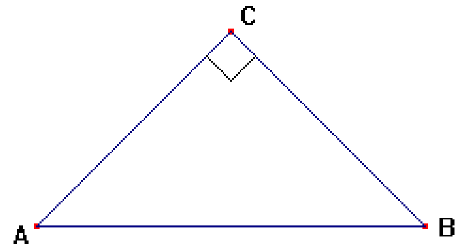
Een gevolg van wat je nu bewezen hebt is dat als de punten *A* en *C* vaste punten op de cirkel zijn en dus $\angle M_{2,3}$ niet verandert, steeds geldt $\angle M_{2,3} = 2 \cdot \angle D_{1,2}$ waarbij het niet uitmaakt waar het punt *D* op boog *AC* ligt. Dus de grootte van $\angle ADC$ verandert niet, of wel $\angle ADC$ is een constante hoek.



Ook het omgekeerde geldt:
Als voor punten *D*, *E* en *F* geldt $\angle ADC = \angle AEC = \angle AFC$, dan liggen de punten *A*, *B*, *C*, *D*, *E* en *F* op dezelfde cirkelboog, of anders gezegd de punten *E* en *F* liggen op de omgeschreven cirkel van driehoek *ADC*.



8 In de driehoek hiernaast is
$\angle C = 90^0$ en $AC = BC = 4$

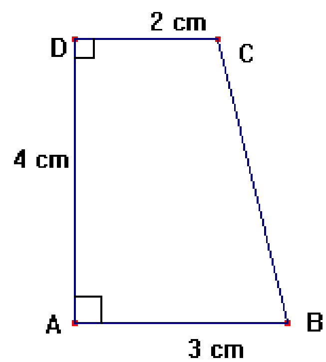


a Voeg als Steinerpunt het punt van Toricelli toe en bereken exact de lengte van de aldus verkregen Steinerboom.

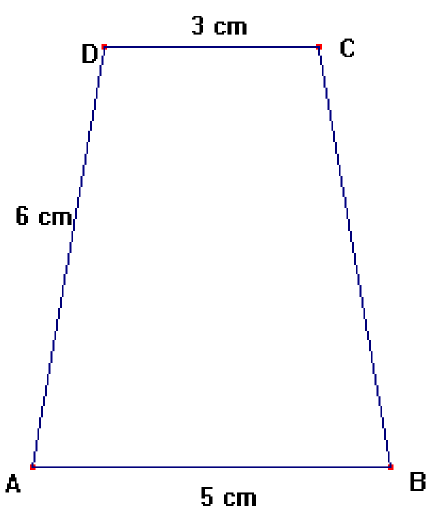
b Bereken hoeveel procent de lengte van die Steinerboom korter is dan de lengte van de minimale-opspannende boom.

9 Toon aan dat voor de Steinerpunten die in een willekeurige vierhoek geconstrueerd worden als boven, geldt:
$AS_1 + BS_2 + CS_2 + DS_1 + S_1S_2 < AD + AB + BC$

10 Gegeven is een trapezium *ABCD*. (zie de figuur hier naast)
Teken de Steinerpunten op de manier zoals in de theorie beschreven en bereken exact de lengte van de aldus verkregen Steinerboom.



11 Gegeven is een gelijkbenig trapezium *ABCD*.(zie de figuur hier naast)

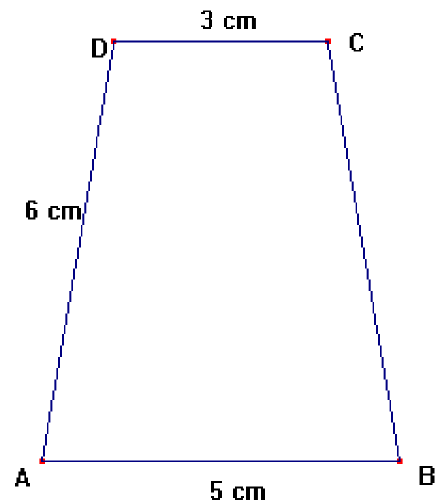


a Construeer een boom als in de theorie beschreven.

b Bereken exact de lengte van die Steinerboom.

c Bereken exact de afstand tussen die Steinerpunten

12 Gegeven is een ruit *ABCD*.
Construeer de Steinerpunten zoals beschreven in de theorie.
Maakt het uit op welke zijden je de gelijkzijdige driehoeken, die voor de constructie nodig zijn, tekent?
Het lijkt er op dat de lijn die door de Steinerpunten gaat ook door het snijpunt *M* van de diagonalen *AC* en *BD* gaat. Is dit vermoeden juist? Leg dit uit.



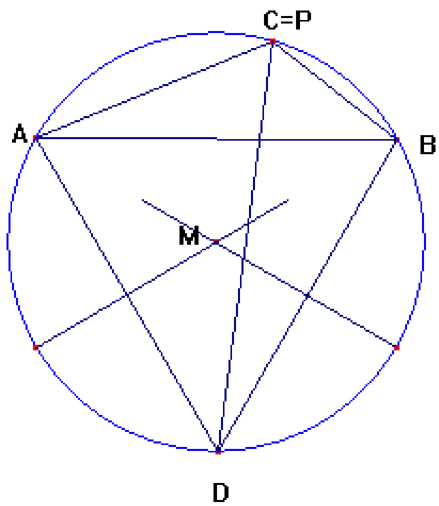
Uitwerkingen van de opgaven over Steinerbomen.

1 *

2 $AB = BC = \frac{1}{2}\sqrt{91}$ en $AC = 3\sqrt{3}$

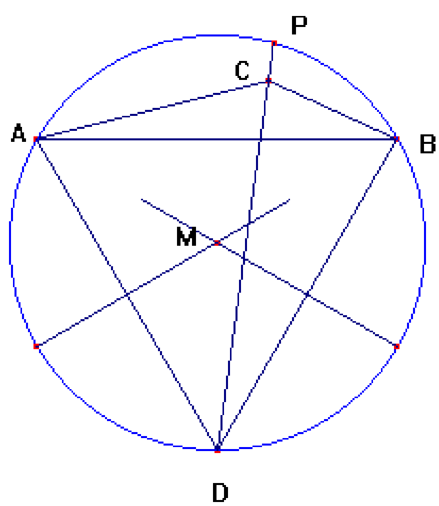
De lengte van de oorspronkelijke minimale-opspannende boom is $\sqrt{91}$.

3



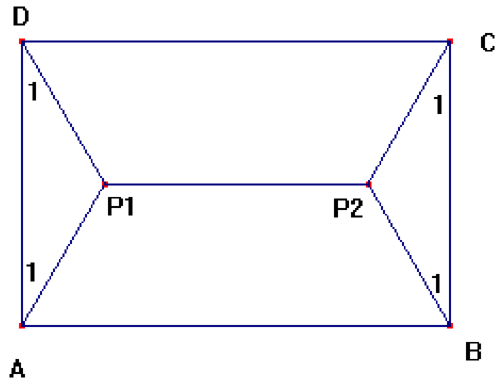
De lengte van de minimale-opspannende boom van driehoek ABC is gelijk aan AC + CB.
De lengte van de minimale-opspannende boom van de punten A, B, C en P is ook gelijk aan AC + CB(=PB)

4

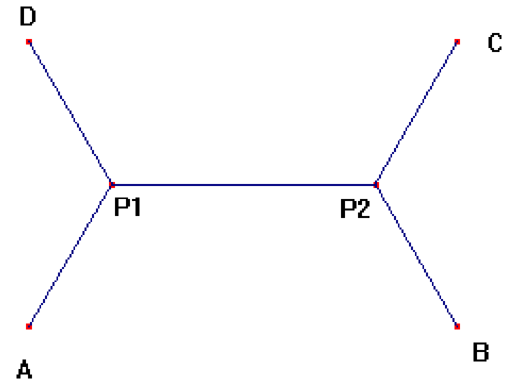


De lengte van de minimale-opspannende boom van driehoek ABC is gelijk aan AC + CB.
De lengte van de minimale-opspannende boom van de punten A, B, C en P is gelijk aan AC + CB + CP.

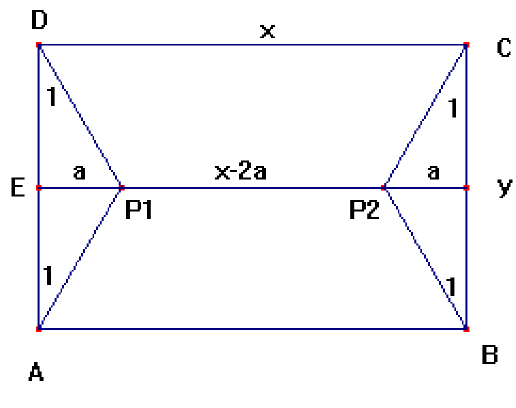
5 Zorg er voor dat $\angle A_1 = \angle B_1 = \angle C_1 = \angle D_1 = 30^0$



De lengte van de minimale-opspannende boom is
$4 \cdot \frac{4}{3}\sqrt{3} + 6 - 2 \cdot \frac{2}{3}\sqrt{3} = 4\sqrt{3} + 6$



6



E is het midden van zijde *DA*, dus
$DE = \frac{1}{2}y$

$\tan \angle D_1 = \dfrac{EP1}{DE}$

$EP1 = DE \cdot \tan \angle D_1$, dus

$a = \frac{1}{2}y \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{y}{2\sqrt{3}}$

7 Zie de figuur van opgave 6.

De lengte van de minimale-opspannende boom is gelijk aan $x+2y$.

$DP1^2 = (\frac{1}{2}y)^2 + (\frac{y}{2\sqrt{3}})^2 = \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{12}y^2 = \frac{1}{3}y^2$, dus $DP1 = \sqrt{\frac{1}{3}}y = \frac{1}{3}y\sqrt{3}$

De lengte van de Steinerboom is

$x - 2\cdot\frac{y}{2\sqrt{3}} + 4\cdot\frac{1}{3}y\sqrt{3} = x - \frac{1}{3}y\sqrt{3} + \frac{4}{3}y\sqrt{3} = x + y\sqrt{3}$

E Zie figuur.

$\angle M_2 = 180^0 - \angle A_2 - \angle B_2$ en $\angle A_2 = \angle B_2$, dus $\angle M_2 = 180 - 2\cdot\angle B_2$

$\angle M_3 = 180^0 - \angle C_1 - \angle B_1$ en $\angle C_1 = \angle B_1$, dus $\angle M_3 = 180 - 2\cdot\angle B_1$

Dus geldt:

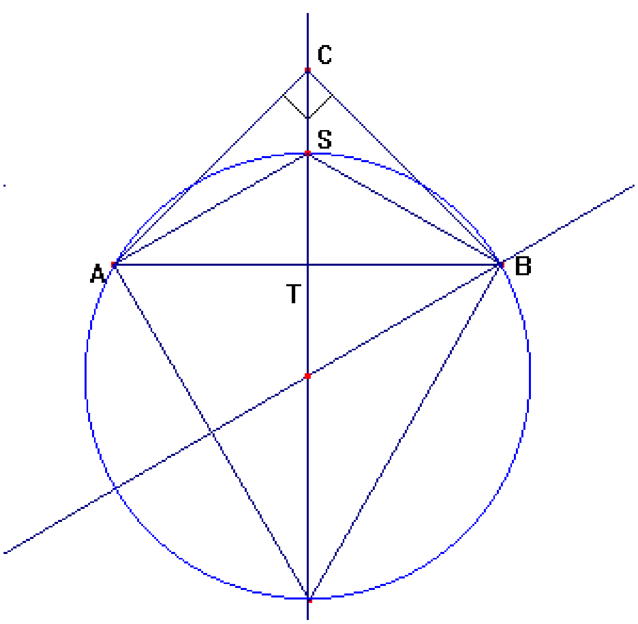
$\angle M_2 + \angle M_3 = 360^0 - 2\cdot\angle B_1 - 2\cdot\angle B_2 = 2\cdot(180^0 - \angle B_1 - \angle B_2) = 2\cdot(180^0 - \angle B_{1,2})$

We hebben al bewezen dat $\angle D_{1,2} = 180^0 - \angle B_{1,2}$

dus $\angle M_{2,3} = 2\cdot\angle D_{1,2}$

8

a



$AC = BC = 4$

$AB^2 = 16 + 16 = 32$, dus

$AB = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

$AT = BT = 2\sqrt{2}$

$\tan\angle AST = \frac{AT}{ST}$, dus

$ST = \frac{AT}{\tan 60^0} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{6} = 1,63299...$

$\sin\angle AST = \frac{AT}{AS}$, dus

$AS = \frac{AT}{\sin 60^0} = \frac{2\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3}\sqrt{6} = 3,26598...$

De lengte van de Steinerboom is gelijk aan

$2\cdot\frac{4}{3}\sqrt{6} + (2\sqrt{2} - \frac{2}{3}\sqrt{6}) = 2\sqrt{6} + 2\sqrt{2}(= 7,727...)$

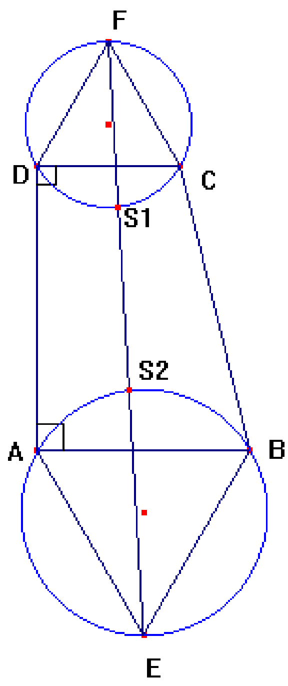
b

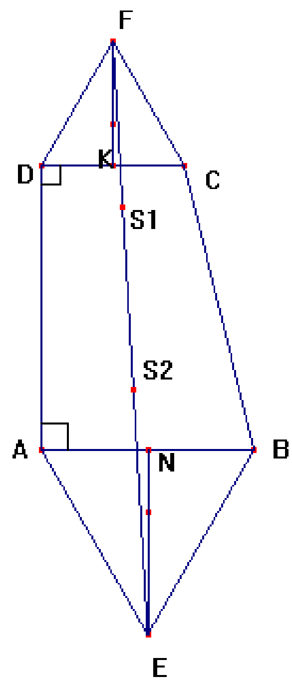
De lengte van de minimale-opspannende boom is gelijk 8.

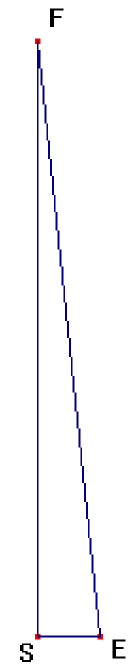
Dus $\dfrac{8-2\sqrt{6}-2\sqrt{2}}{8}\cdot 100\% \approx 3{,}4\%$ korter.

9 Al eerder is bewezen dat $AS_1+DS_1=GS_1$ en $BS_2+CS_2=ES_2$.
Dus $AS_1+BS_2+CS_2+DS_1+S_1S_2=GS_1+ES_2+S_1S_2=EG$
Verder geldt: $AD+AB+BC=AG+AB+BE$.
Aangezien $EG <$ $AG+AB+BE$ is dus de lengte van de Steinerboom korter dan de lengte van de minimale-opspannende boom.

10 (In de 1e figuur zijn de middelloodlijnen om de middelpunten van de cirkels te bepalen weggelaten)



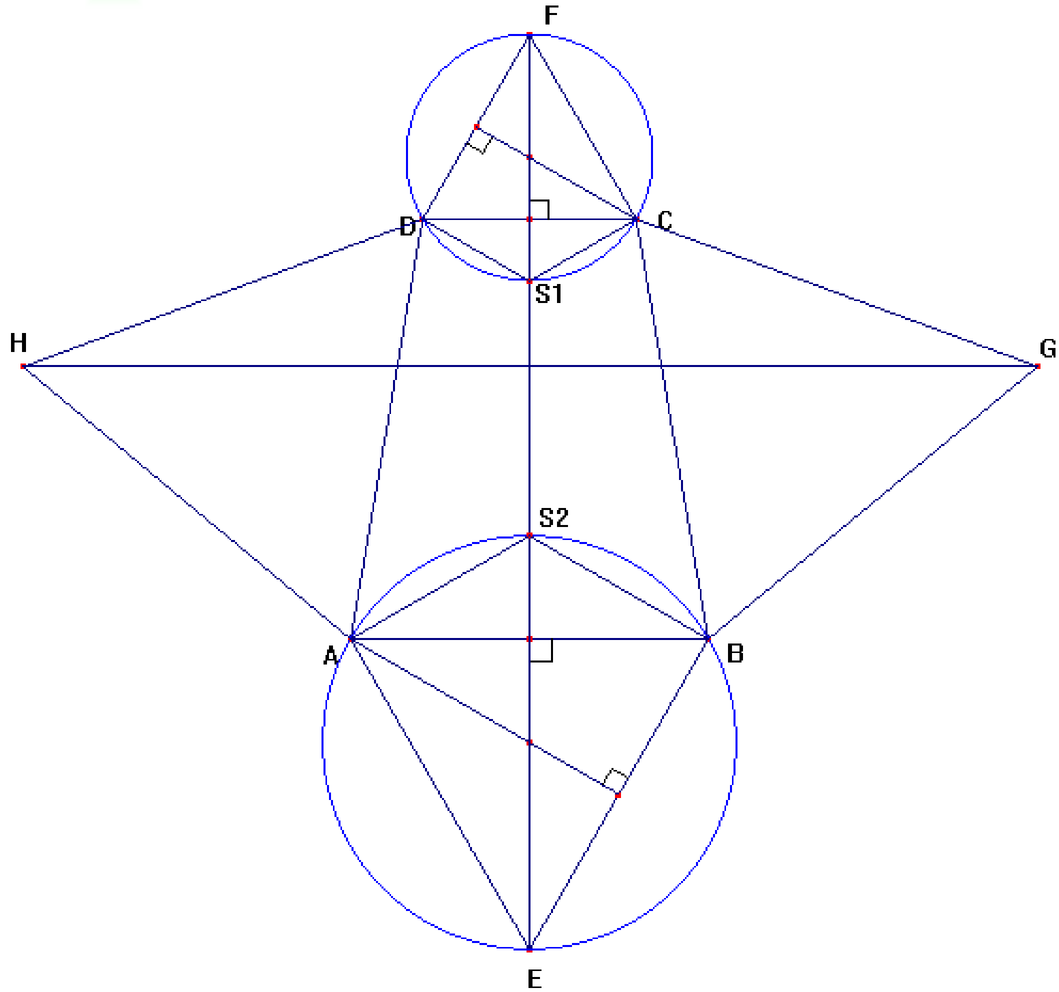




Eenvoudig is na te gaan dat geldt: $DK=1$, $KF=\sqrt{3}$, $AN=1{,}5$, $NE=1{,}5\sqrt{3}$
dus $SE=0{,}5$ en
$SF=4+2{,}5\sqrt{3}$.
Dus met behulp van de stelling van Pythagoras:
$FE^2=SE^2+SF^2=(0{,}5)^2+(4+2{,}5\sqrt{3})^2=0{,}25+16+20\sqrt{3}+18{,}75=35+20\sqrt{3}$
$FE=\sqrt{35+20\sqrt{3}}$

11

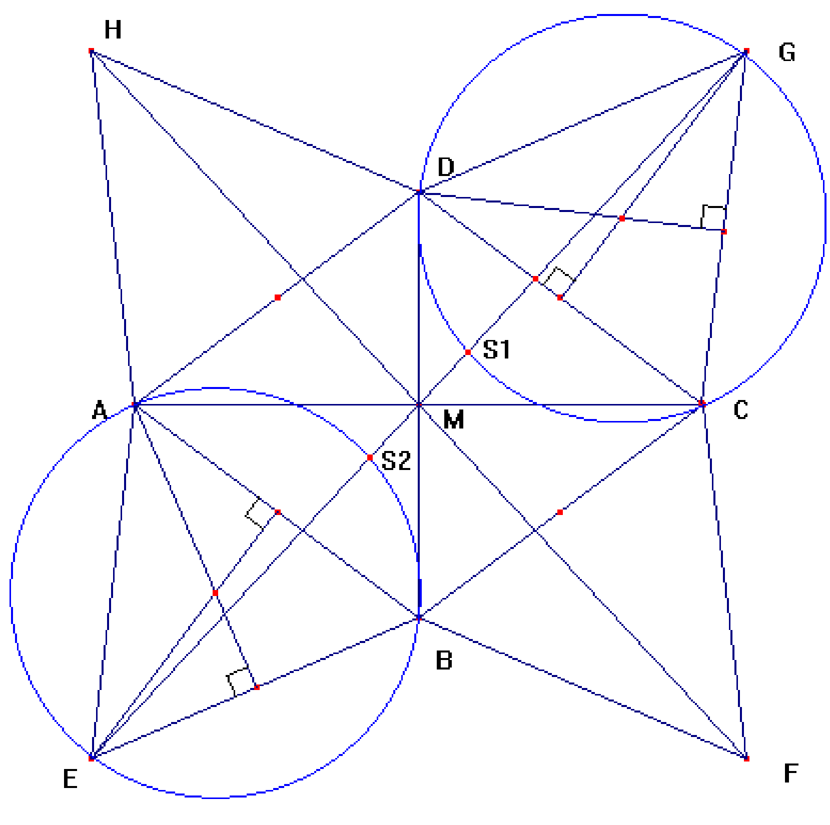
a



b De hoogte van het trapezium is gelijk aan $\sqrt{6^2 - 1^2} = \sqrt{35}$.
De hoogte van de bovenste gelijkzijdige driehoek *DCF* is gelijk aan $1{,}5\sqrt{3}$.
De hoogte van de onderste gelijkzijdige driehoek *ABE* is gelijk aan $2{,}5\sqrt{3}$.
De lengte van de Steinerboom, dus
$AS_2 + BS_2 + S_1S_2 + CS_1 + DS_1 = EF = \sqrt{35} + 4\sqrt{3}$
De lengte van de minimale-opspannende boom is gelijk aan 14.
$\sqrt{35} + 4\sqrt{3} \approx 12{,}8 < 14$

c Noem het snijpunt van S_1F en *DC* punt *K* en noem het snijpunt van S_2E en *AB* punt *L*.
$\angle DS_1C = 120^0$, dus $\angle S_1DC = \angle S_1CD = 30^0$ en ook geldt $\angle AS_2B = 120^0$, dus $\angle S_2AB = \angle S_2BA = 30^0$
$DK = KC = 1{,}5$, dus $S_1K = \dfrac{1{,}5}{\sqrt{3}} = 0{,}5\sqrt{3}$ en $AL = BL = 2{,}5$, dus
$S_2L = \dfrac{2{,}5}{\sqrt{3}} = \dfrac{5}{6}\sqrt{3}$
Dus $S_1S_2 = \sqrt{35} - 0{,}5\sqrt{3} - \dfrac{5}{6}\sqrt{3} = \sqrt{35} - \dfrac{4}{3}\sqrt{3}$

12



De lengte van lijnstuk *HF* is gelijk aan de lengte van lijnstuk *EG*.

$MD = MB$ (1)

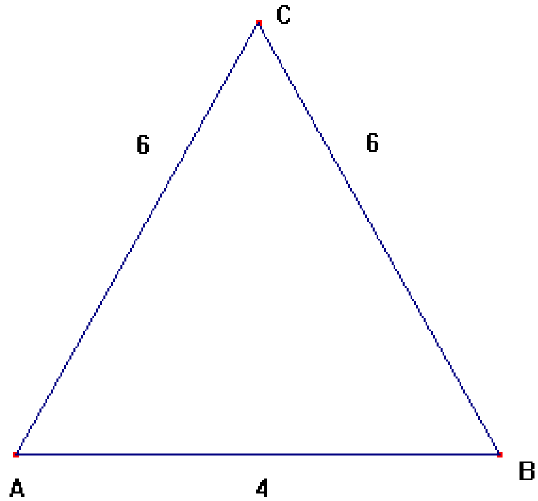
$DG = EB$ (2)

$$\left.\begin{array}{r} \angle MDC = \angle MBA \text{ (eigenschap ruit)} \\ \angle CDG = \angle ABE = 60^0 \end{array}\right\} \Rightarrow \angle MDG = \angle MBE \text{ (3)}$$

Uit (1), (2) en (3) volgt: $\Delta MDG \cong \Delta MBE$, dus $\angle DMG = \angle BME$
Aangezien de punten *D*, *M* en *B* op één lijn liggen, liggen dus ook de punten *E*, *M* en *G* op één lijn.

Toetsopgaven over Steinerbomen.

T1



a Gegeven is de gelijkbenige driehoek ABC.
Bereken de exacte uitkomst van de lengte
van de Steinerboom.

b Bereken hoeveel procent de lengte van de
Steinerboom korter is dan de lengte van
de minimale-opspannende boom.

T2

In een assenstelsel zijn gegeven de punten *A*(-1,-1), *B*(4,-1), *C*(4,3) en *D*(-1,3).
Bereken de coördinaten van de Steinerpunten. Geef exacte uitkomsten.

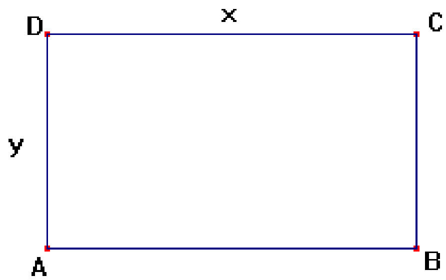
T3

In een assenstelsel is gegeven een gelijkzijdige driehoek *ABC*, met de punten $A(-1,-1)$ en $B(3,-1)$. Verder is gegeven dat de y-coördinaat van punt *C* groter is dan nul.
Bereken de coördinaten van punt *C* en van het Steinerpunt *S*. Geef de exacte uitkomsten.

T4

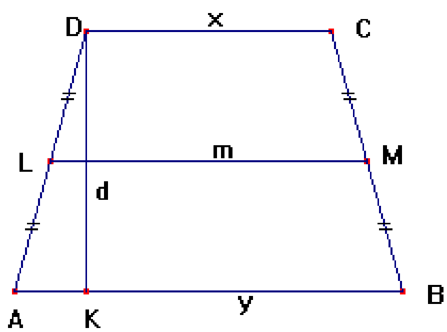
In de gelijkbenige driehoek *ABC* is $AC = BC = 2p$ en $AB = p$.
Gegeven is dat de lengte van de Steinerboom gelijk is aan 10.
Bereken de lengte van de minimale-opspannende boom van driehoek (graaf) *ABC*.

T5



Gegeven is de rechthoek *ABCD*.
De lengte van de minimale-opspannende boom is gelijk aan 12.
De lengte van de Steinerboom is gelijk aan $18-4\sqrt{3}$.
Bereken exact de waarden van x en y.

T6

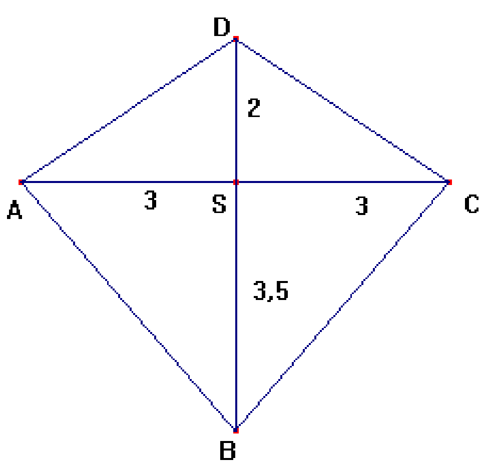


Gegeven is een gelijkbenig trapezium *ABCD*.
$AB=y$, $DC=x$, $LM=m$ en $DK=d$, waarbij $x<y<d$

- a Toon aan: $m=\frac{1}{2}(x+y)$
- b Toon aan: de lengte van de Steinerboom is gelijk aan $d+\sqrt{3}\cdot m$
- c Toon aan dat de afstand tussen de Steinerpunten gelijk is aan $d-\dfrac{m}{\sqrt{3}}$

T7

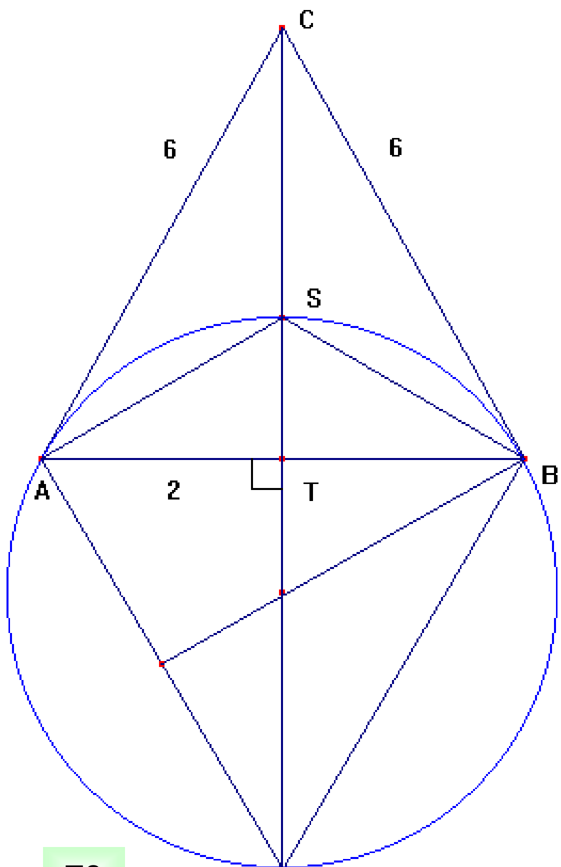
Gegeven is de vlieger *ABCD.*



- a Teken de Steinerpunten van deze vlieger.
- b Bereken de exacte lengte van de minimale- opspannende boom.
- c Meet de lengte van de Steinerboom.

Uitwerkingen van de toetsopgaven over Steinerbomen.

T1



a $CT=\sqrt{6^2-2^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

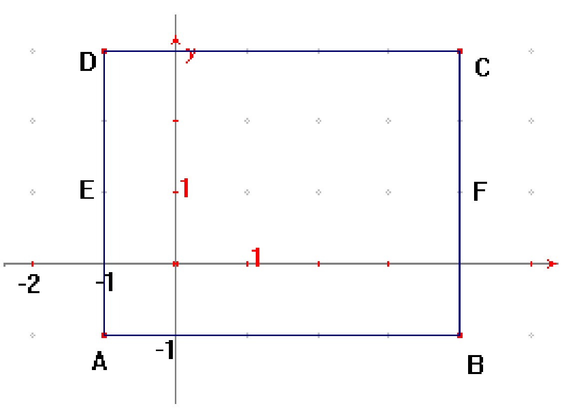
$ST=\dfrac{AT}{\tan 60^0}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\tfrac{2}{3}\sqrt{3}$

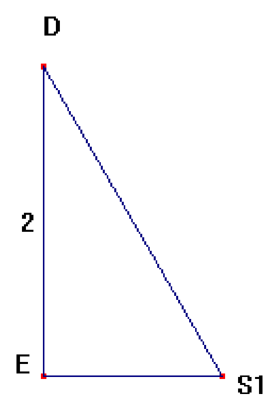
$AS=\dfrac{AT}{\sin 60^0}=\dfrac{2}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}=\tfrac{4}{3}\sqrt{3}$

De lengte van de Steinerboom is
$2\cdot\tfrac{4}{3}\sqrt{3}+4\sqrt{2}-\tfrac{2}{3}\sqrt{3}=2\sqrt{3}+4\sqrt{2}\approx 9{,}1209...$

b De lengte van de minimale-opspannende boom is 10.
Dus $\dfrac{10-2\sqrt{3}-4\sqrt{2}}{10}\cdot 100\%\approx 8{,}8\%$
korter.

T2

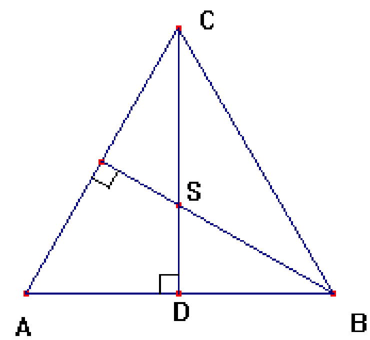




In ΔDES_1 geldt: $\angle E=90^0$ en $\angle D=30^0$, dus $ES_1=\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\tfrac{2}{3}\sqrt{3}$

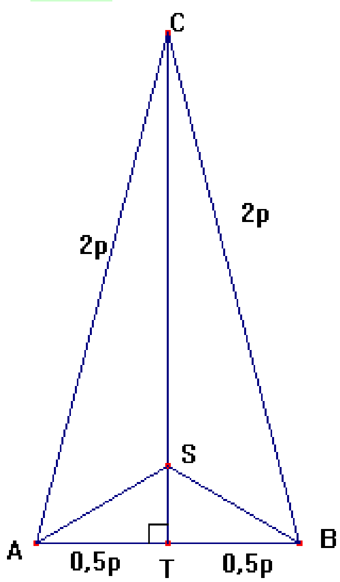
De coördinaten van het punt S_1 zijn $(-1+\frac{2}{3}\sqrt{3},1)$ en van het punt $S_2(4-\frac{2}{3}\sqrt{3},1)$

T3



In een gelijkzijdige driehoek is het Steiner-punt S
het snijpunt van de middelloodlijnen.
$AD = 2$, dus $D(1,-1)$ en $CD = 2\sqrt{3}$
Dus $C(1,-1+2\sqrt{3})$
Verder geldt: $DS = \frac{1}{3}CD = \frac{2}{3}\sqrt{3}$
Dus $S(1,-1+\frac{2}{3}\sqrt{3})$

T4



$ST = \dfrac{AT}{\sqrt{3}} = \dfrac{p}{2\sqrt{3}}$ en $AS = 2\cdot ST = \dfrac{p}{\sqrt{3}}$

$AC^2 = CT^2 + AT^2$

$4p^2 = CT^2 + \frac{1}{4}p^2$

$CT^2 = \frac{15}{4}p^2$

$CT = \frac{1}{2}p\sqrt{15}$

De lengte van de Steinerboom is

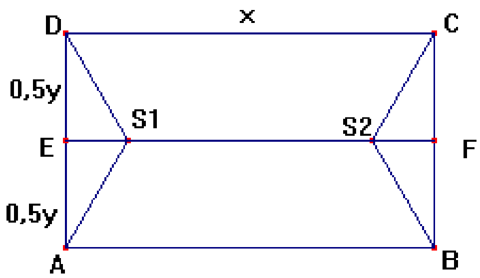
$$2\cdot\frac{p}{\sqrt{3}} + \tfrac{1}{2}p\sqrt{15} - \frac{p}{2\sqrt{3}} = \tfrac{1}{2}p\sqrt{15} + \frac{3p}{2\sqrt{3}} = \tfrac{1}{2}p\sqrt{15} + \tfrac{1}{2}p\sqrt{3}$$

Dus: $\frac{1}{2}p\sqrt{15} + \frac{1}{2}p\sqrt{3} = 10$

$$p = \frac{20}{\sqrt{3}+\sqrt{15}} (= 3{,}56822.....)$$

De lengte van de minimale-opspannende boom is gelijk aan $3p = \dfrac{60}{\sqrt{3}+\sqrt{15}} \approx 10{,}7$

T5



$$ES_1 = \frac{0,5y}{\sqrt{3}} = \frac{y}{2\sqrt{3}} = \frac{y\sqrt{3}}{6}$$

$$DS_1 = 2 \cdot ES_1 = \frac{y\sqrt{3}}{3}$$

Dus $x + 2y = 12$ en

$$4 \cdot \frac{y\sqrt{3}}{3} + x - 2 \cdot \frac{y\sqrt{3}}{6} = 18 - 4\sqrt{3}$$

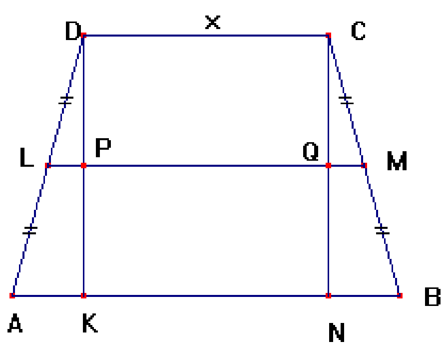
$$\begin{cases} x + 2y = 12 \\ x + y\sqrt{3} = 18 - 4\sqrt{3} \end{cases}$$

Dus $y(2-\sqrt{3}) = -6 + 4\sqrt{3}$ en $x + 2y = 12$

Dus $y = \dfrac{-6+4\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \dfrac{-6+4\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \cdot \dfrac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$

en $x = 12 - 4\sqrt{3}$

T6



Teken $CN \,//\, DK$. Nu geldt: $DC = PQ = KN = x$

Driehoek *DLP* is gelijkvormig met driehoek *DAK* (snavelfiguur)

$DL : DA = LP : AK = 1 : 2$

$AK = BN = \frac{1}{2}(y - x)$

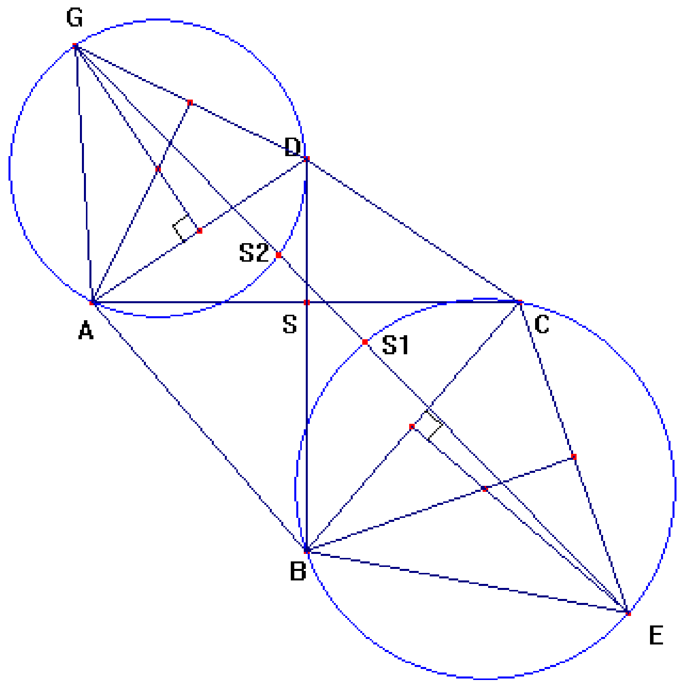
Dus geldt: $LP = QM = \frac{1}{4}(y - x)$

Uit het bovenstaande volgt nu:

$LM = m = 2 \cdot \frac{1}{4}(y - x) + x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x + x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}(x + y)$

T7

Opgave 7.



De lengte van de minimale-opspannende boom is gelijk aan
$2\sqrt{13}+\sqrt{21,25}$
De lengte van de Steinerboom is ongeveer gelijk aan 11,1