Technische Universiteit Delft

module 5

MINIMALE-KOSTEN-MAXIMALE-STROOM-PROBLEMEN

Dit studiemateriaal is ontwikkeld door de kerngroep wiskunde D Delft en mag gratis gebruikt worden in het wiskundeonderwijs in het vo.

Kerngroep wiskunde D Delft

Liesbeth Bos	Scala College	
Wim Caspers	TU Delft / Adelbert College	
Wim van Dijk	Montessori Lyceum	
David Lans	Emmaus College	
Jan Moen	Int. College Edith Stein	
Rob van Oord	Coenecoop College	
Sanne Schaap	Marecollege	
Jan Schrik	**Christelijk Lyceum Delft**	**Module 5**
Jeroen Spandaw	TU Delft	
Agnes Verweij	TU Delft	

website: www.wiskundedsteun.nl
contact: w.t.m.caspers@tudelft.nl

Geachte docent,

Ter inleiding op een of meer onderwerpen van Optimaliseren in netwerken kunt u op diverse wijzen gebruik maken van bovengenoemd materiaal.

U kunt de opdrachten voorleggen aan de leerlingen en de uitwerkingen of de antwoorden voor uzelf houden. U kunt er ook voor kiezen deze aan de leerlingen uit te delen.

In deze module gaat het om het vinden van een maximale stroom van een beginpunt naar een eindpunt waarbij de kosten minimaal moeten zijn. Bij iedere weg zijn twee gegevens nodig, namelijk de maximale capaciteit van de stroom en de kosten per eenheid. In paragraaf 3 wordt het algoritme uitgelegd om deze problemen op te lossen. In dit algoritme wordt steeds gebruik gemaakt van twee netwerken die bij iedere stap iets veranderen totdat de oplossing van het probleem is gevonden. Voor het gemak van u en van de leerlingen zijn zowel bij de opgaven als bij de toetsopgaven bijlagen gemaakt. In deze bijlagen zijn de standaardnetwerken weergegeven. De leerlingen moeten deze steeds weer aanpassen om zo uiteindelijk de oplossing te vinden.

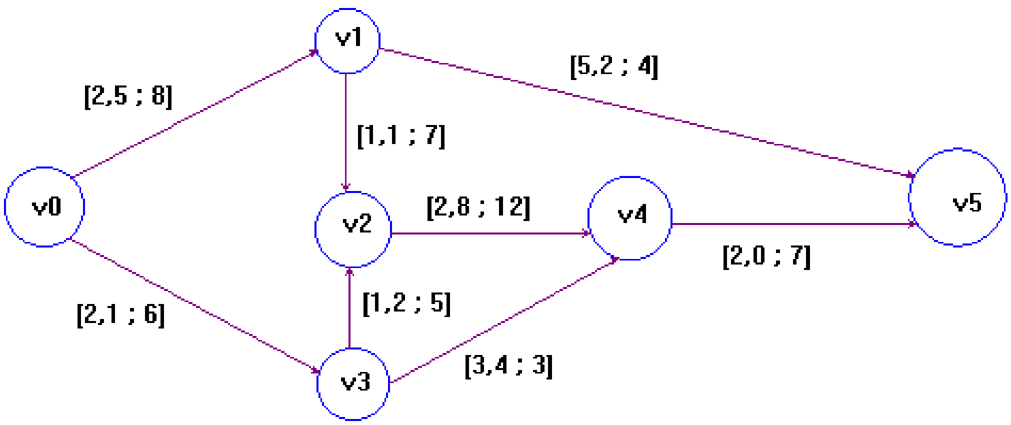
Na paragraaf 3 kunt u er voor kiezen een aantal opgaven te laten maken. In paragraaf 4 worden nog twee transportproblemen behandeld die met het algoritme kunnen worden opgelost.

Module 5

Maximale stroom met minimale kosten

§ 1. Een transportprobleem.

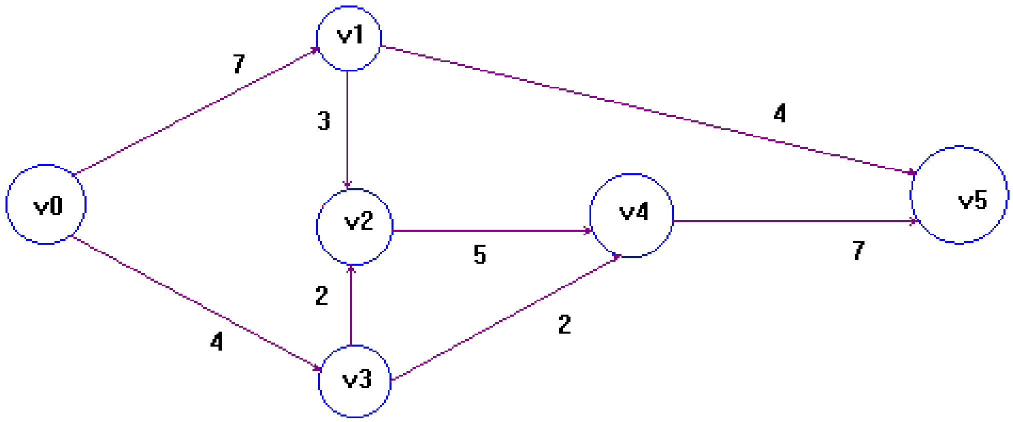
In plaats v5 staat een evenementenhal. Om naar deze hal te komen wordt er vanaf een centrale plaats v0 vervoer geregeld. Dit vervoer gaat via verschillende routes. In het netwerk (figuur 1) is door het eerste getal aangegeven hoe lang (in km) de verschillende wegen zijn. Het tweede getal geeft aan het maximale aantal busjes dat per half uur via deze wegen kan rijden.
De capaciteit van de wegen, dus het aantal busjes dat per half uur over de verschillende wegen kan rijden, is verschillend. Dit betekent dat niet elk busje een even lange route rijdt. Bij v5 kunnen maximaal 11 busjes per half uur aankomen.
We nemen aan dat er 11 busjes rijden van v0 naar v5.



figuur 1

De getallen in de figuur stellen dus voor: [afstand ; capaciteit]

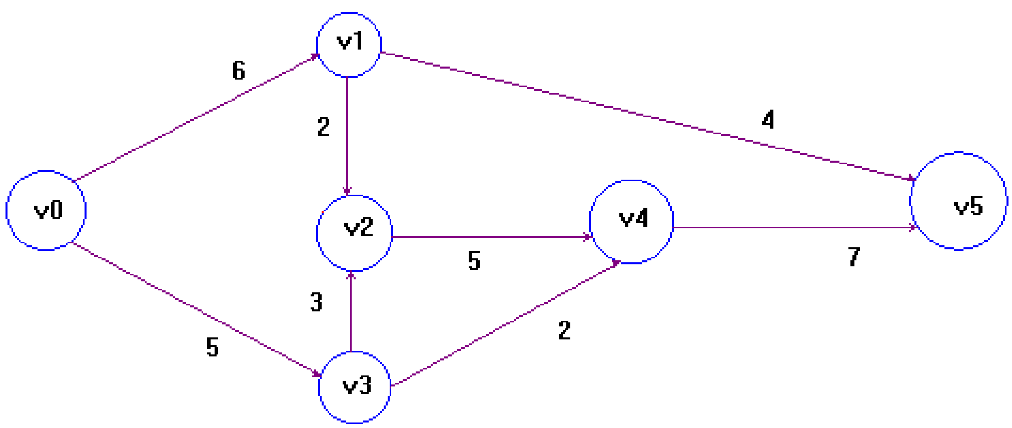
Het is direct in te zien dat met de beschikbare capaciteit van de wegen deze 11 busjes tussen v0 en v5 kunnen rijden. In figuur 2 is een mogelijke vervoersschema's weergegeven.



figuur 2

Het totaal aantal kilometers dat in een half uur wordt gereden is
$7\cdot 2{,}5+4\cdot 2{,}1+4\cdot 5{,}2+3\cdot 1{,}1+2\cdot 1{,}2+5\cdot 2{,}8+2\cdot 3{,}4+7\cdot 2{,}0=87{,}2$ km

Een ander mogelijk schema is in figuur 3 weergegeven.



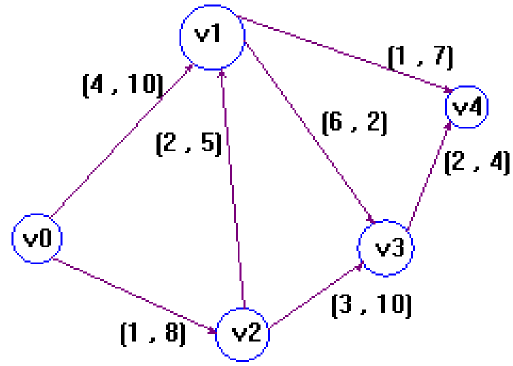
figuur 3

Ga na dat het totaal aantal kilometers dat door de 11 busjes nu wordt afgelegd gelijk is aan 86,9.

Opdracht:
Zoek uit met welk schema het totaal aantal afgelegde kilometers van de 11 busjes zo klein mogelijk (minimaal) is.

§ 2 Op weg naar een oplossingsschema

In de volgende paragraaf gaan we een schema bekijken waarmee we problemen zoals in **§** 1 kunnen oplossen. In het algemeen zijn deze problemen ingewikkelder dan het voorbeeld in de vorige paragraaf. We beperken ons bij de uitleg tot eenvoudige netwerken.

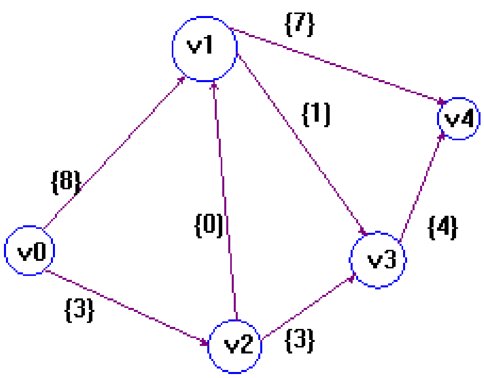


figuur 1

Gegeven is het volgende netwerk (zie figuur 1)
Bij iedere pijl staat een getallenpaar.
Het eerste getal van het getallenpaar geeft de **kosten** per eenheid van het te transporteren materiaal aan.
Deze kosten geven we aan met de letter $k_{i,j}$.
Het tweede getal geeft aan **hoeveel** er maximaal via deze pijl vervoerd kan worden.
Dit getal noemen we de capaciteit van de pijl en we geven deze aan met $c_{i,j}$. Van v0 naar v1 is $k_{0,1}$ gelijk aan 4 en $c_{0,1}$ is gelijk aan 10.

$$[k_{i,j}, c_{i,j}] = [\text{kosten van } v_i \text{ naar } v_j, \text{capaciteit van} v_i \text{ naar } v_j]$$

Een mogelijke stroom van v0 naar v4 is in het volgende netwerk weergegeven:



figuur 2

$$\{a_{i,j}\} = \{\text{ingezette capaciteit van } v_i \text{ naar } v_j\}$$

$$a_{i,j} \le c_{i,j}$$

Bij elke pijl is aangegeven hoeveel materiaal er door heen gaat. Dit schrijven we als $\{a_{i,j}\}$.

Door de pijl van v0 naar v1gaat een stroom van 8, terwijl er maximaal 10 door heen zou kunnen gaan. De totale kosten voor deze totale stroom bedragen :
$8 \cdot 4 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 6 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 7 \cdot 1 = 65$

In dit voorbeeld is de stroom al maximaal. Er worden 8 + 3=11 eenheden vanuit v0 vervoerd.
Er komen 7 + 4 = 11 eenheden aan in v4.

Opdracht.
Zoek een andere maximale stroom in dit netwerk waarbij de kosten lager zijn dan 65.

We zijn geïnteresseerd in een maximale stroom van v0 naar v4. Deze maximale stroom kan op verschillende manieren bereikt worden. De kosten zullen daarbij variëren.
We zoeken nu die **maximale** stroom waarbij de kosten **minimaal** zijn.
Dit probleem kan opgelost worden via een schema (in de wiskunde ook wel een algoritme genoemd) dat in **§** 3 wordt uitgelegd.

§ 3 Het algoritme

Een algoritme is een systematisch stelsel van stappen die in een bepaalde volgorde moeten worden uitgevoerd om een probleem op te lossen.
Als je het gedeelte dat hieronder staat doorleest zul je moeite hebben om dit te begrijpen.
Het is dan ook voor het begrijpen van deze theorie belangrijk om een voorbeeld te bekijken.
Op de volgende pagina's is een voorbeeld uitgewerkt.

Het algoritme Zie voor de betekenis van de gebruikte variabelen de toelichting verderop.

Stap 1.
$n = 0; k_0 = 0; s_0 = 0$

Stap 2.
Bepaal in een hulpgraaf G^* het kortste pad p_n van v_0 naar v_N, waarbij N het nummer is van het laatste punt en laat $l(p_n)$ de lengte (of het totaal van de kosten per getransporteerde eenheid) van p_n zijn.

Stap 3.
Als $l(p_n) = \infty$, dan geldt: s_n is een maximale stroom met minimale kosten k_n.

Stap 4.
Bereken de bij het kortste pad p_n behorende toegevoegde stroom t_n als volgt:
t_n is de minimale waarde van alle restcapaciteiten $r_{i,j} = c_{i,j} - a_{i,j}$ langs de pijlen van p_n.
De kosten van de toegevoegde stroom zijn dan gelijk aan $t_n \cdot l(p_n)$
Bereken nu k_{n+1} en s_{n+1}, voor alle pijlen langs p_n de nieuwe waarden van $a_{i,j}$ en $r_{i,j}$ en ten slotte de nieuwe waarde van n als volgt:
$k_{n+1} = k_n + t_n \cdot l(p_n)$
$s_{n+1} = s_n + t_n$
$a_{i,j}$ wordt $a_{i,j} + t_n$
$r_{i,j} = c_{i,j} - a_{i,j}$ (waarin nu de nieuwe waarde van $a_{i,j}$ is ingevuld)
n wordt $n+1$
Ga naar **stap 2**.

In dit algoritme is

- *n* het nummer van de iteratiestap
- t_n de toegevoegde stroom in de n^e stap.
- s_n de grootte van de totale stroom (van v_0 naar v_N) tot en met de n^e stap.
- k_n de totale kosten (van v_0 naar v_N) tot en met de n^e stap.
- $l(p_n)$ de totale kosten per getransporteerde eenheid van het n^e kortste pad p_n.
- $a_{i,j}$ de tot en met de n^e stap ingezette stroom van v_i naar v_j
- $r_{i,j}$ is de restcapaciteit na de n^e stap voor de pijl van v_i naar v_j
- $c_{i,j}$ is de maximale stroom die door de pijl van v_i naar v_j kan gaan.

We zetten nu bij elke pijl de stroom die er doorheen gaat {$a_{i,j}$ } en de restcapaciteit <$r_{i,j}$ >.
Uiteraard geldt in de beginsituatie bij elke pijl $a_{i,j} = 0$ en $r_{i,j} = c_{i,j}$. (zie figuur 2a in het uitgewerkte voorbeeld).

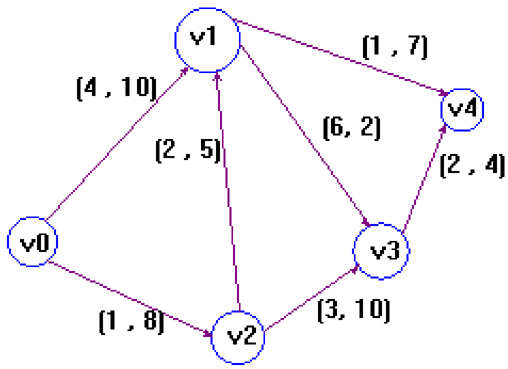
In de gerichte hulpgraaf G^* krijgen de pijlen een lengte die als volgt wordt gedefinieerd:

$$\text{De lengte van de pijl van } v_i \text{ naar } v_j = \begin{Bmatrix} k_{\mathrm{i,j}} & \text{als } \mathrm{a}_{i,j} < c_{i,j} \\ \infty & \text{als } \mathrm{a}_{i,j} = \mathrm{c}_{\mathrm{i,j}} \end{Bmatrix}$$ en

$$\text{De lengte van de pijl van } v_j \text{ naar } v_i = \begin{Bmatrix} -k_{i,j} & \text{als } \mathrm{a}_{i,j} > 0 \\ \infty & \text{als } \mathrm{a}_{i,j} = 0 \end{Bmatrix}$$

Een uitgewerkt voorbeeld

Bij het bepalen van de maximale stroom met minimale kosten maken we gebruik van **gerichte hulpnetwerken**.
Deze hulpnetwerken veranderen bij elke volgende stap een beetje.
We gaan dit verder uitleggen in het volgende voorbeeld.



$k_{i,j}, c_{i,j}] = [\text{kosten van } v_i \text{ naar } v_j, \text{capaciteit van} v_i \text{ naar } v_j]$

figuur1a

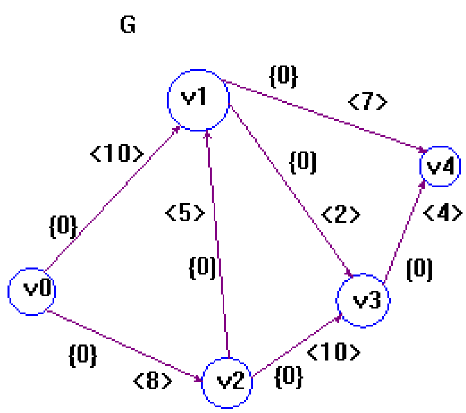
Figuur 2a beschrijft de beginsituatie (Stap 1 in het algoritme)

$< r_{i,j} >= < \text{restcapaciteit} >$

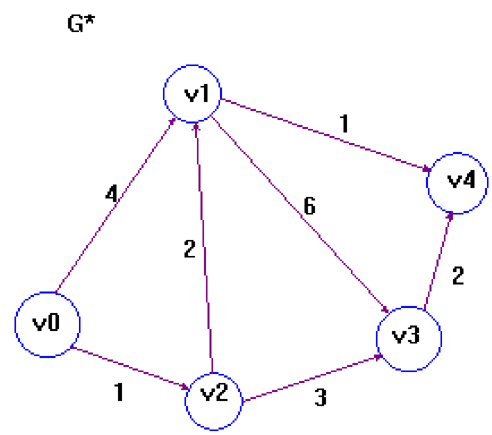
$\{a_{i,j}\} = \{0\} = \{\text{ingezette capaciteit}\}$

In figuur 2b staat bij elke pijl de kosten per eenheid van het te transporteren materiaal. We bepalen nu het kortst pad van v0 naar v4.

(Stap2 van het algoritme)



figuur2a



figuur 2b

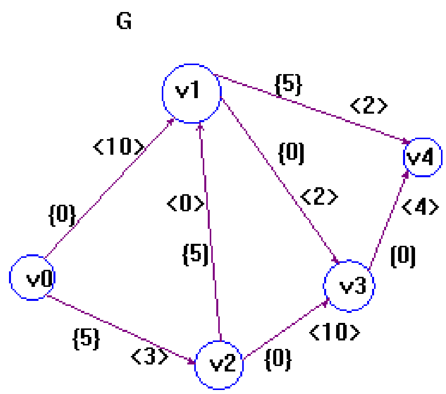
$n = 0, k_0 = 0, s_0 = 0$

Het kortste pad is v0,v2,v1,v4 en
$l(p_0) = 1 + 2 + 1 = 4$ en $t_0 = \min\{8,5,7\} = 5$
(Stap 4 van het algoritme)

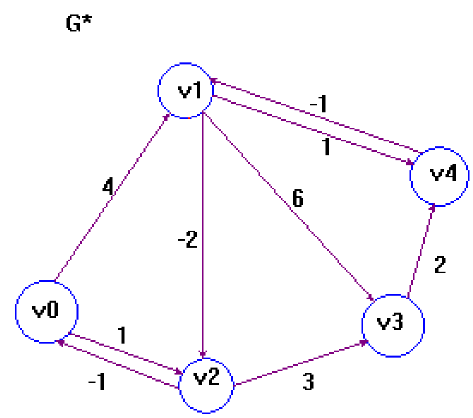
Figuur 3a geeft een overzicht van de ingezette capaciteiten $\{a_{i,j}\}$ en de resterende capaciteiten $< r_{i,j} >$

In figuur 3b staan bij elke pijl de kosten per eenheid van het te transporteren materiaal $k_{i,j}$. Langs de kortste weg voegen we aan elke pijl een extra pijl toe die tegengesteld gericht is aan de oorspronkelijke pijl en die een waarde krijgt die tegengesteld is $k_{i,j}$.

Als langs een pijl de maximale capaciteit bereikt is, wordt de waarde ∞ .
Zo'n pijl laten we weg. Dat geldt in dit geval voor de pijl van v2 naar v1.
(Stap 2 van het algoritme en de aanvulling)



figuur 3a



figuur 3b

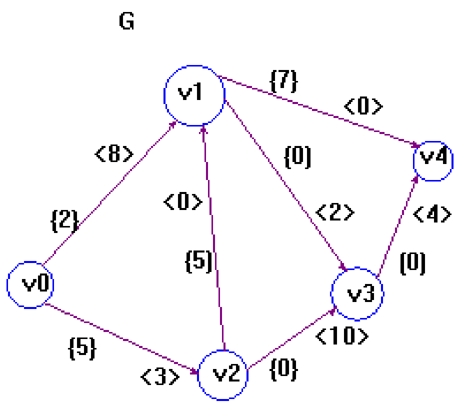
$n = 1, k_1 = 4 \cdot 5 = 20, s_1 = 5$

Het kortste pad is v0,v1,v4 en $l(p_1) = 4 + 1 = 5$ en $t_1 = \min\{10,2\} = 2$

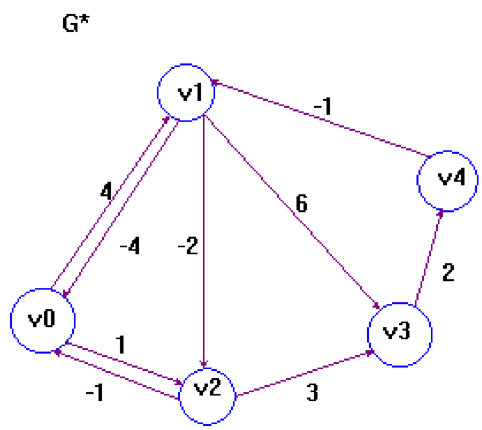
(Stap 4 van het algoritme)

Figuur 4a geeft een overzicht van de ingezette capaciteiten $\{a_{i,j}\}$ en de resterende capaciteiten $< r_{i,j} >$.

In figuur 4b staan bij elke pijl de kosten per eenheid van het te transporteren materiaal $k_{i,j}$.
Langs de kortste weg voegen we aan elke pijl een extra pijl toe die tegengesteld gericht is aan de oorspronkelijke pijl en die een waarde krijgt die tegengesteld is aan $k_{i,j}$. Als langs een pijl de maximale capaciteit bereikt is, wordt de waarde ∞ .
Zo'n pijl laten we weg. Dat geldt in dit geval voor de pijl van v1 naar v4.
(Stap 2 van het algoritme en de aanvulling)



figuur 4a



figuur 4b

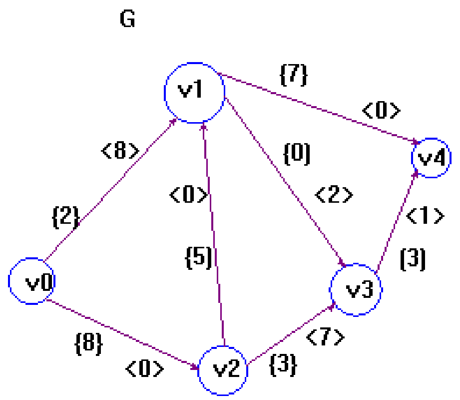
$n = 2, k_2 = 20 + 2 \cdot 5 = 30, s_2 = 5 + 2 = 7$

Het kortste pad is v0,v2,v3,v4 en $l(p_2) = 1 + 3 + 2 = 6$ en $t_2 = \min\{3,10,4\} = 3$
(Stap 4 van het algoritme)

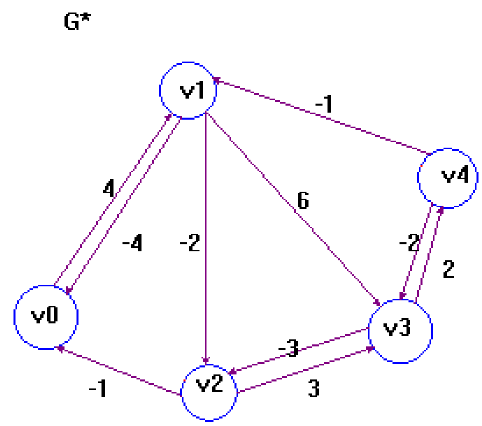
Figuur 5a geeft een overzicht van de ingezette capaciteiten $\{a_{i,j}\}$ en de resterende capaciteiten $< r_{i,j} >$.

In figuur 5b staan bij elke pijl de kosten per eenheid van het te transporteren materiaal $k_{i,j}$. Langs de kortste weg voegen we aan elke pijl een extra pijl toe die tegengesteld gericht is aan de oorspronkelijke pijl en die een waarde krijgt die tegengesteld is $k_{i,j}$.

Als langs een pijl de maximale capaciteit bereikt is, wordt de waarde ∞ .Zo'n pijl laten we weg. Dat geldt in dit geval voor de pijl van v0 naar v2. (Stap 2 van het algoritme en de aanvulling)



figuur 5a



figuur 5b

$n = 3, k_3 = 30 + 3 \cdot 6 = 48$

$s_3 = 7 + 3 = 10$

Het kortste pad is v0,v1,v2,v3,v4

$l(p_3) = 4 - 2 + 3 + 2 = 7$

$t_3 = \min\{8,5,7,1\} = 1$

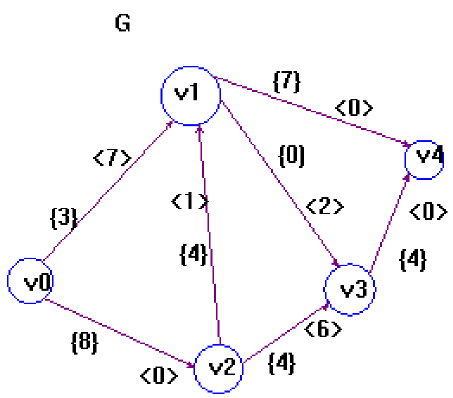
(Stap 4 van het algoritme)

Blijkbaar is de stroom van v2 naar v1 teveel geweest. Er gaat namelijk 1 eenheid terug van v1 naar v2, zodat de grootte van de stroom van v2 naar v1 nog maar 4 eenheden is. De kosten voor de stroom van v2 naar v1 verminderen daardoor natuurlijk met 2.

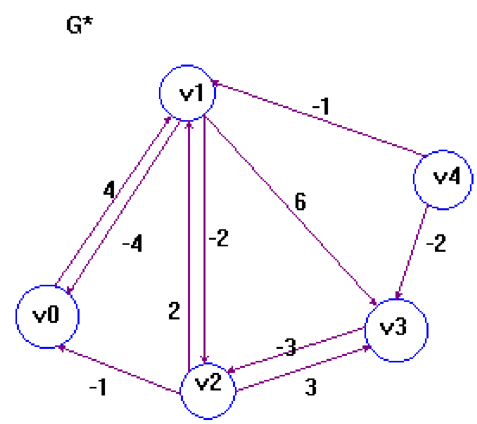
Figuur 6a geeft een overzicht van de ingezette capaciteiten $\{a_{i,j}\}$ en de resterende capaciteiten $<r_{i,j}>$.

In figuur 6b staat bij elke pijl de kosten per eenheid van het te Transporteren materiaal $k_{i,j}$.

Langs de kortste weg voegen we aan elke pijl een extra pijl toe die tegengesteld gericht is aan de oorspronkelijke pijl en die een waarde krijgt die tegengesteld is $k_{i,j}$. Als langs een pijl de maximale capaciteit is, wordt de waarde ∞ . Zo'n pijl laten we weg. Dat geldt in dit geval pijl van v3 naar v4, maar niet meer voor de pijl van v2 naar v1.
(Stap 2 van het algoritme en de aanvulling)



figuur 6a



figuur 6b

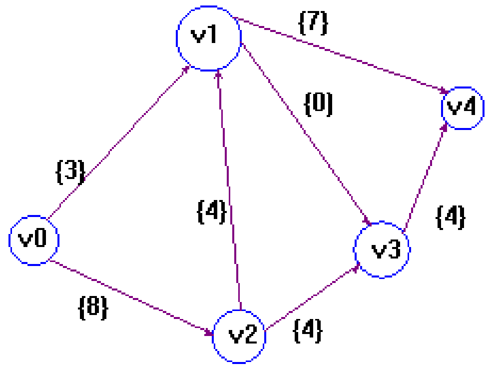
$n = 4, k_5 = 48 + 1 \cdot (4 - 2 + 3 + 2) = 55$

of $k_5 = 48 + 1 \cdot 7 = 55$

$s_4 = 10 + 1 = 11$

Er is geen eindig kortste pad meer van v0 naar v4, omdat er geen pijl meer binnenkomt bij v4.
(Stap 3 van het algoritme)

De maximale stroom met minimale kosten is nu gevonden.
De minimale kosten zijn 55.
Op de volgende pagina is nog een keer het transportschema weergegeven dat ook al in figuur 6a is te zien.



figuur 7a

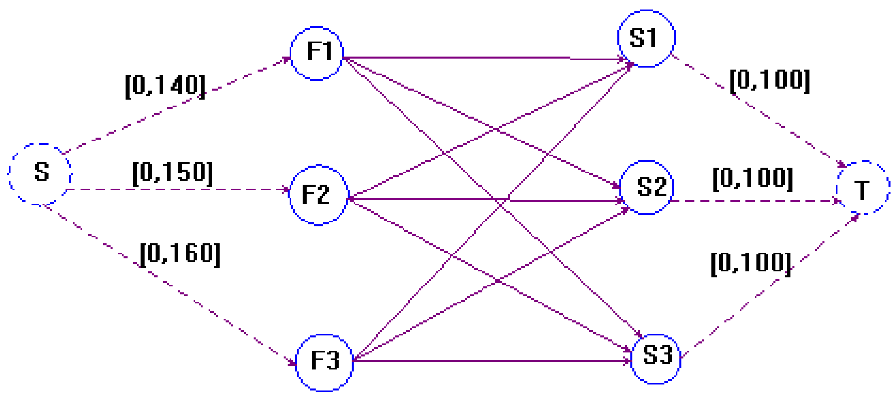
§ 4.

Een transportprobleem.

Fabriek F1 kan in een bepaalde tijdsperiode 140 ton staal produceren. De fabrieken F2 en F3 produceren in dezelfde tijdsperiode respectievelijk 150 ton en 160 ton staal. Vanuit elk van de drie plaatsen S1, S2 en S3 is er vraag naar staal van 100 ton.
In de volgende tabel staan de kosten (in kosteneenheden) per ton.

	S1	S2	S3
F1	60	40	28
F2	50	30	31
F3	43	20	21

Hoewel er drie begin- en ook drie eindpunten zijn, kunnen we dit probleem met het algoritme van § 3 oplossen. Daartoe voegen we twee extra punten S en T toe. Verder worden er paden toegevoegd aan het netwerk. De kosten via deze paden stellen we gelijk aan nul. In figuur 7 is het totale netwerk weergegeven



figuur 7

Opdracht:
We passen het algoritme van § 3 toe.
Ga nu na dat de volgende stromen ontstaan.

- Van F3 naar S2 een stroom van 100. De kosten zijn 2000 eenheden.
- Van F3 naar S3 een stroom van 60. De kosten zijn 1260 eenheden.
- Van F1 naar S3 een stroom van 40. De kosten zijn 1120 eenheden.
- Van F2 naar S1 een stroom van 100. De kosten zijn 5000 eenheden.

De totale kosten bedragen 9380 eenheden.

Nog een transportprobleem.

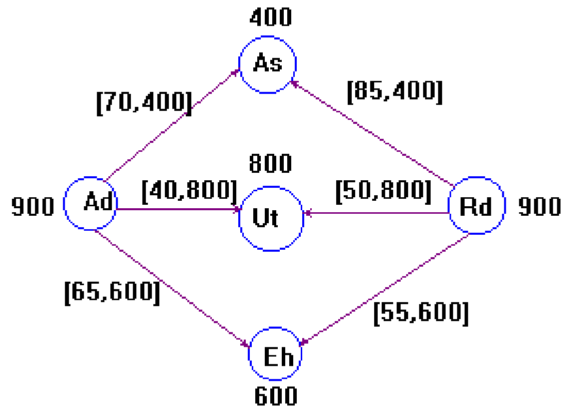
Zowel in de haven van Rotterdam als in de haven van Amsterdam worden 900 machines aangevoerd die vervolgens verder getransporteerd worden naar Assen, Utrecht en Eindhoven.
In onderstaande tabel is aangegeven hoe hoog de transportkosten per machine zijn vanuit Rotterdam en Amsterdam naar de andere plaatsen.
Verder is af te lezen hoeveel machines naar Assen, Utrecht en Eindhoven vervoerd moeten worden.

Naar / Van	Transportkosten			Aanvoer
	Assen	Utrecht	Eindhoven	
Amsterdam	€ 70	€ 40	€ 65	900 machines
Rotterdam	€ 85	€ 50	€ 55	900 machines
Gevraagd	400 machines	800 machines	600 machines	

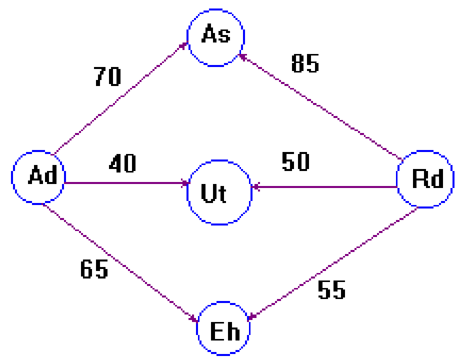
De vraag is nu om de minimale transportkosten te vinden als het maximale aantal van 1800 machines getransporteerd wordt.

De oplossing van het transportprobleem.

We tekenen weer een netwerk met daarin de gegevens uit de tabel (zie figuur 1 op de volgende pagina).
In figuur 2 zijn alleen de transportkosten per machine vermeld.
We zouden zoals in het vorige voorbeeld is gedaan, ook hier extra punten kunnen toevoegen.
Door de knooppunten van het netwerk op een handige plaats te tekenen, ontstaan overzichtelijke tekeningen. We passen het algoritme weer toe om het probleem op te lossen.
Bij Rd en Ad staat steeds het aantal nog te transporteren aantal machines.
Bij de andere plaatsen is aangegeven hoeveel machines er op dat moment al beschikbaar zouden kunnen zijn.

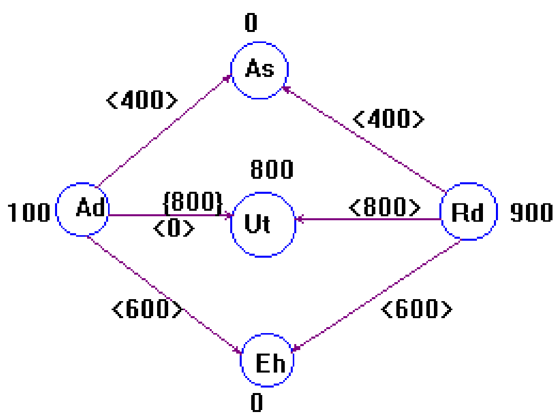


figuur 1

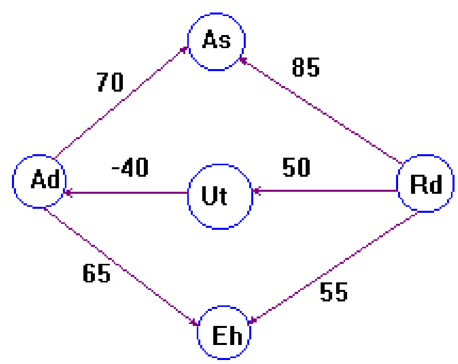


figuur 2

De minimale transportkosten zijn 40 van Ad naar Ut. Er kunnen 800 machines getransporteerd worden.
In figuur 2a staat dit transport aangegeven.

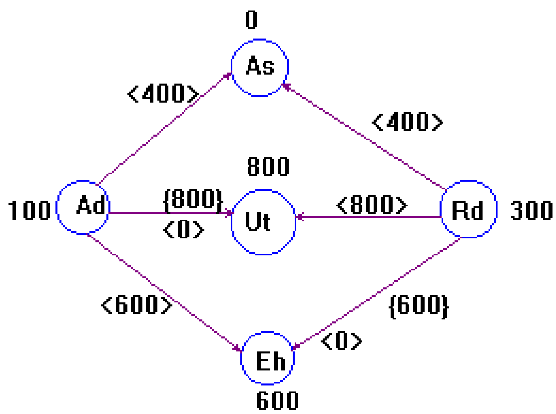


figuur 2a

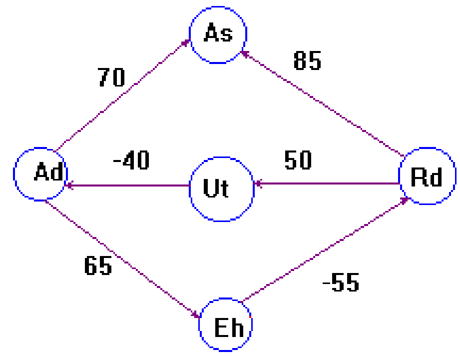


figuur 3

In figuur 3 is nu af te lezen dat de minimale kosten 55 zijn van Rd naar Eh. Er kunnen 600 machines vervoerd worden. In figuur 3a is het voorlopige transport weergegeven.

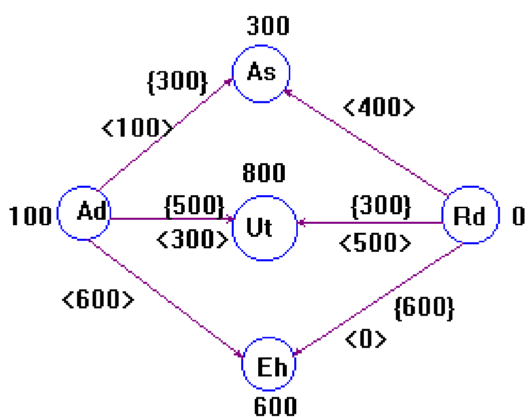


figuur 3a

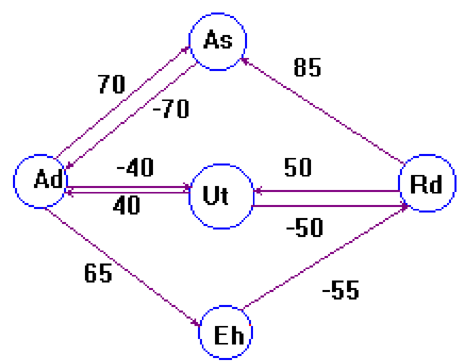


figuur 4

In figuur 4 is nu af te lezen dat de minimale transportkosten 50 – 40 + 70 = 80 zijn van Rd via Ut en Ad naar As.
Er kunnen 300 machines worden vervoerd.
In figuur 4a is het voorlopige transport weergegeven.

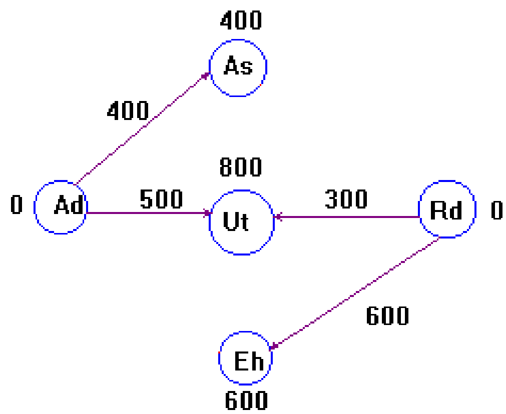


figuur 4a



figuur 5

In figuur 5 is nu af te lezen dat de minimale transportkosten 70 zijn van Ad naar As.
Er kunnen nog 100 machines worden vervoerd.
In figuur 5a is het transport weergegeven.

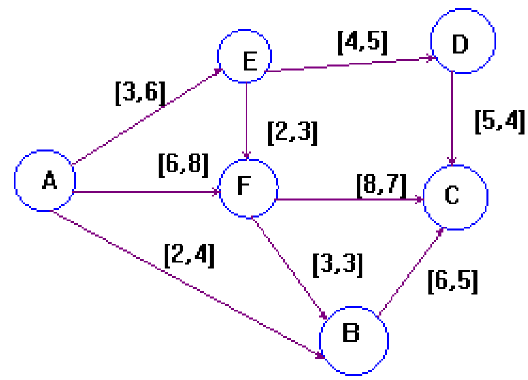


figuur 5a

Opdracht:
Ga na dat er geen transport meer mogelijk is en dat de totale kosten 96000 euro zijn

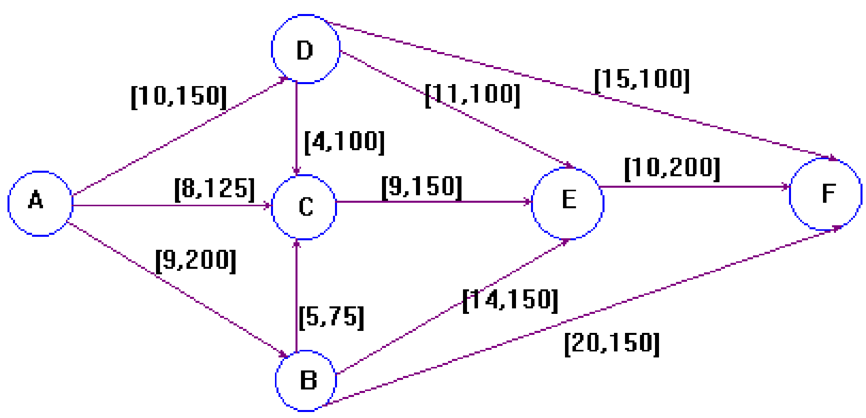
§ 5
Opgaven minimale-kosten-maximale-stroom-problemen.

1 Gegeven is een netwerk. Het eerste getal bij de pijlen stellen de kosten per eenheid voor. Het tweede getal is de hoeveelheid die via de betreffende weg vervoerd kan worden.
Bepaal in nevenstaand netwerk de minimale kosten bij een maximale stroom van A naar C.



2 Los het probleem uit het voorbeeld van § 1 op.

3 Een wielerclub organiseert een toertocht. De deelnemers kunnen kiezen uit verschillende routes. De organisatie wil op de verschillende wegen een maximaal aantal fietsers toestaan.
Het eerste gedeelte van de tocht gaan van punt A naar punt F.
In onderstaande tekening is het eerste getal de lengte van de betreffende weg. Het tweede getal stelt voor het maximaal aantal fietsers dat van de betreffende weg gebruik kan maken.



figuur 1

a) Bereken nu het minimaal aantal afgelegde kilometers bij een maximaal aantal fietsers.
b) Bereken ook deze minimale afstand.
c) Is er meer dan 1 oplossing mogelijk?

4 Bekijk nog eens het transportprobleem uit § 4.
We veranderen nu twee getallen in de kostentabel. De nieuwe tabel staat hieronder.

	S1	S2	S3
F1	55	40	28
F2	50	30	31
F3	43	20	20

Er zijn nu twee maximale stromen mogelijk als je het algoritme toepast. Onderzoek of in beide gevallen de minimale kosten ook hetzelfde zijn.

5 **Onderdeel A.**
Als onderdeel van een tijdelijke omleiding moet snelverkeer door een stad geleid worden.
Het totaal aantal auto’s per dag is 2200. Er is een verzameling van mogelijke routes door de stad voorgesteld. De straten van het wegennetwerk en de bijbehorende capaciteiten zijn weergegeven in de tabel waarbij E het punt is waar de auto’s de stad binnenkomen. De punten J1, J2, J3, J4 en J5 zijn de kruisingen van het wegennetwerk en L staat voor het punt waar de auto’s de stad weer verlaten. De stroomcapaciteiten zijn gegeven in eenheden van 100 auto’s per uur. Is het mogelijk om 2200 auto’s per uur op te vangen met dit wegennetwerk? In de tabel betekent een streepje dat er geen weg tussen deze twee kruisingen gebruikt mag worden.

Van/ naar	E	J1	J2	J3	J4	J5	L
E	-	7	9	8	-	-	-
J1	-	-	-	-	7	-	-
J2	-	-	-	-	3	7	-
J3	-	-	-	-	-	8	-
J4	-	-	-	-	-	5	10
J5	-	-	-	-	-	-	12

Onderdeel B.
Vanwege de overlast is het belangrijk dat de auto's zo snel mogelijk de stad weer verlaten, dus dat de totale reistijd van alle 2200 auto's minimaal is.
In onderstaande tabel is het eerste getal de gemiddelde reistijd per auto (in minuten) en het tweede getal is de capaciteit in honderden auto's van het betreffende weggedeelte.
Bereken het minimale aantal minuten dat door de 2200 auto's in de stad wordt afgelegd.

Van/ naar	E	J1	J2	J3	J4	J5	L
E	-	(10,7)	(9,9)	(9,8)	-	-	-
J1	-	-	-	-	(8,7)	-	-
J2	-	-	-	-	(10,3)	(6,7)	-
J3	-	-	-	-	-	(7,8)	-
J4	-	-	-	-	-	(4,5)	(8,10)
J5	-	-	-	-	-	-	(9,12)

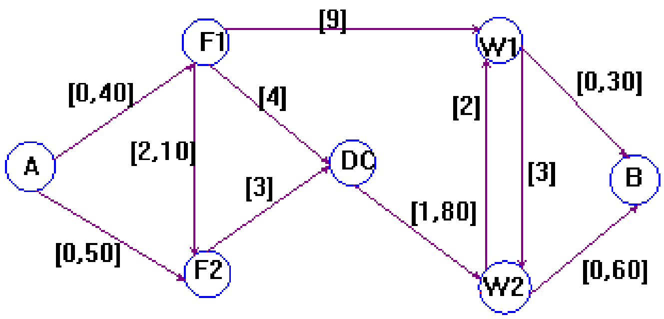
Onderdeel C.
Bereken het aantal minuten van de in onderdeel A gekozen oplossing.

6 A company has two plants producing forklift trucks that then are shipped to three distribution centers. The production costs are the same at the two plants, and the cost of shipping for each truck is shown for each combination of plant and distribution center.

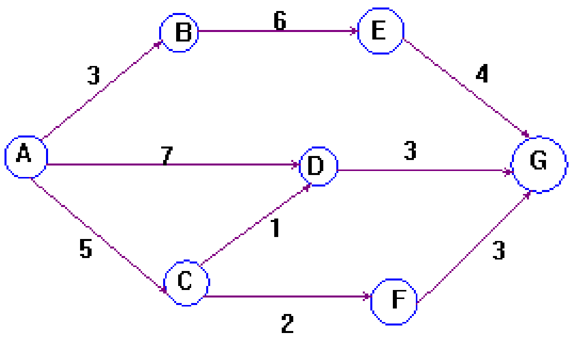
		Distibution Center		
		1	2	3
Plant	A	€ 800	€ 700	€ 400
	B	€ 600	€ 800	€ 500

A total of 60 forklift trucks are produced and shipped per week. Each plant can produce and ship any amount up to a maximum of 50 trucks per week, so there is considerable flexibility on how to divide the total production between the two plants so as to reduce shipping costs. However, each distribution center must receive exactly (20) trucks per week.
Management's objective is to determine how many forklift trucks should be produced at each plant, and then what the overall shipping pattern should be to minimize total shipping cost.

7 Vanuit 2 fabrieken F1 en F2 moeten goederen getransporteerd worden naar 2 warenhuizen W1 en W2. DC is een distributiecentrum. In de graaf is het eerste getal bij de pijl de maximale hoeveelheid die getransporteerd kan worden. Het tweede getal zijn de kosten per te transporteren eenheid in veelvouden van honderd euro. Staat er bij een pijl maar één getal, dan is er geen grens aan de te transporteren hoeveelheid en stelt dit getal dus voor de kosten in veelvouden van 100 euro per getransporteerde eenheid. Er kunnen ook goederen getransporteerd worden van W1naar W2 en van W2 naar W1. Om aan te geven hoeveel goederen getransporteerd moeten worden is een extra knooppunt A in de graaf aangegeven met kosten 0 bij de pijlen van A naar F1 en F2. De gevraagde hoeveelheden in de warenhuizen W1 en W2 zijn respectievelijk 30 en 60 eenheden. In de graaf is een extra knooppunt B getekend met kosten 0 bij de pijlen van W1 en W2 naar B. Bereken de minimale transportkosten en schrijf op hoe het vervoer zal plaatsvinden.

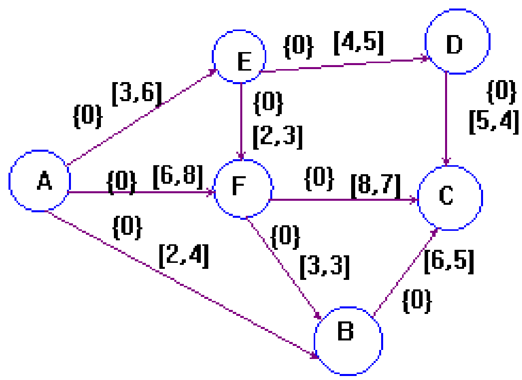


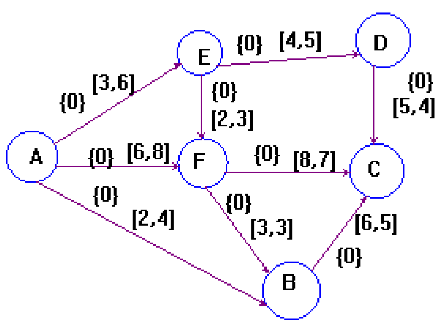
8 Beschouw het netwerk hiernaast. Bij de pijlen staan de transportkosten per eenheid vermeld. Tussen twee plaatsen kunnen maximaal twee eenheden vervoerd worden. Bepaal de minimale kostenstroom bij het vervoeren van 5 eenheden van punt A naar punt G.



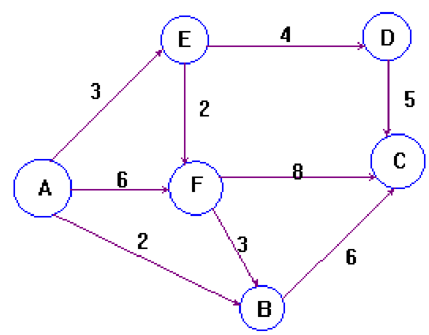
Uitwerkingen van de opgaven over Minimale-kosten- Maximale-stroom-problemen

1





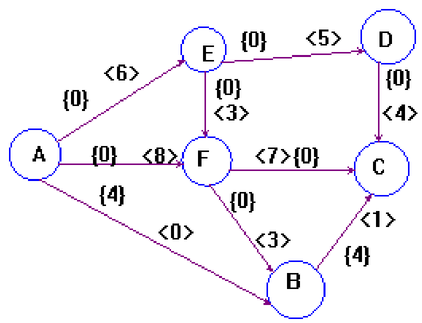
figuur 2a



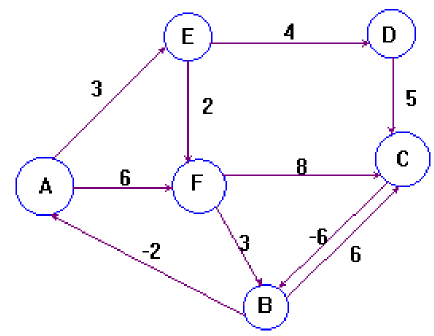
figuur 2b

De minimale kosten zijn 8 via ABC. Stroom van 4 is mogelijk. Kosten zijn 32

Vervolg opgave 1

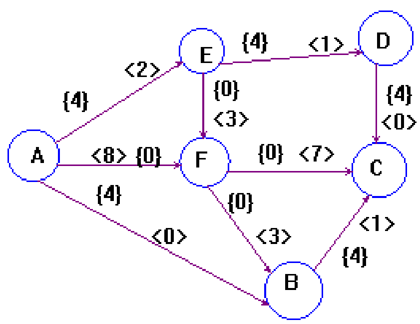


figuur 3a

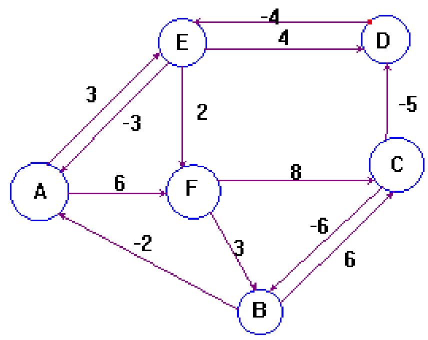


figuur 3b

De minimale kosten zijn 3+4+5=12 via AEDC. Stroom van 4 is mogelijk. Kosten zijn 48.
Totale kosten zijn nu al 80



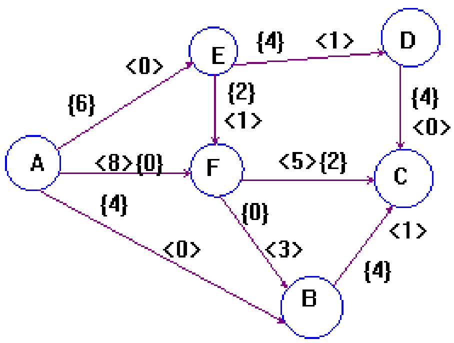
figuur 4a



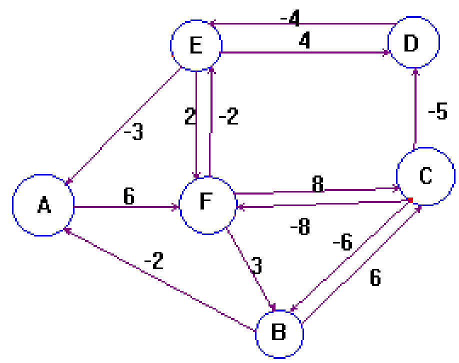
figuur 4b

De minimale kosten zijn 3+2+8=13 via AEFC. Er is nog een stroom van 2 mogelijk. Kosten zijn 26. Totale kosten nu 106.

Vervolg opgave 1

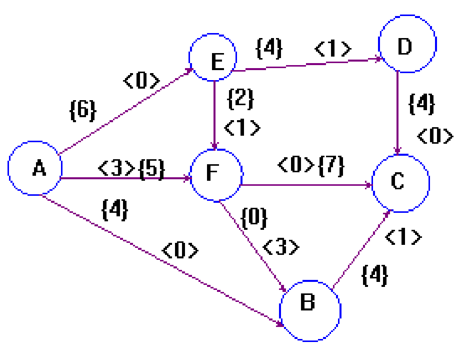


figuur 5a

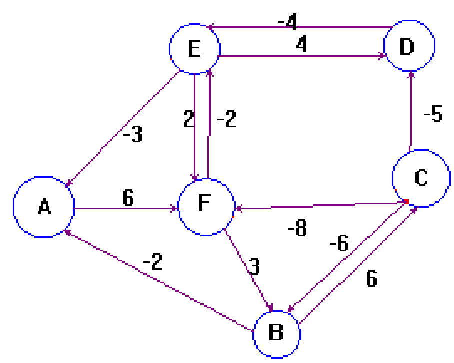


figuur 5b

De minimale kosten zijn 6+8=14 via AFC. Er is een stroom van 5 mogelijk. Kosten 70.
Totale kosten zijn nu 176



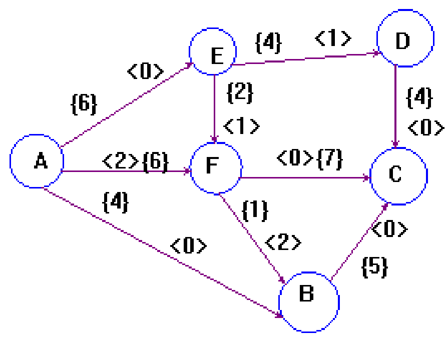
figuur 6a



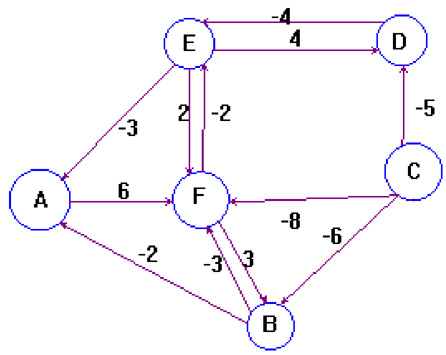
figuur 6b

De minimale kosten zijn 6+3+6=15 via AFBC. Er is nog een stroom van 1 mogelijk. Kosten 15.
Totale kosten zijn 191.

Vervolg opgave 1



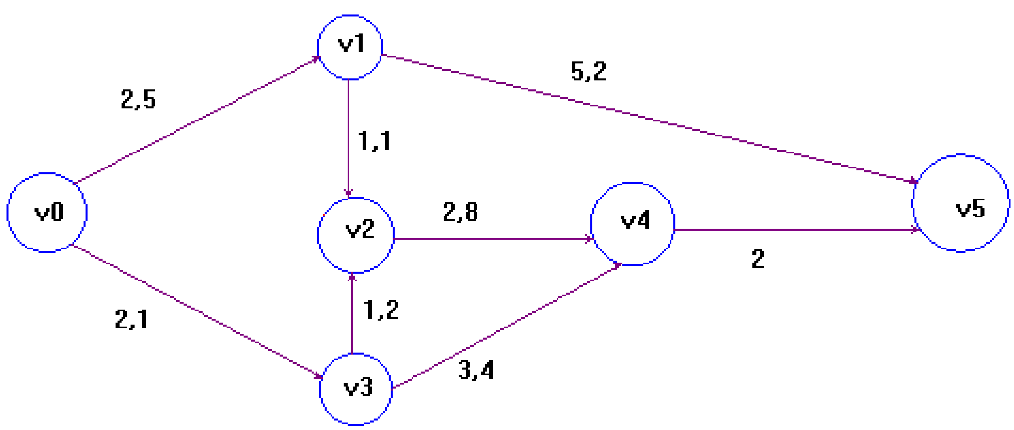
figuur 7a



figuur 7b

Er is nu geen stroom in figuur 7b mogelijk.
Dus de maximale stroom met minimale kosten is nu bepaald.

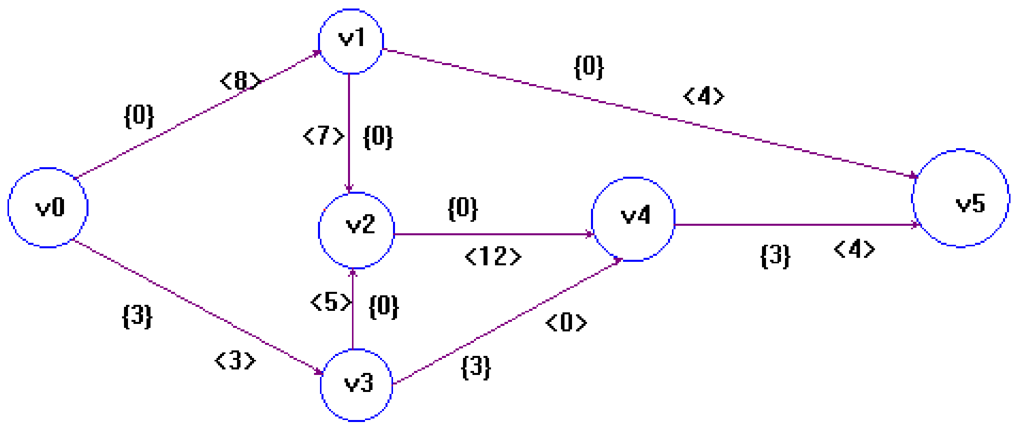
2

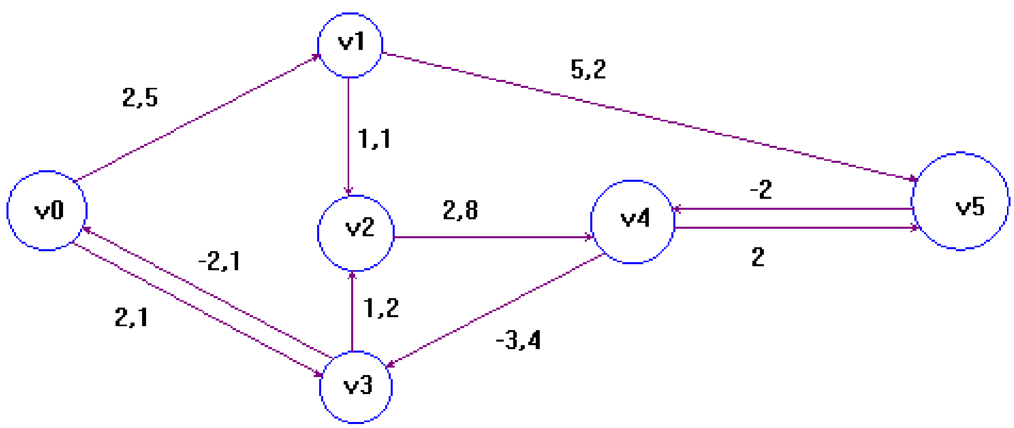


figuur 1

De kortste route is v0, v3, v4, v5 en heeft een lengte van 7,5. Er is een stroom van 3 mogelijk.
Het totaal aantal kilometers is 3x7,5=22,5

Vervolg opgave 2

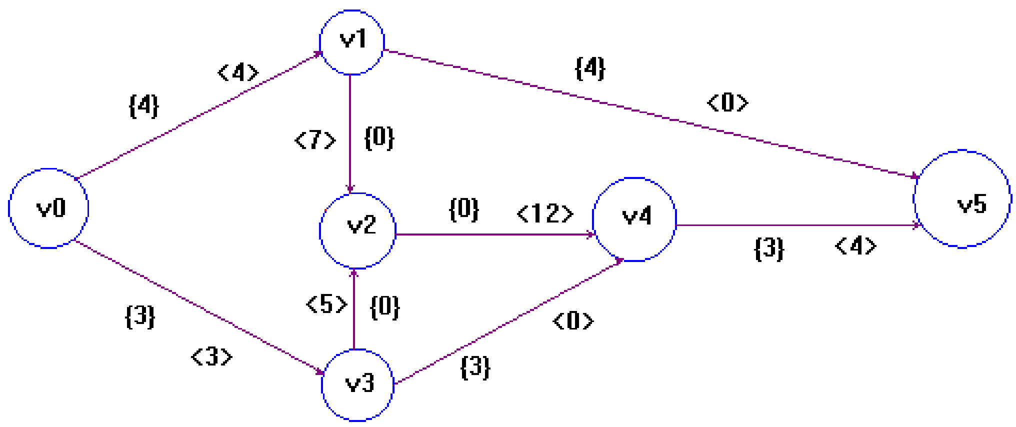




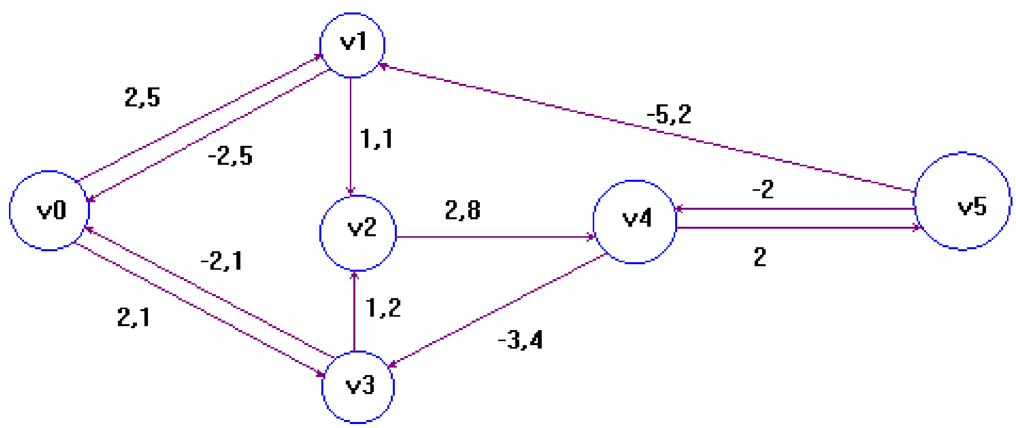
figuur 2b

De kortste route is v0, v1, v5 heeft een lengte van 7,7. Er is een stroom van 4 mogelijk.
Het aantal kilometers is 30,8. Het totaal aantal kilometers is nu 53,3 km.

Vervolg opgave 2



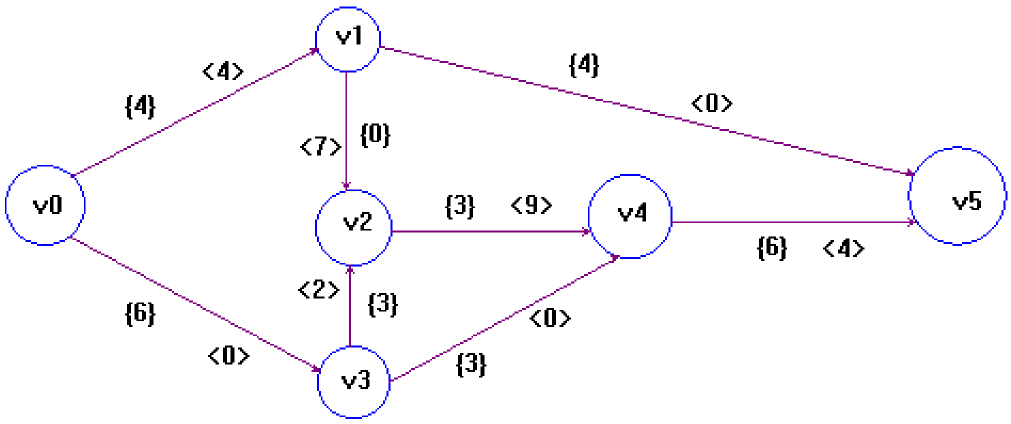
figuur 3a



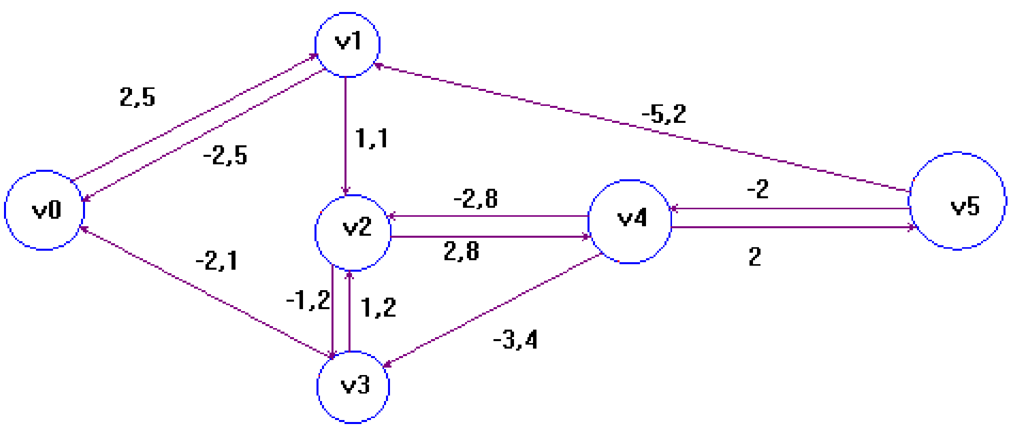
figuur 3b

De kortste route is v0, v3, v2, v4, v5 en heeft een lengte van 8,1. Er is een stroom van 3 mogelijk. De lengte is 24,3 km. De totale lengte is nu 53,3 + 24,3 = 77,6 km

Vervolg opgave 2



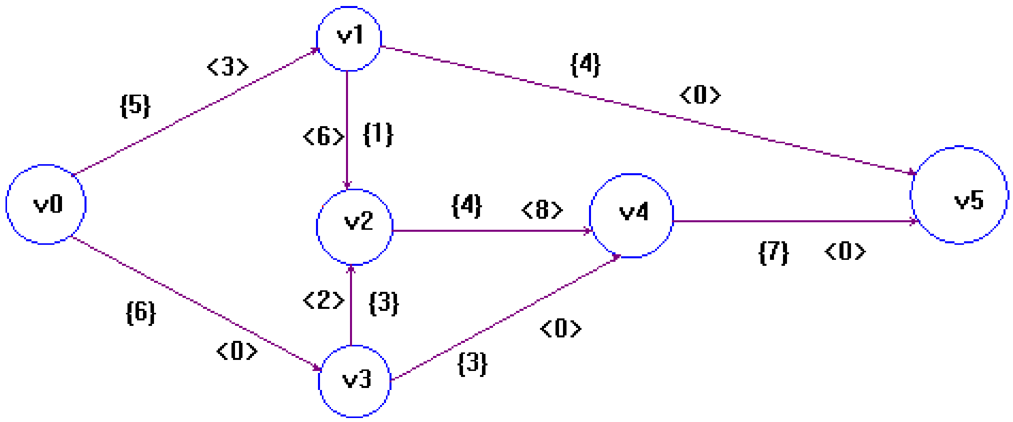
figuur 4a



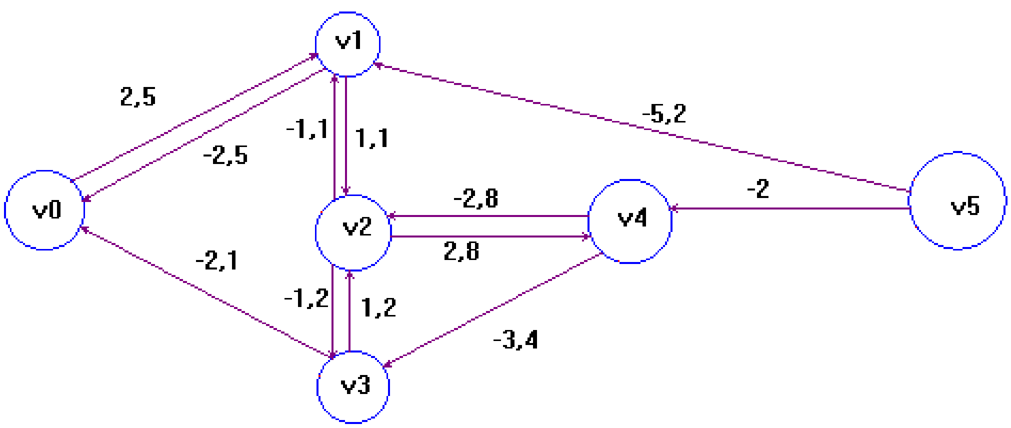
figuur 4b

De kortste route is v0, v1, v2, v4, v5 en heeft een lengte van 8,4. Er is een stroom van 1 mogelijk. De afstand die er bij komt is dus 8,4 km.

Vervolg opgave 2



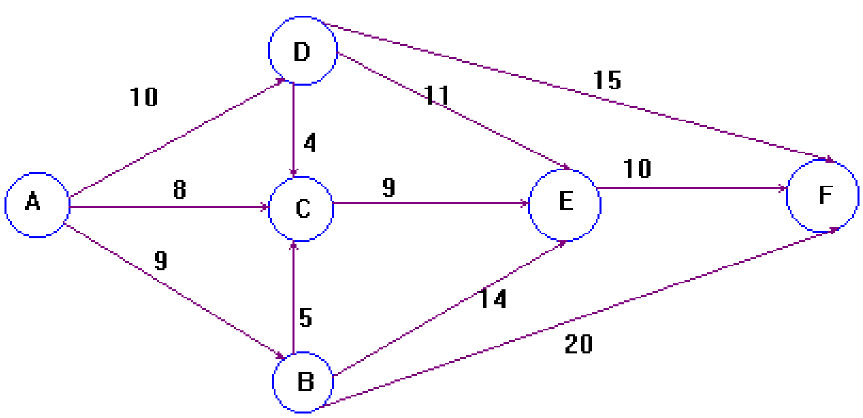
figuur 5a



figuur 5b

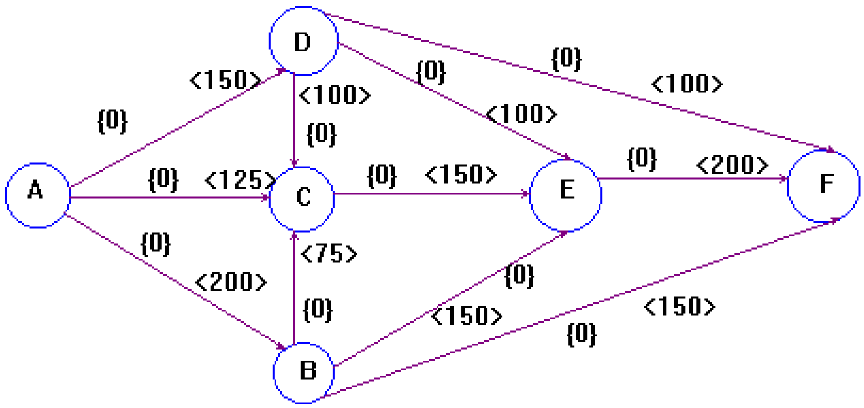
Er is geen stroom meer mogelijk naar punt v5.
De totale minimale afstand is nu 77,6 + 8,4 = 86 km.

3



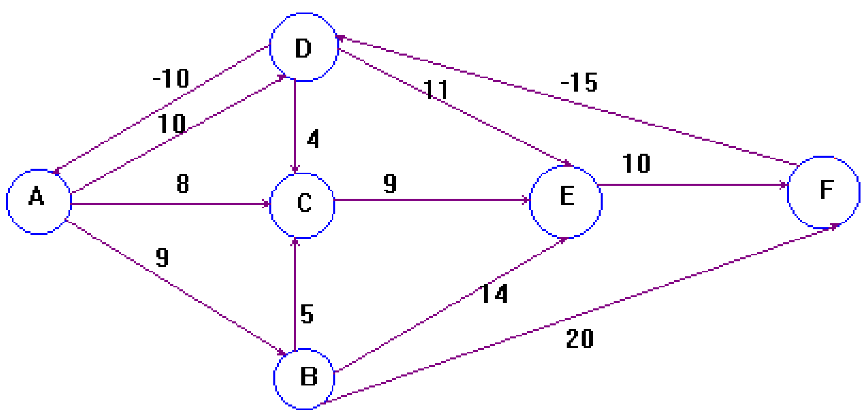
figuur 1a

Vervolg opgave 3

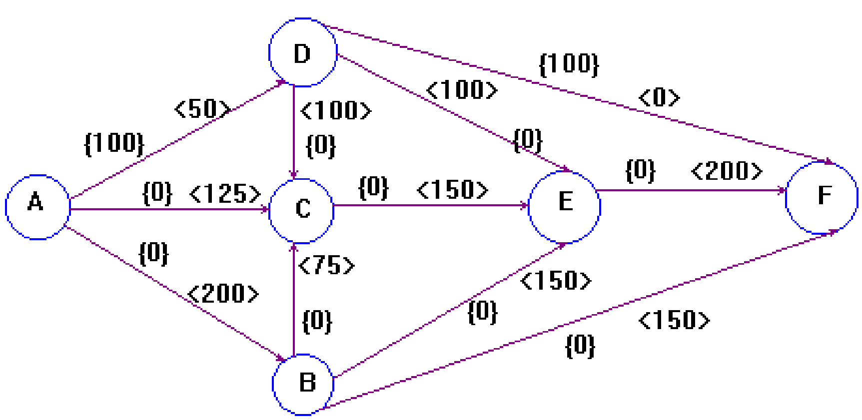


figuur 1b

De kortste afstand is 25 via ADF. Er is een stroom mogelijk van 100.
De totale afstand is 2500 km.



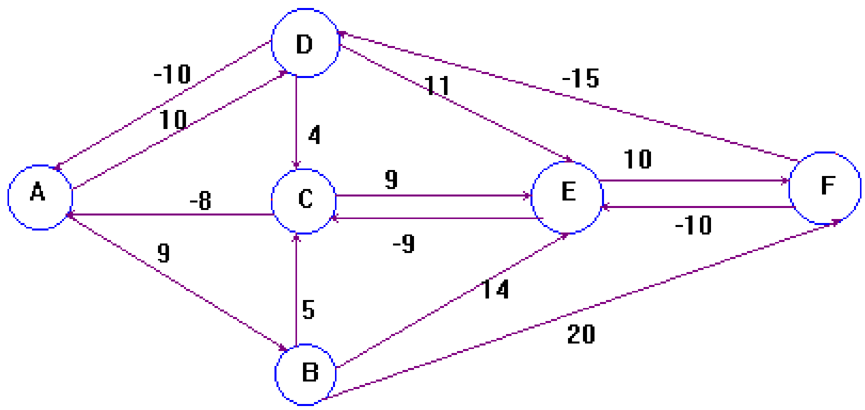
figuur 2a



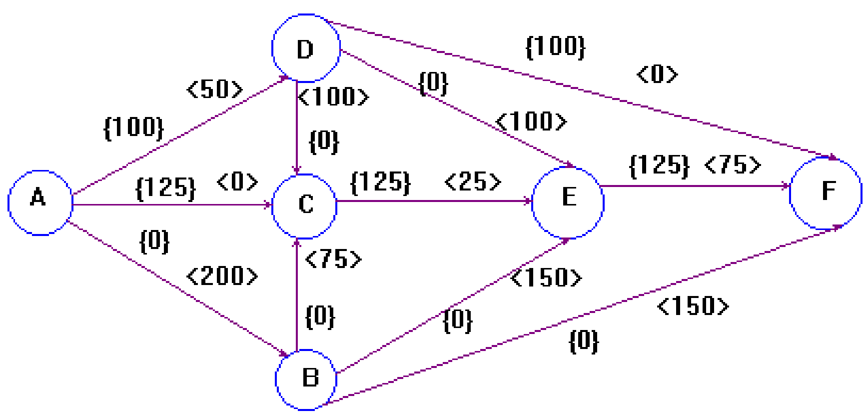
figuur 2b

Vervolg opgave 3

De kortste afstand is nu 27 via ACEF. Er is een stroom mogelijk van 125.
De afstand is 27x125=3375. De totale afstand is 5875 km.



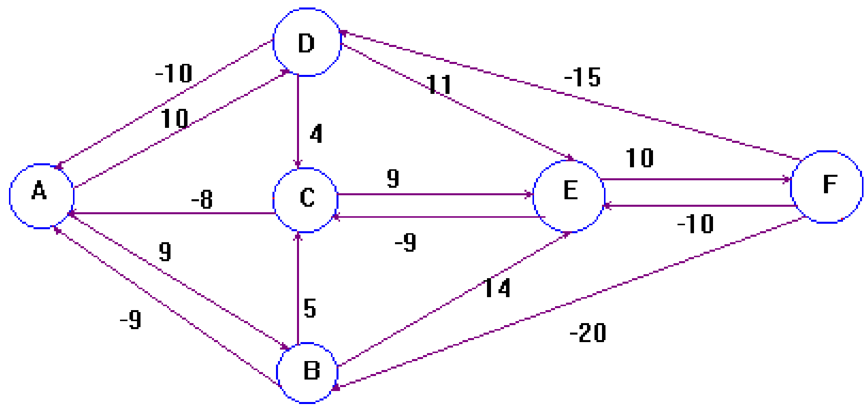
figuur 3a



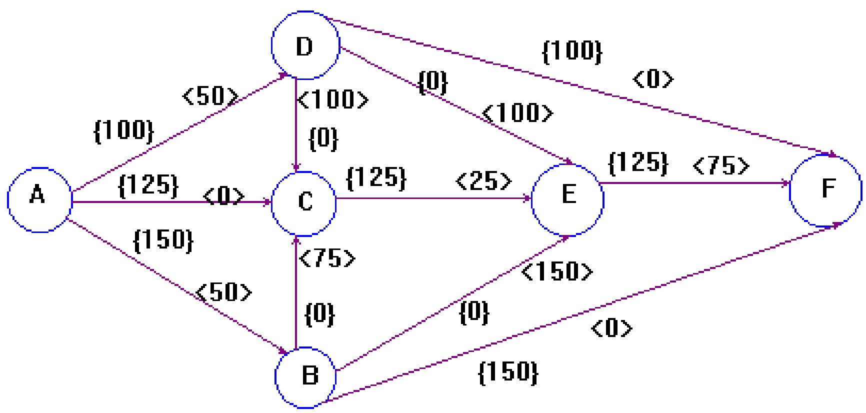
figuur 3b

De kortste afstand is nu 29 via ABF. Er is een stroom mogelijk van 150.
De afstand is 29x150=4350. De totale afstand is 10225 km.

Vervolg opgave 3



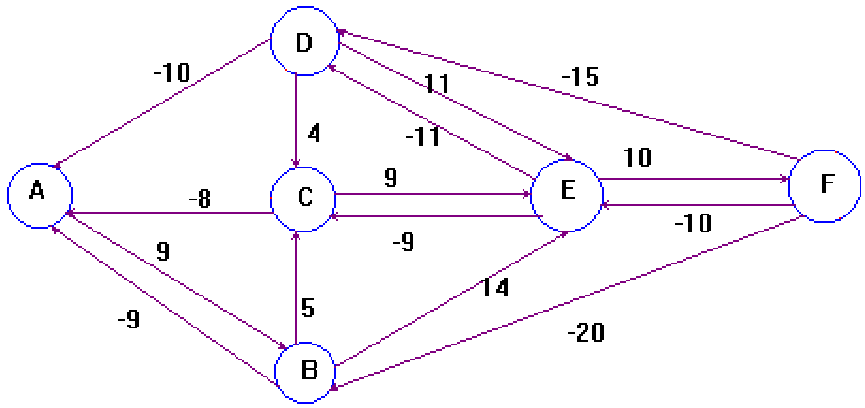
figuur 4a



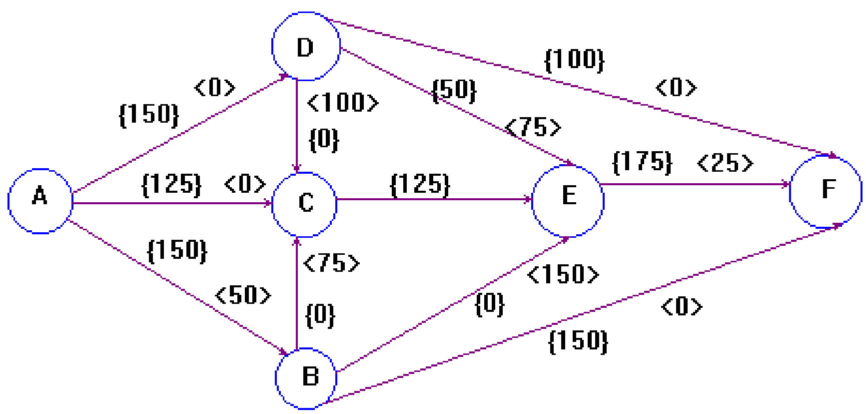
figuur 4b

De kortste afstand is nu 31 via ADEF. Er is een stroom mogelijk van 50. De afstand is 31x50=1550. De totale afstand is 11775 km.

Vervolg opgave 3



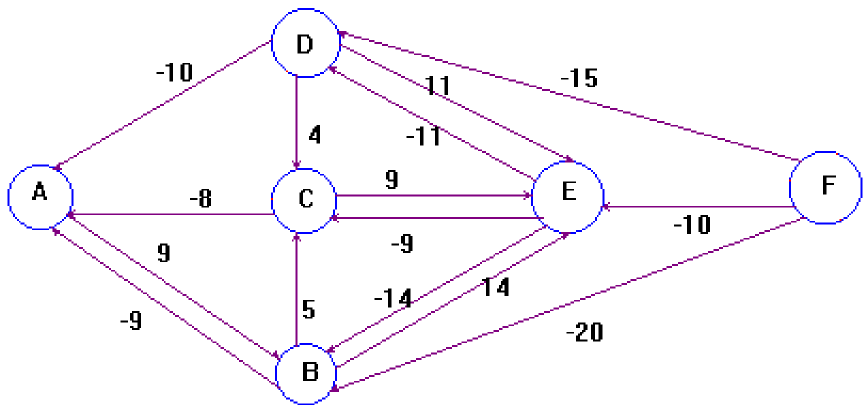
figuur 5a



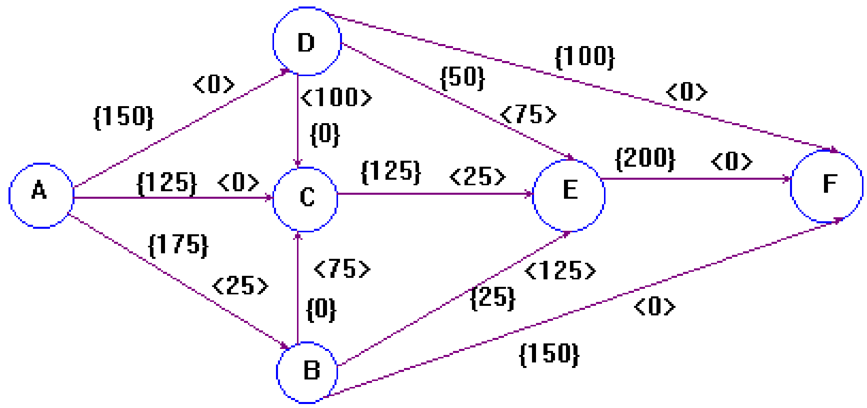
figuur 5b

De kortste afstand is nu 33 via ABEF. Er is een stroom mogelijk van 25.
De afstand is 33x25=825. De totale afstand is 12600 km.
(Er is ook een afstand van 33 via ABCEF met een stroom van 25)

Vervolg opgave 3



figuur 6a

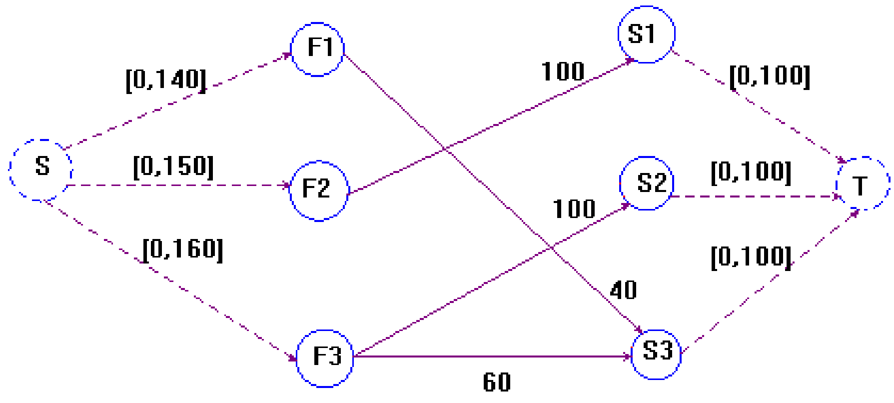


figuur 6b

Er is nu geen route meer mogelijk van A naar F.

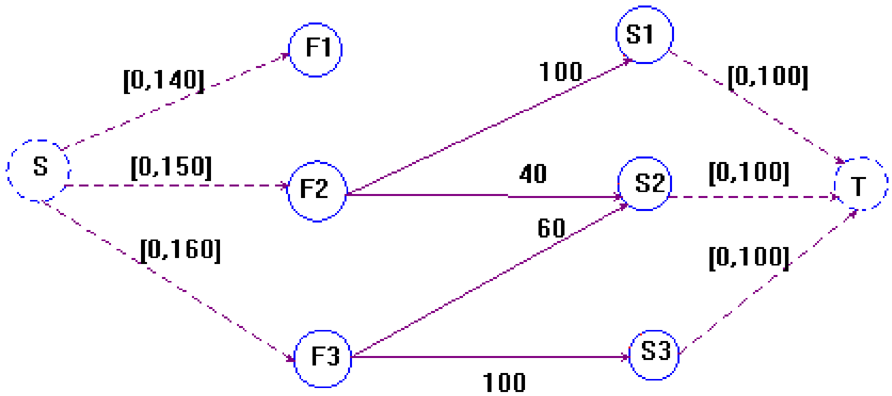
4

De volgende stroom is mogelijk:
De kosten bedragen:9320



figuur 1

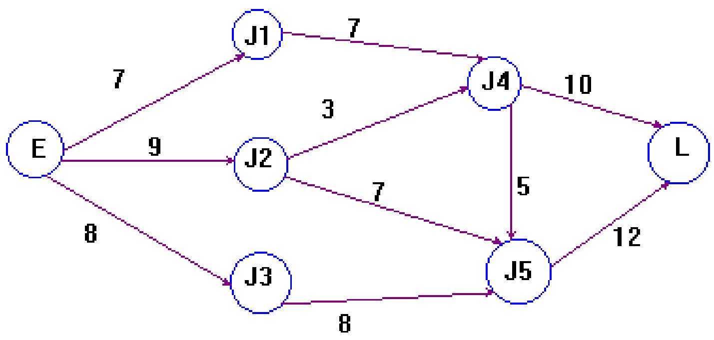
Voor deze stroom bedragen de kosten 9400



figuur 2

5

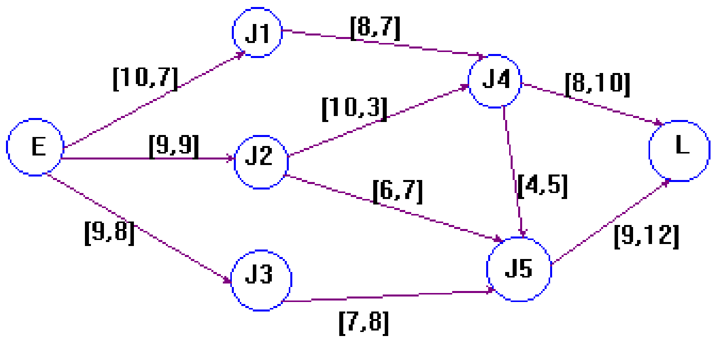
Onderdeel A.



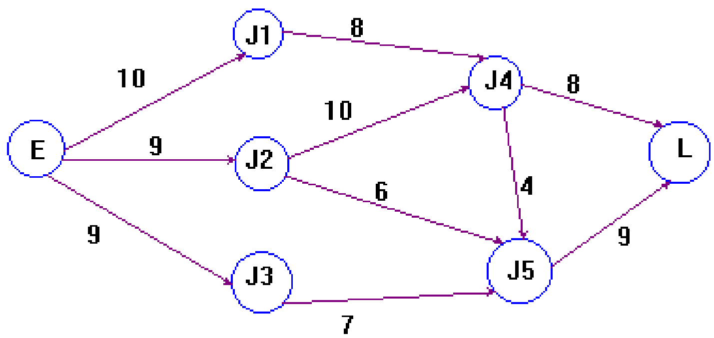
figuur 5.1

Een mogelijkheid is:
Route E,J3,J5, L: stroom 8
Route E,J2,J4, L: stroom 3
Route E,J1,J4, L: stroom 7
Route E,J2,J5, L: stroom 4

Onderdeel B. (Bij deze uitwerkingen zijn vanaf figuur 5.3 alleen maar de hulpnetwerken met de reistijden getekend)



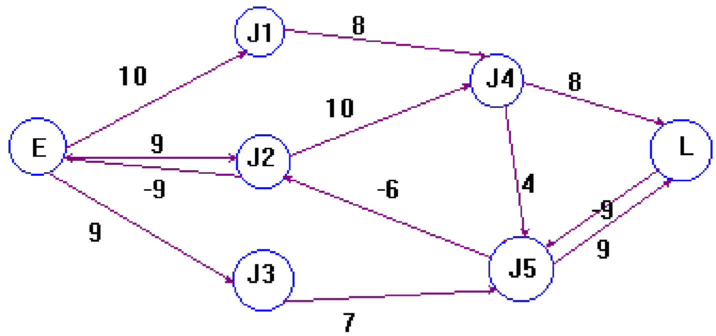
figuur 5.2



figuur 5.3

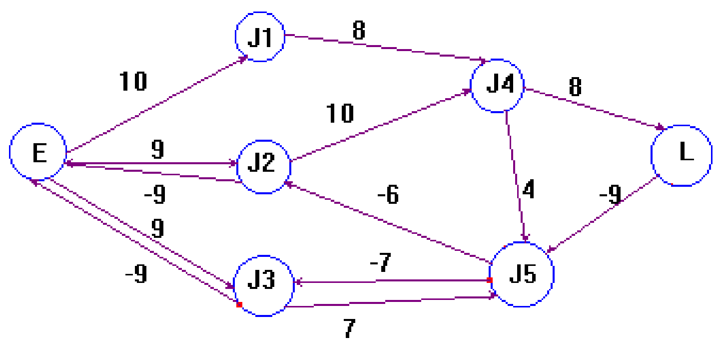
Vervolg opgave 5

Het minimale aantal minuten is 24 via de route E,J2,J5,L. Er is een stroom van 7 (keer honderd) mogelijk.



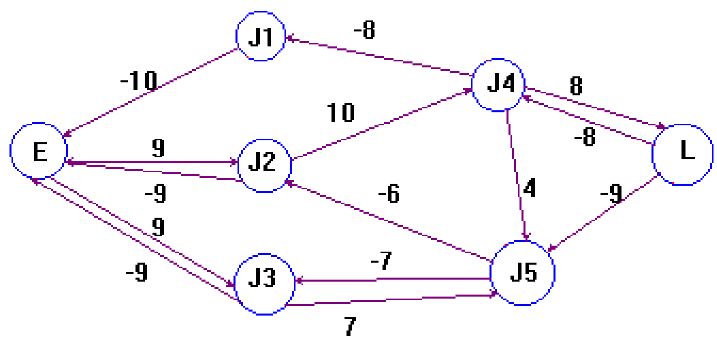
figuur 5.4

Het minimale aantal minuten is 25 via de route E,J3,J5,L. Er is nog een stroom van 12-7=5 (keer honderd) mogelijk.



figuur 5.5

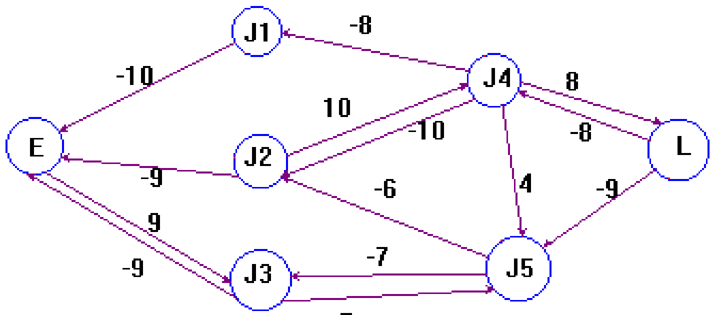
Het minimale aantal minuten is 26 via de route E,J1,J4,L. Er is een stroom van 7 (keer honderd) mogelijk.



figuur 5.6

Vervolg opgave 5

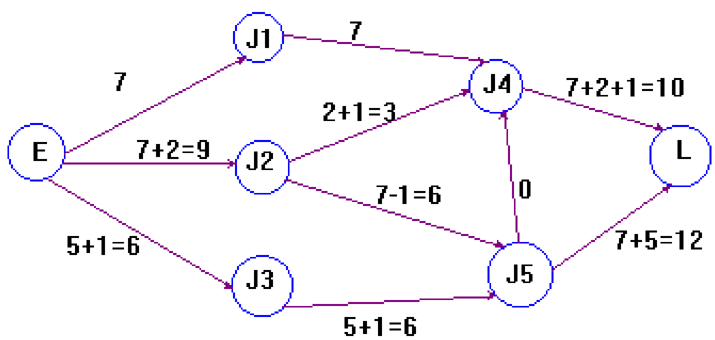
Het minimale aantal minuten is 27 via de route E,J2,J4,L. Er is nog een stroom van 9-7=2 (keer honderd) mogelijk. De totale stroom is nu 21 (keer honderd).



figuur 5.7

Het minimale aantal minuten is 9+7-6+10+8=28 via de route E,J3,J5,J2,J4,L.
Er is nog een stroom van 1 (keer honderd) mogelijk (van J2 naar J4 is er nog capaciteit van 1).

De stroom die nu ontstaat is:



figuur 5.8

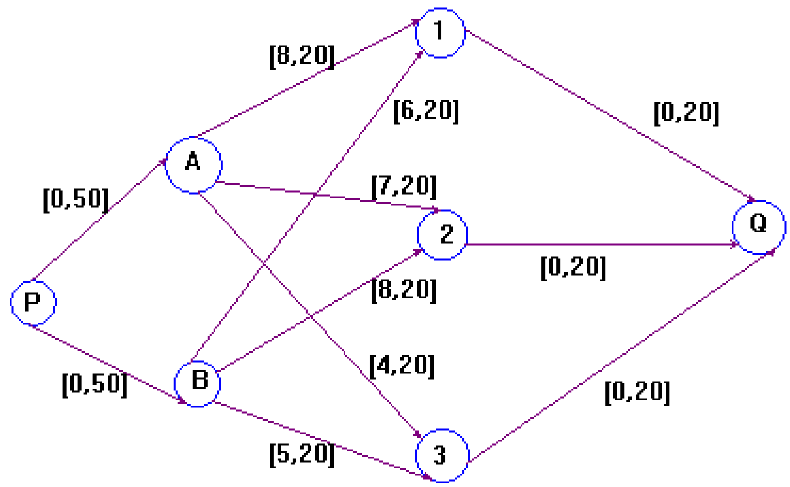
Het minimaal aantal minuten is nu 700x24+500x25+700x26+200x27+100x28=55700.

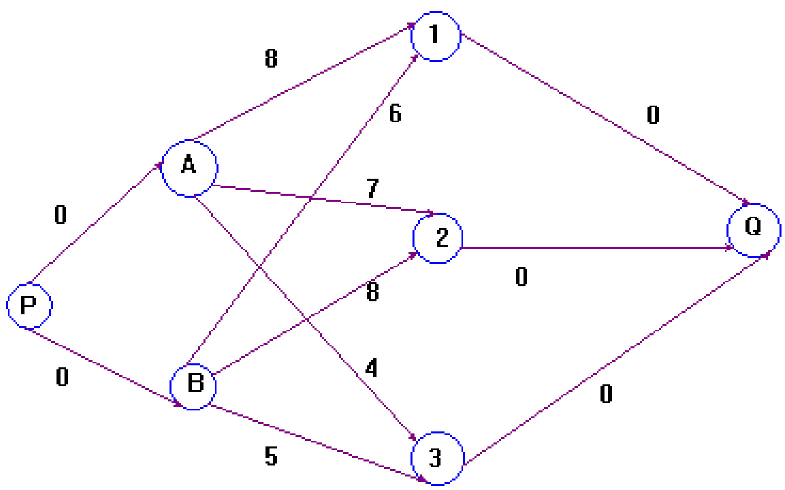
Onderdeel C.

Het aantal minuten is 800x25+300x27+700x26+400x24=55900.

6 **(Na de eerste figuur zijn alleen de kostennetwerken getekend)**

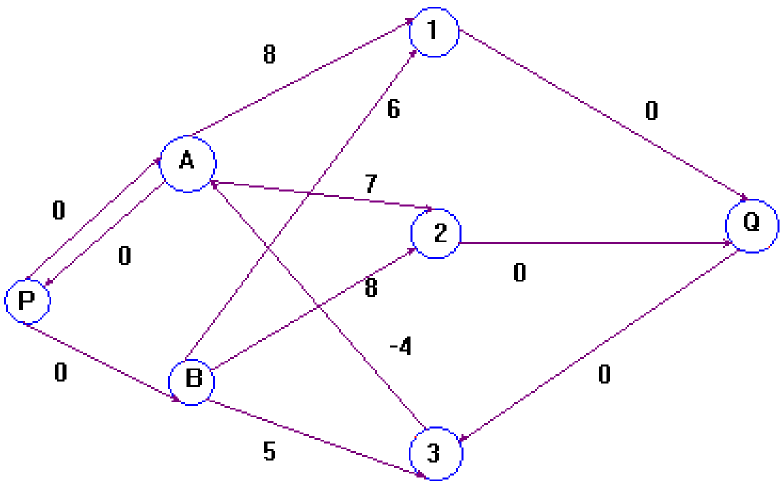
De kosten zijn in een veelvoud van 100 euro.



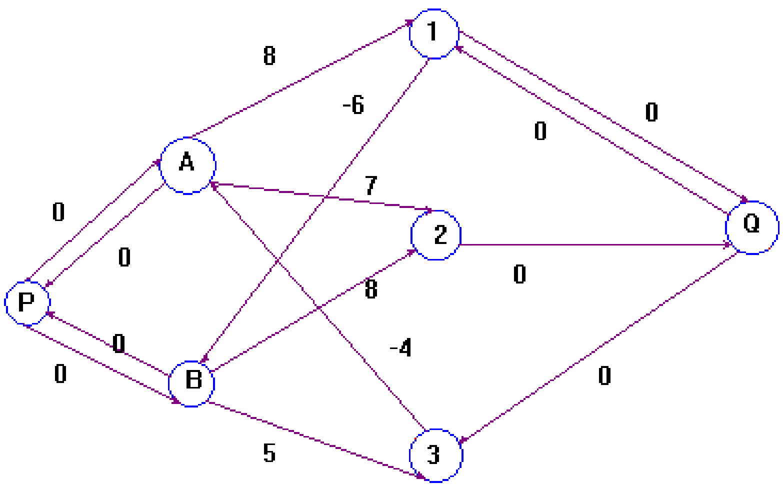


De minimale kosten zijn 4 van P naar Q via A en centrum 3, dus van A naar distributiecentrum 3. Er kunnen 20 trucks vervoerd worden. De kosten bedragen € 8000.

Vervolg opgave 6

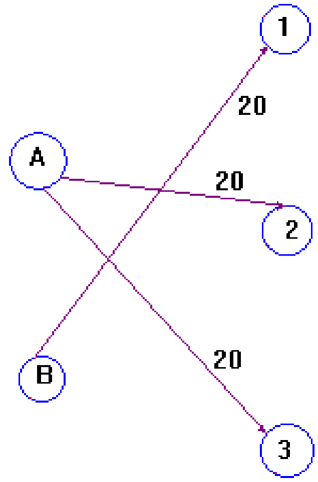


De minimale kosten zijn 6 van P naar Q, via B en centrum 1, dus van B naar distributiecentrum1. Er kunnen 20 trucs worden vervoerd. De kosten zijn € 12000.

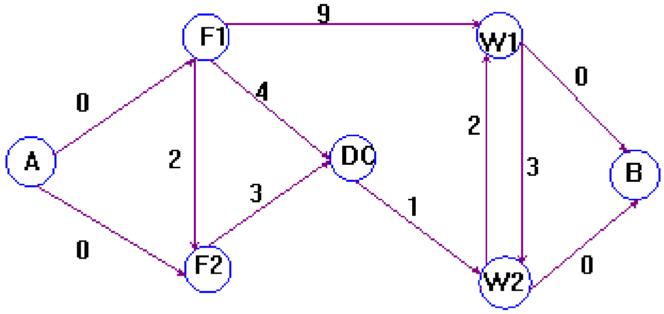


De minimale kosten zijn 7 van P naar Q, via A en centrum 2, dus van A naar distributiecentrum 2. Er kunnen 20 trucs worden vervoerd. De kosten zijn € 14000.
Alle trucs zijn nu op hun plaats.

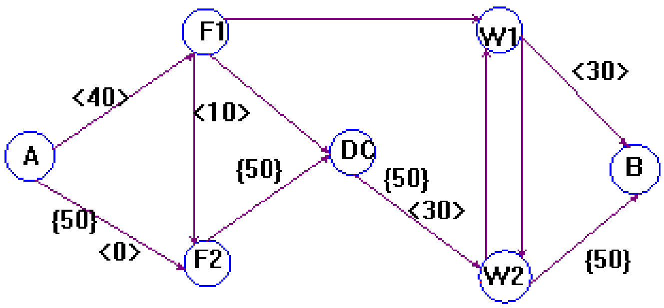
De totale kosten bedragen € 34000.
Het transportschema ziet er dan als volgt uit:

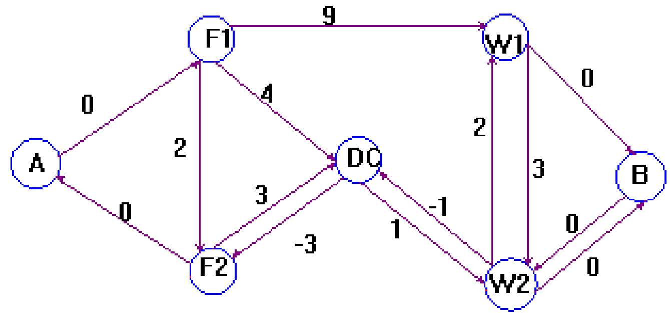


7

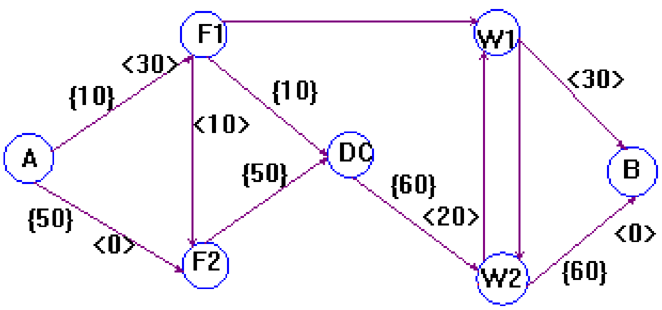


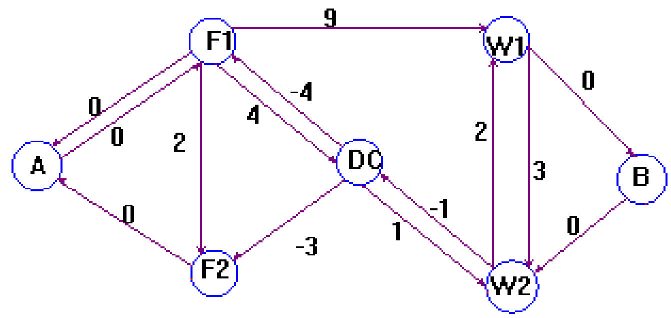
De minimale kosten per eenheid zijn 4 van F2 (A) via DC naar W2 (B). Er kunnen 50 eenheden getransporteerd worden. De kosten bedragen 20000 euro.





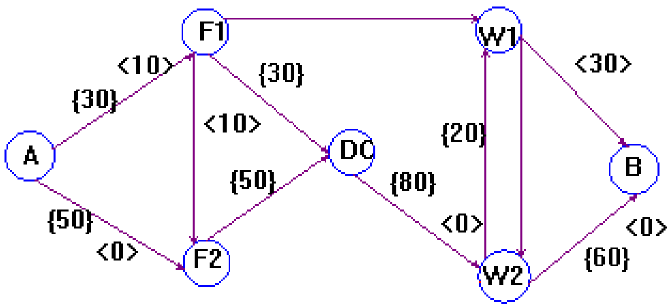
De minimale kosten per eenheid zijn 5 van F1(A) via DC naar W2 (B). Er kunnen 10 eenheden vervoerd worden. De kosten bedragen 5000 euro.

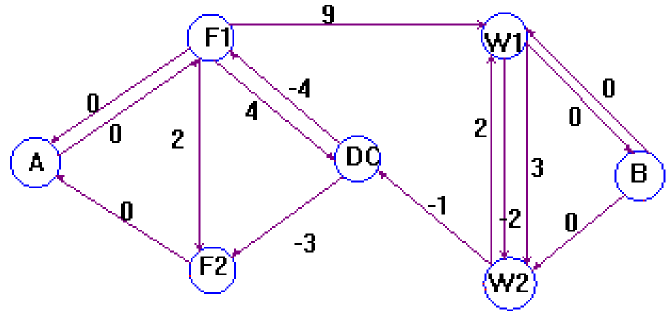




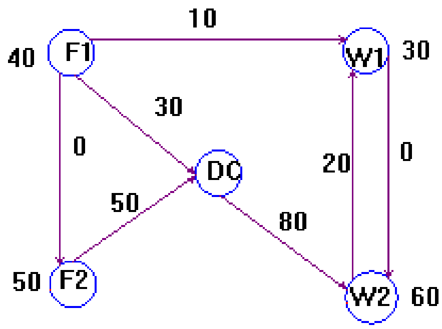
De minimale kosten per eenheid zijn 7 van F1(A) via DC en W2 naar W1(B). Er kunnen 20 eenheden vervoerd worden. De kosten bedragen 14000 euro.

Vervolg opgave 7

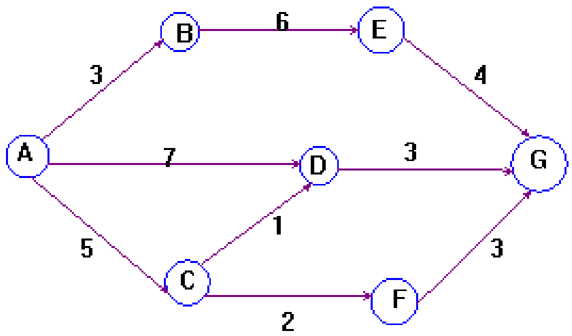




De minimale kosten zijn 9 van F1(A) naar W1(B). Er moeten nog 10 eenheden vervoerd worden. De kosten bedragen 9000 euro.
De totale kosten zijn 20000 + 5000 + 14000 + 9000 = 48000 euro.
Het optimale transport (zonder de extra hulppunten A en B) is hieronder weergegeven.

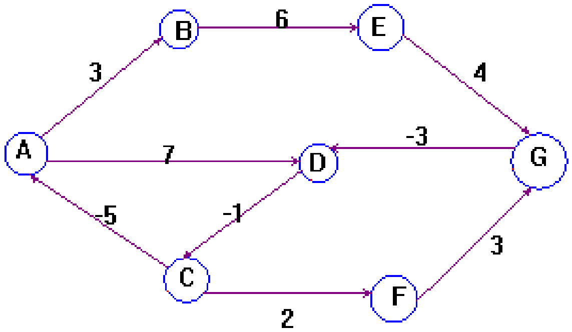


8 **(In deze uitwerkingen zijn alleen de kostennetwerken getekend)**

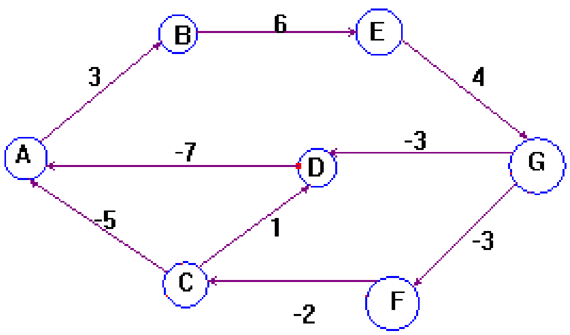


Het kortste pad ACDG heeft lengte 9.
Er kunnen 2 eenheden worden vervoerd.
De kosten bedragen 18.

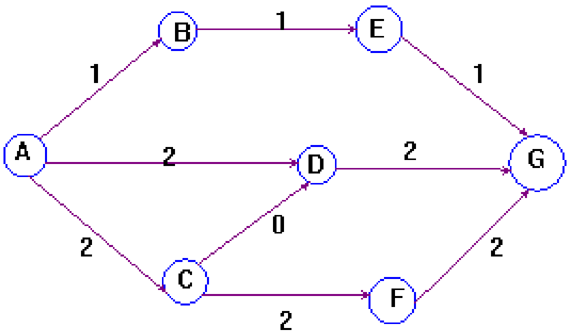
Vervolg opgave 8



Het kortse pad ADCFG heeft lengte 11. Er kunnen 2 eenheden vervoerd worden. De kosten bedragen 22.
De totale kosten zijn nu 40 en er zijn nu 4 eenheden vervoerd.



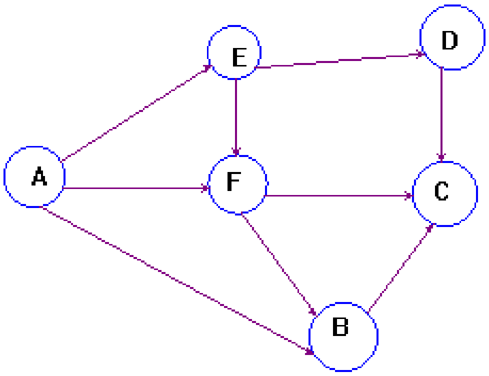
Het kortste pad ABEG heeft lengte 13.
Er moet nog 1 eenheid vervoerd worden. De kosten zijn 13.
De totale kosten zijn dus 53.

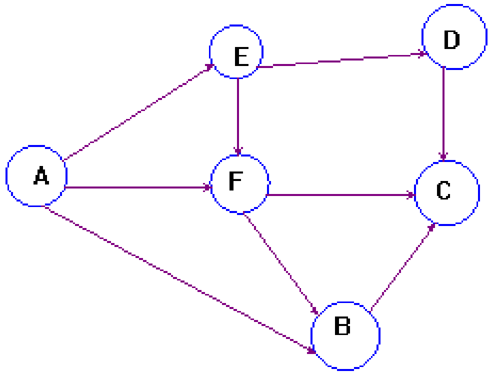


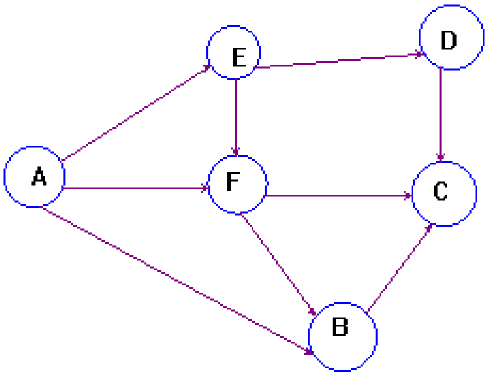
Hiernaast is weergegeven hoe het transport plaatsvindt.

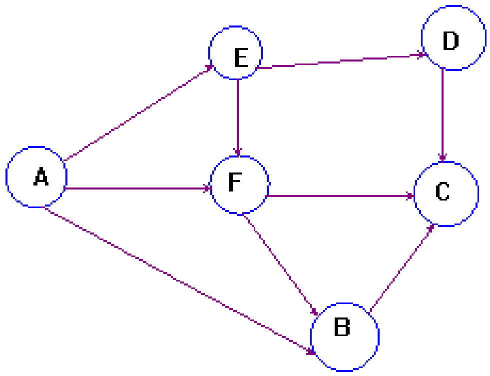
Bijlage bij de opgaven over maximale stromen met minimale kosten.

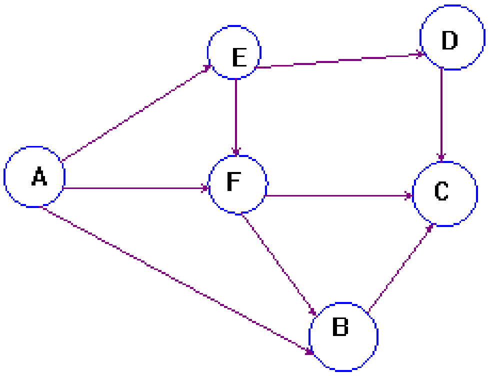
1

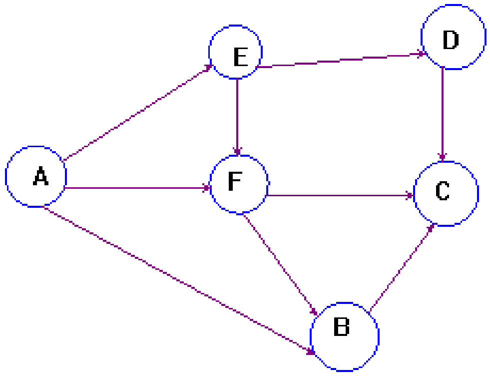


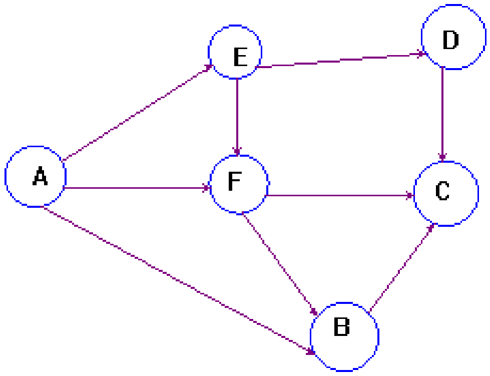


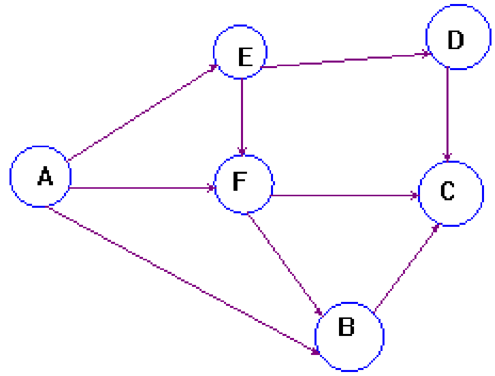


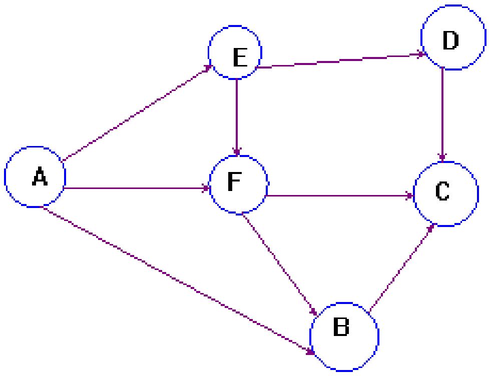


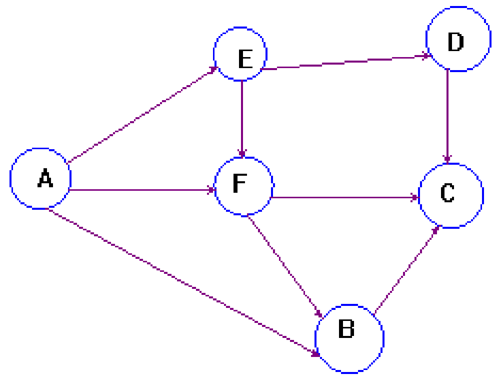


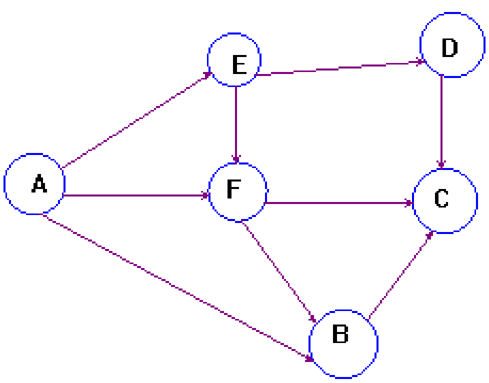


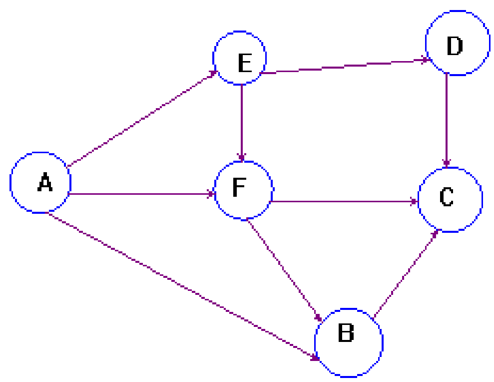

E
D
A
F
C
B


E
D
A
F
C
B

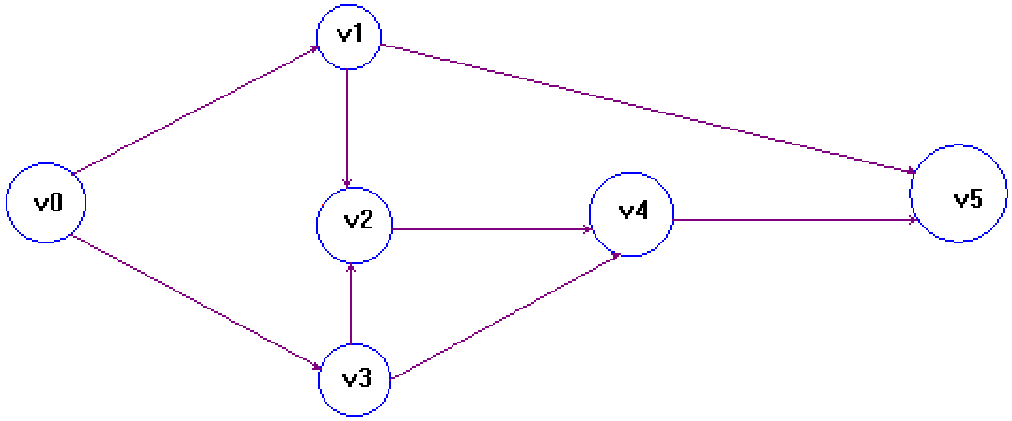

E
D
A
F
C
B

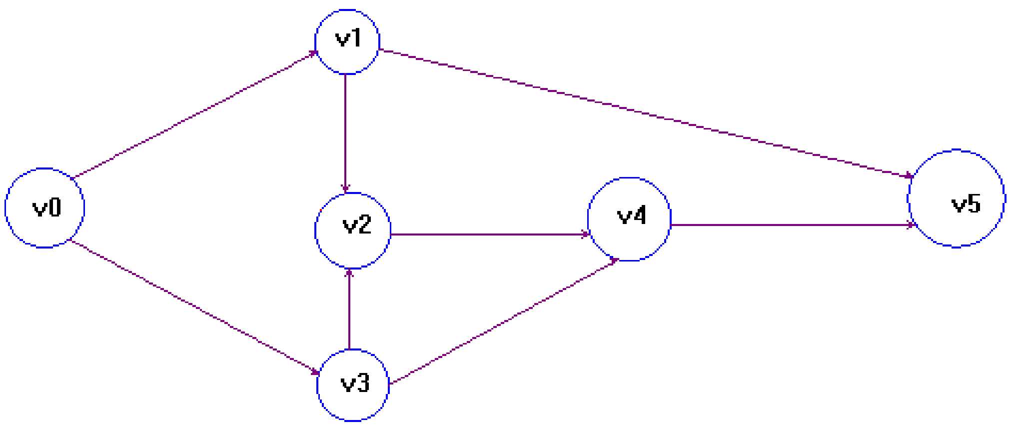

E
D
A
F
C
B

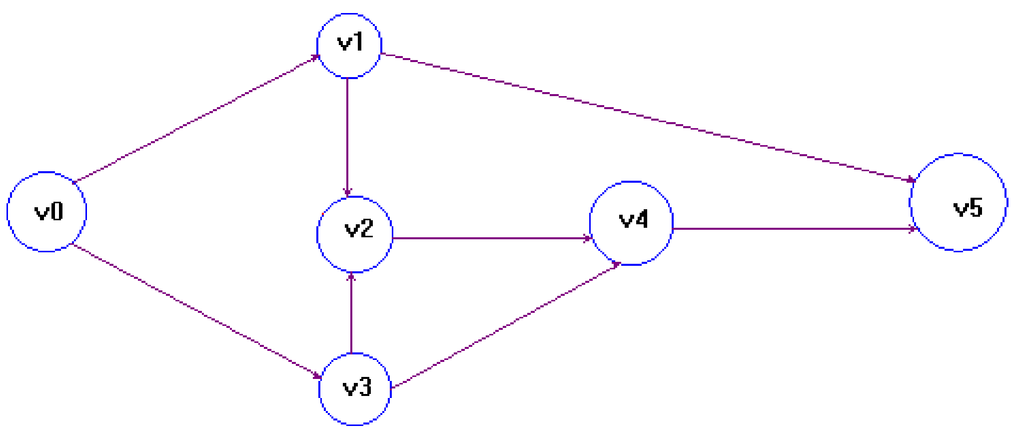

E
D
A
F
C
B

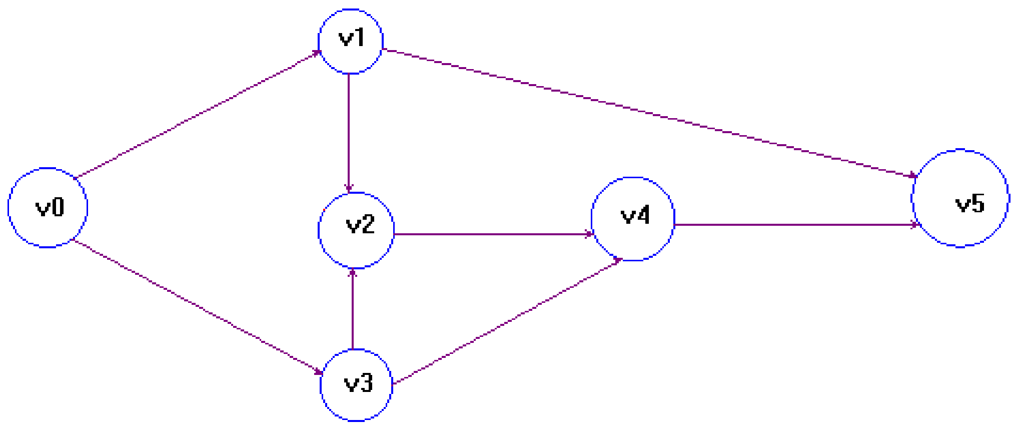

E
D
A
F
C
B

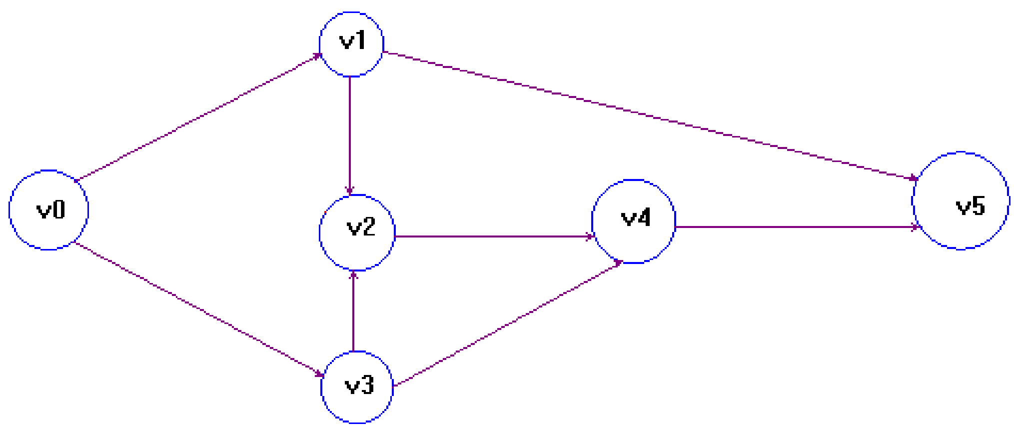
2

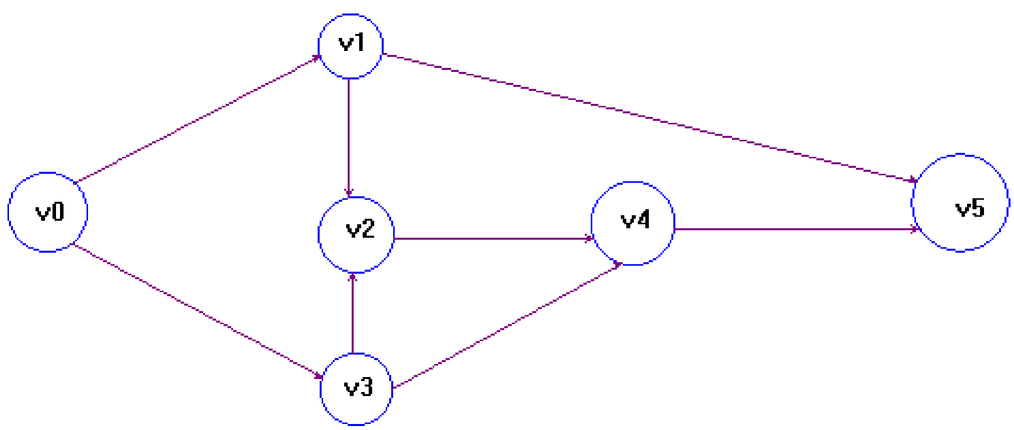


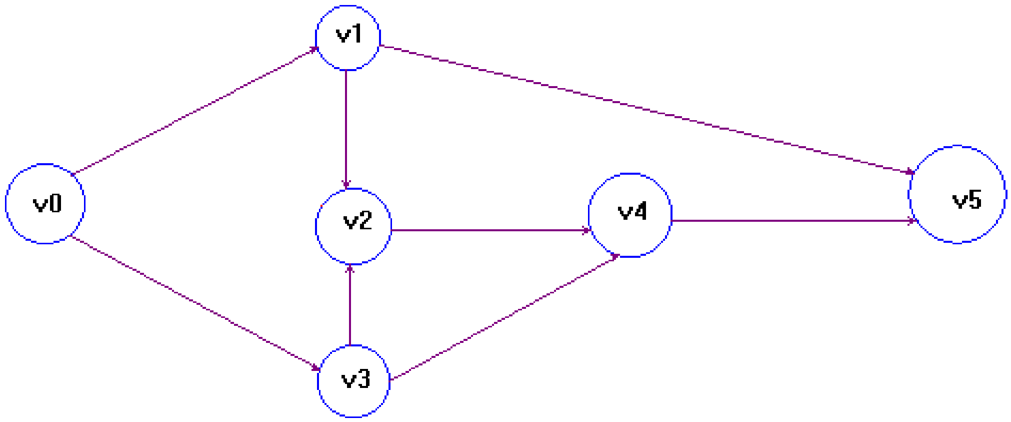


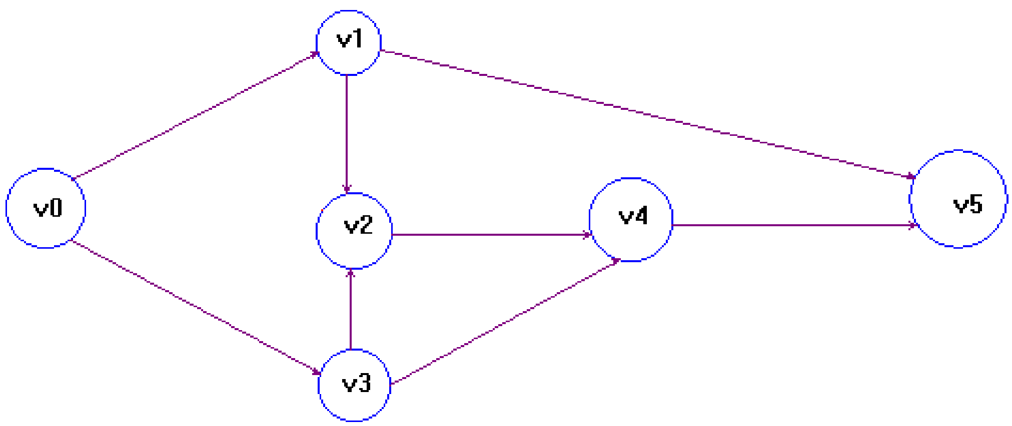


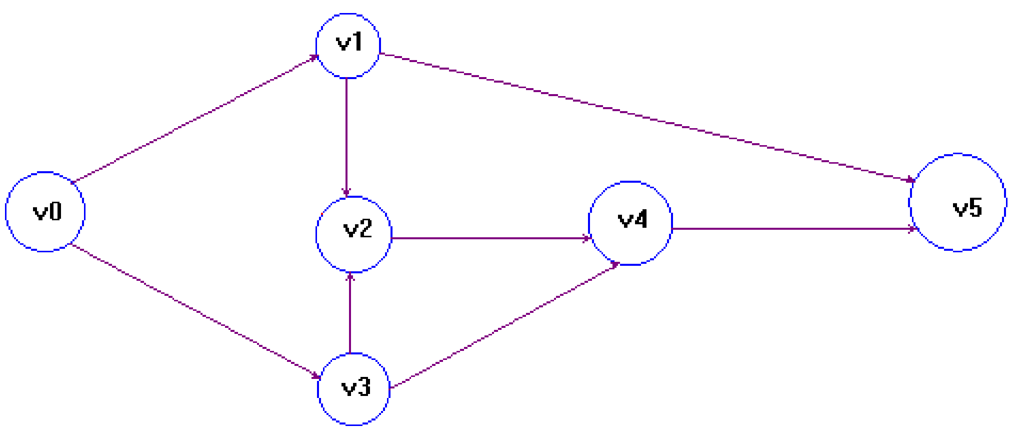

v1
v0
v2
v4
v5
v3


v1
v0
v2
v4
v5
v3

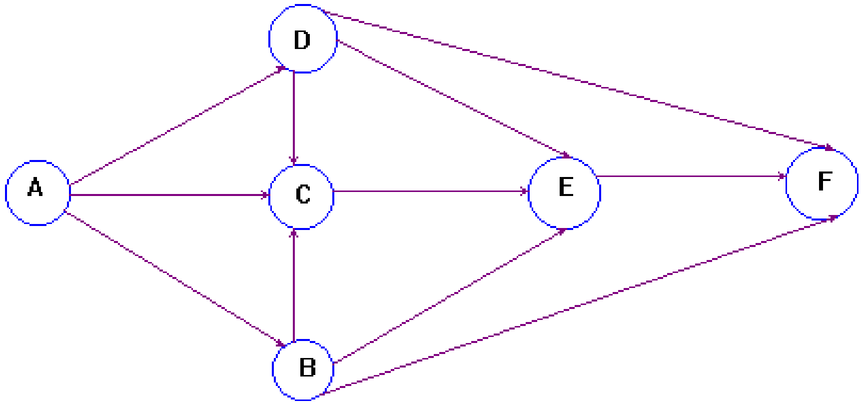

v1
v0
v2
v4
v5
v3

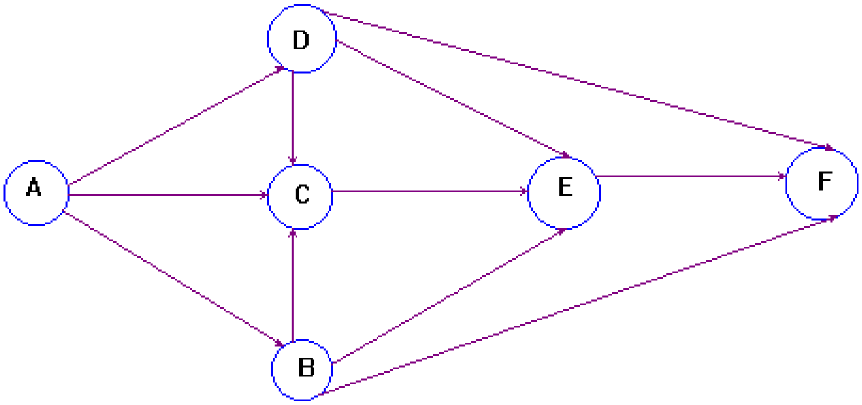

v1
v0
v2
v4
v5
v3

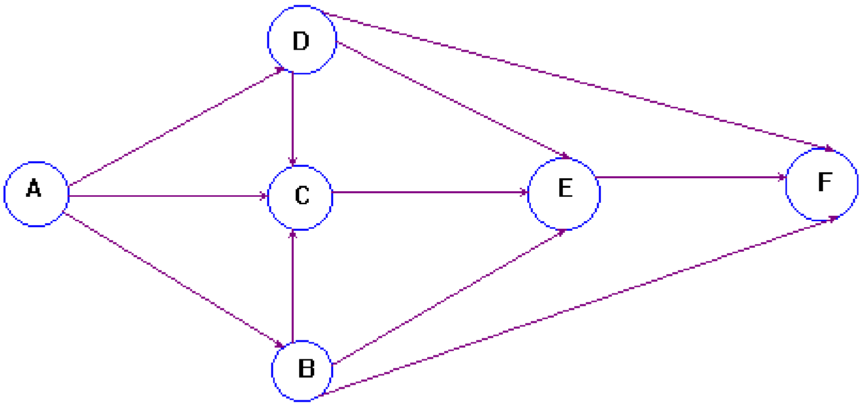

v1
v0
v2
v4
v5
v3

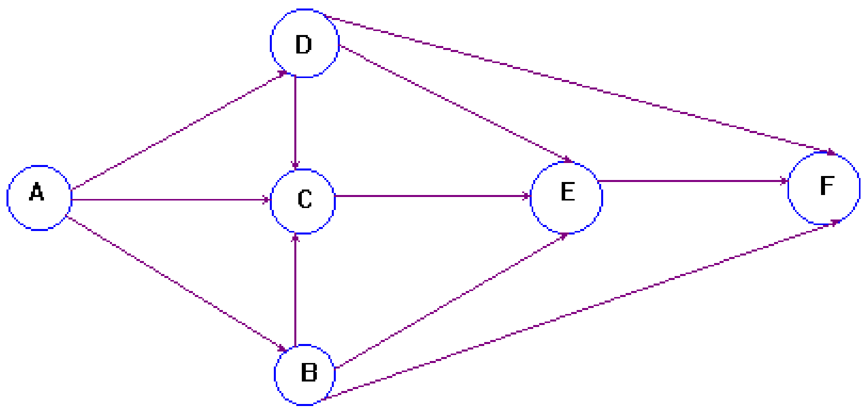

v1
v0
v2
v4
v5
v3

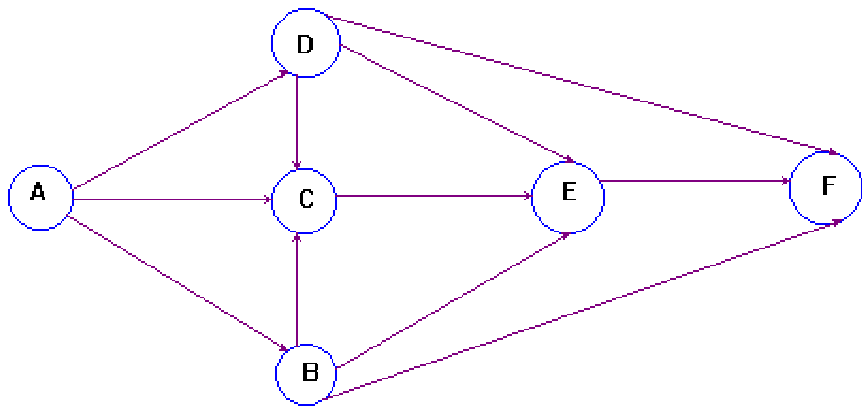
3

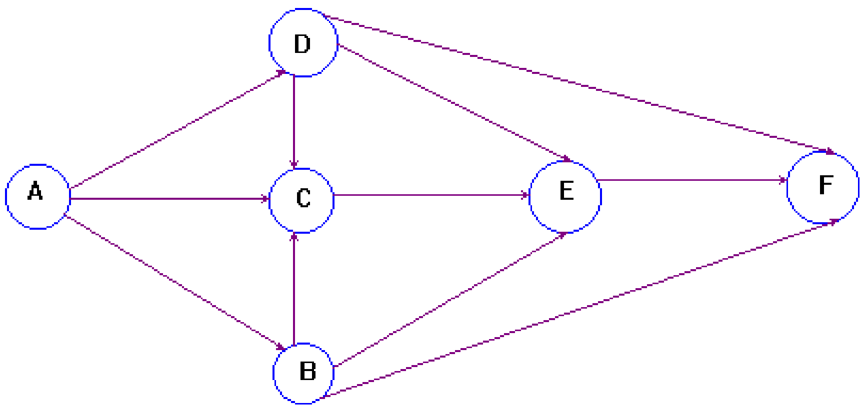


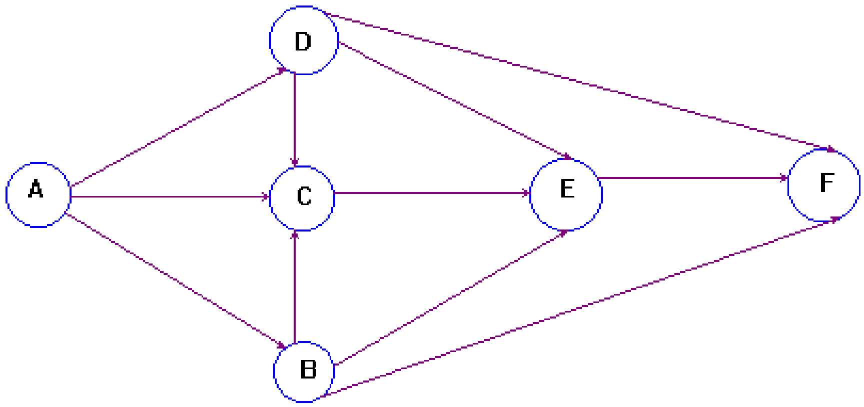


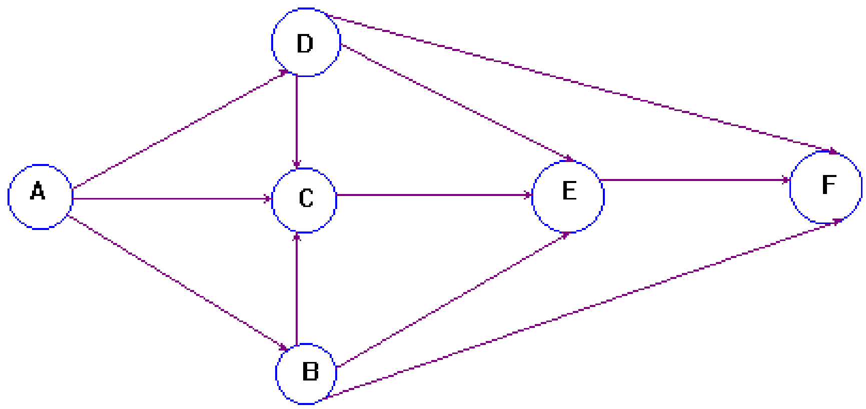


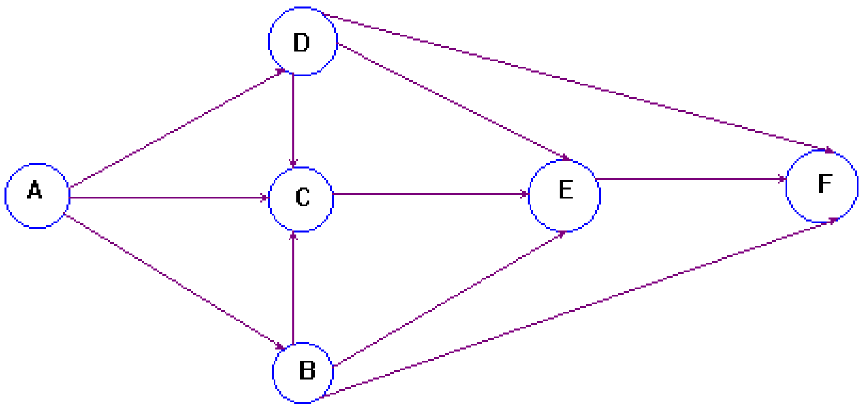

D
A
C
E
F
B

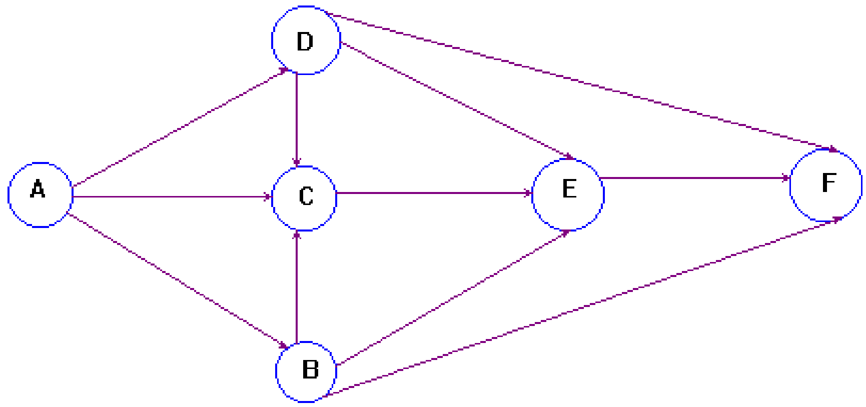

D
A
C
E
F
B

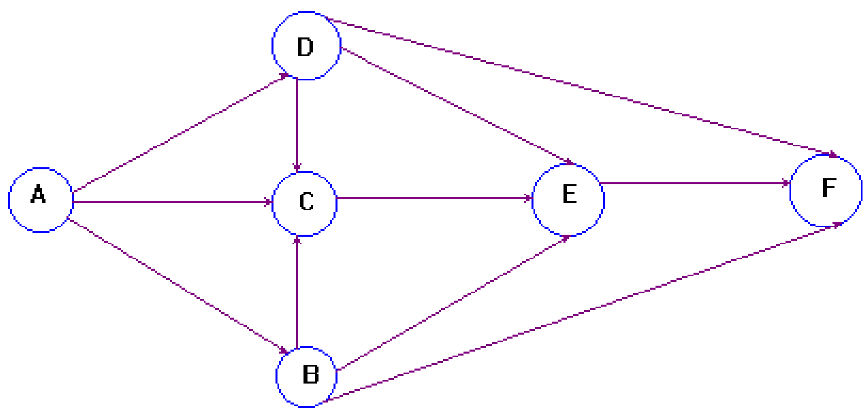

D
A
C
E
F
B

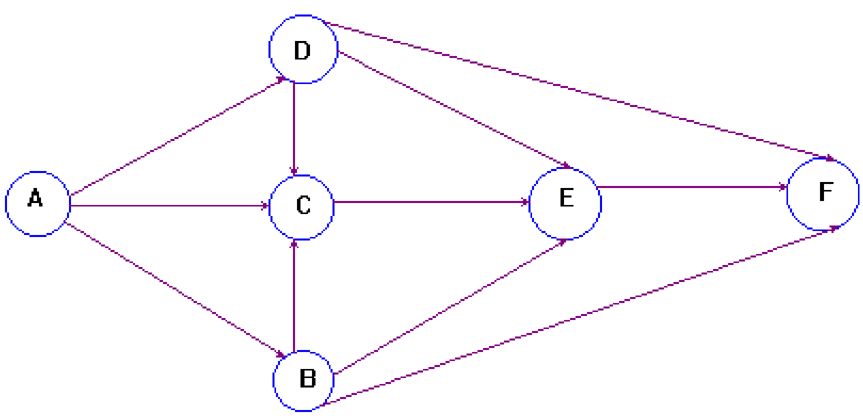

D
A
C
E
F
B


D
A
C
E
F
B

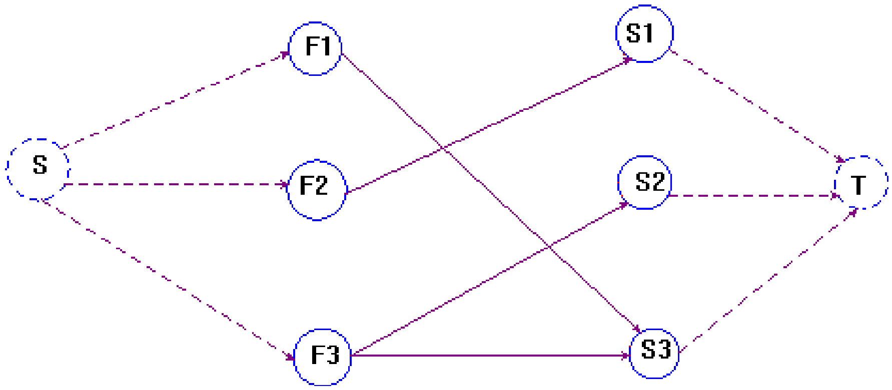

D
A
C
E
F
B

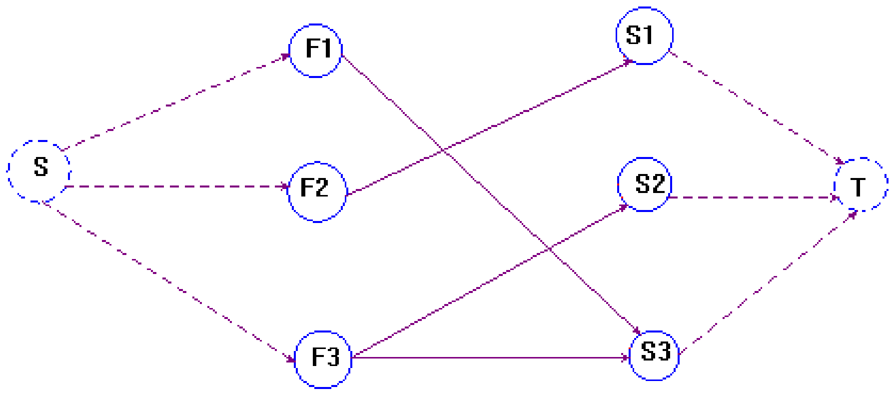

D
A
C
E
F
B


D
A
C
E
F
B


D
A
C
E
F
B

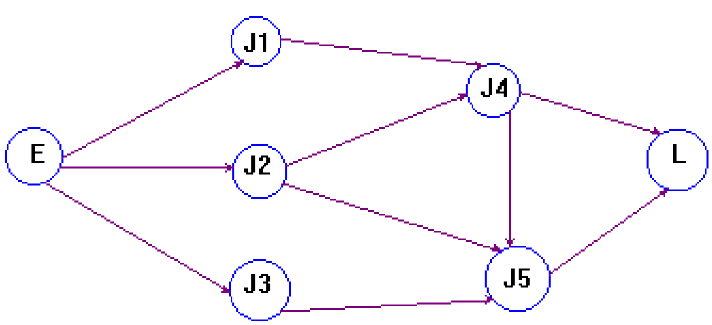
4

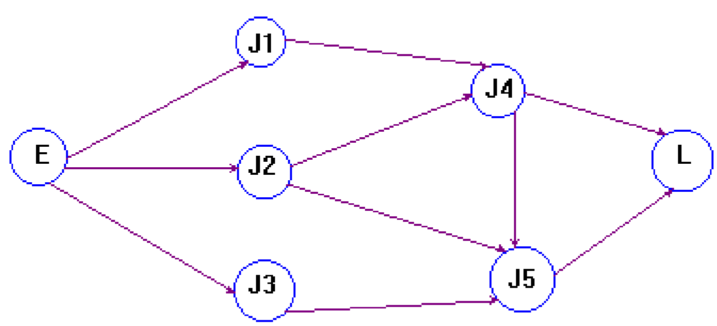


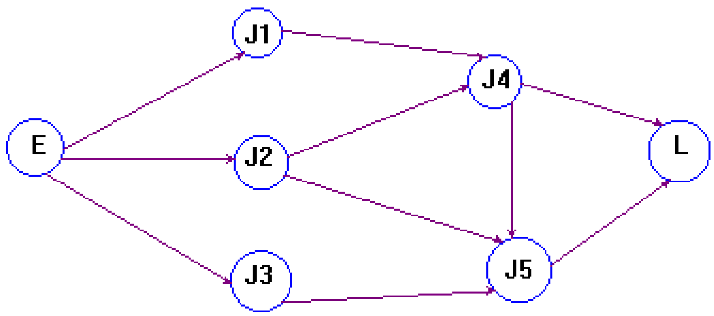


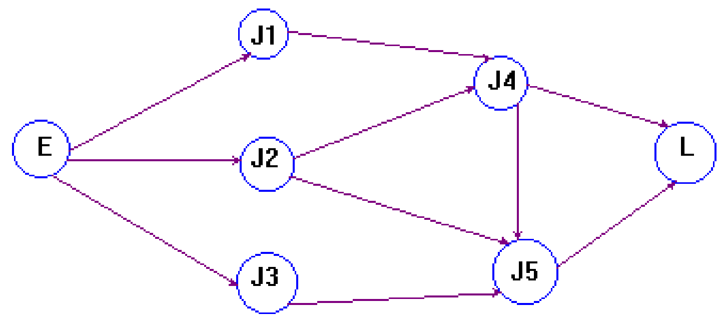
5

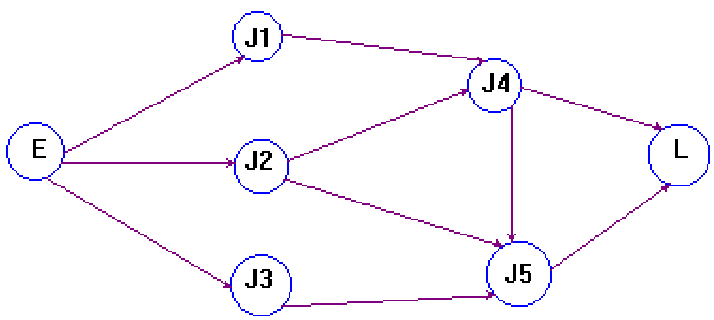
(Gebruik deze bijlage voor de hulpnetwerken van de reistijden)

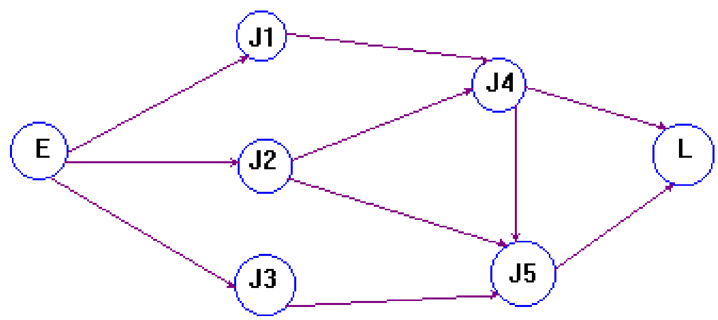


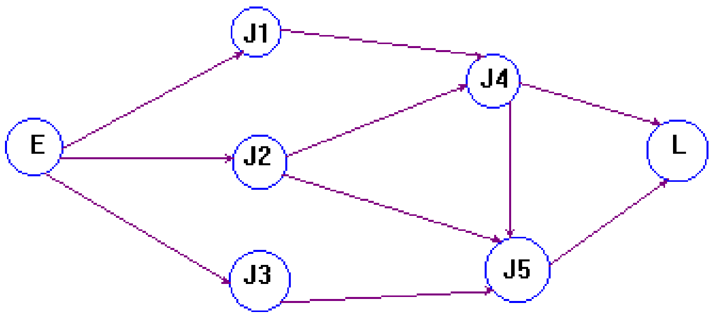


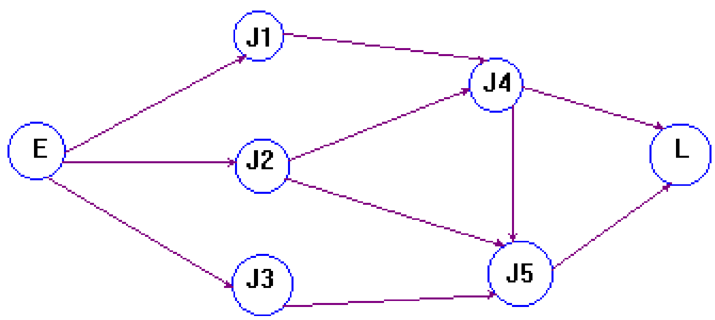

J1
J4
E
J2
L
J3
J5


J1
J4
E
J2
L
J3
J5


J1
J4
E
J2
L
J3
J5

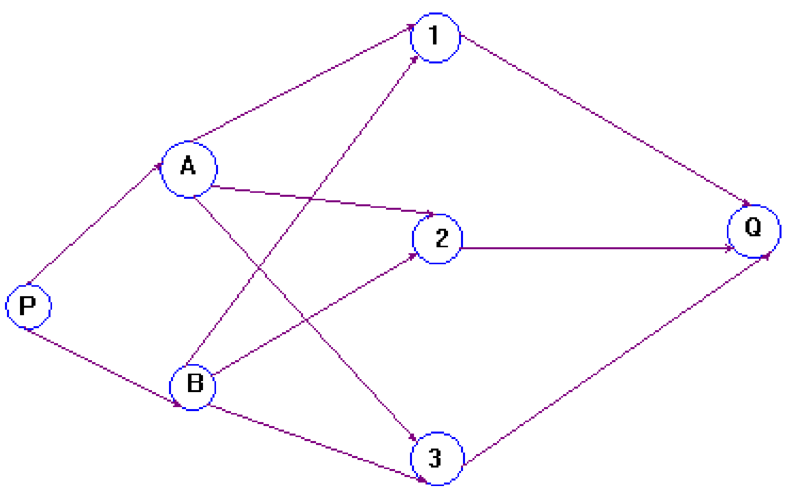

J1
J4
E
J2
L
J3
J5

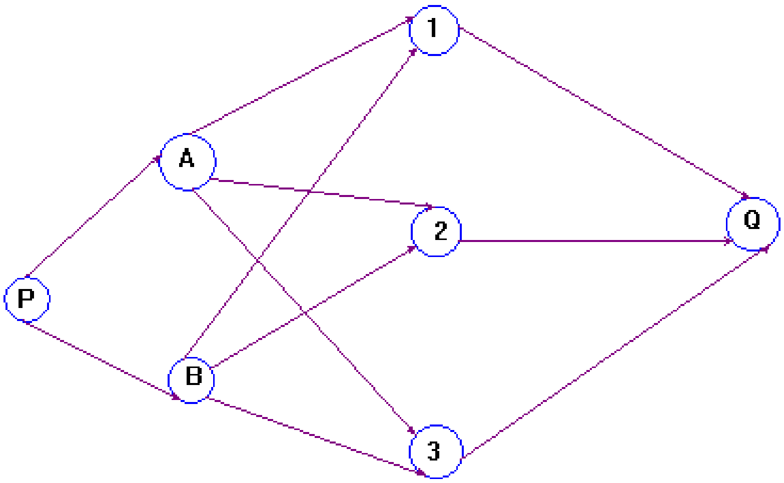


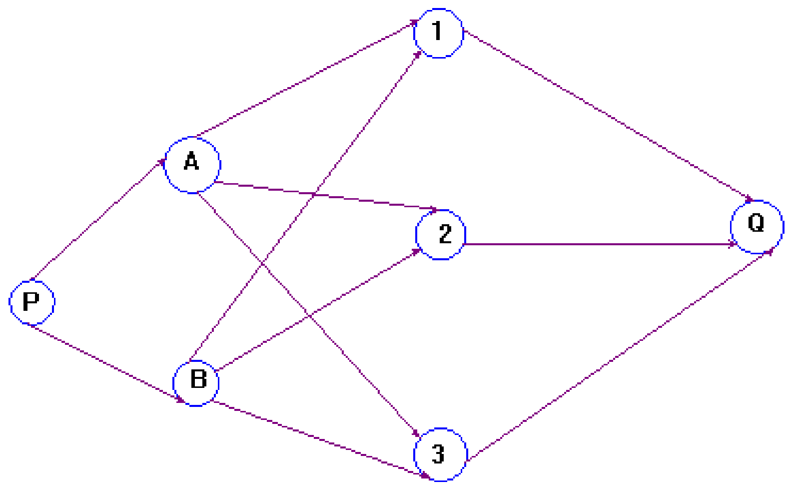


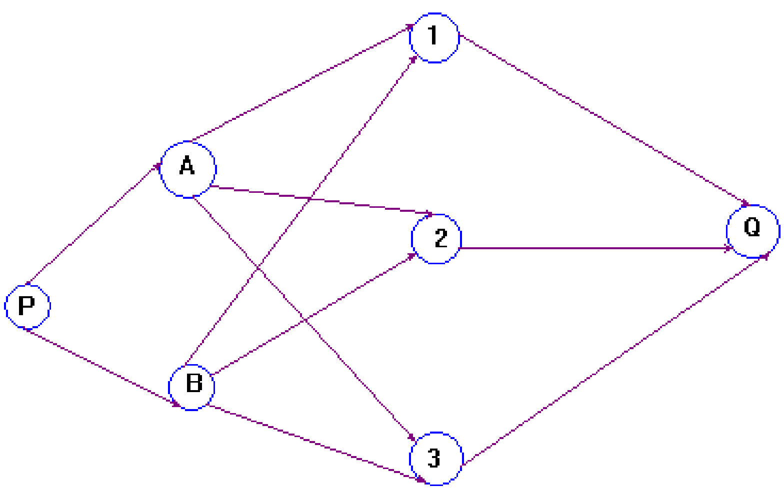
6

(Gebruik deze bijlage voor de hulpnetwerken van de kosten)

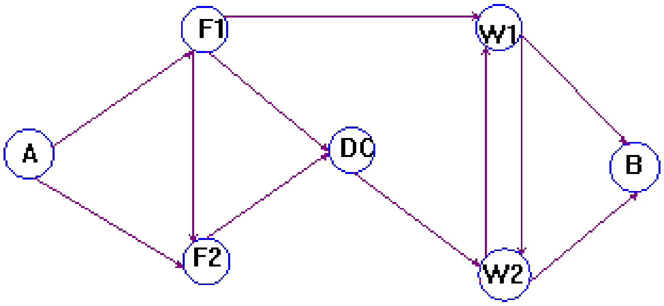


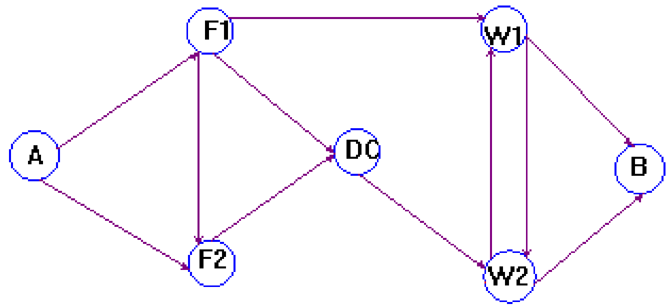

1
A
2
Q
P
B
3

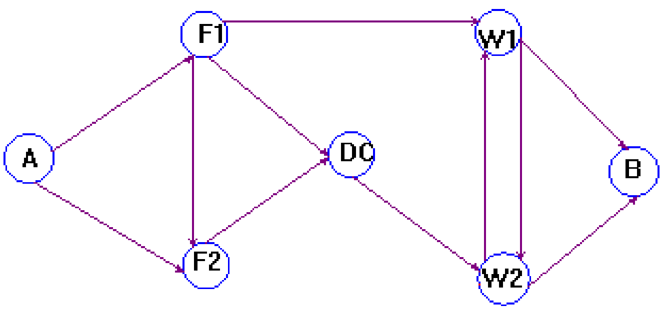

1
A
2
Q
P
B
3

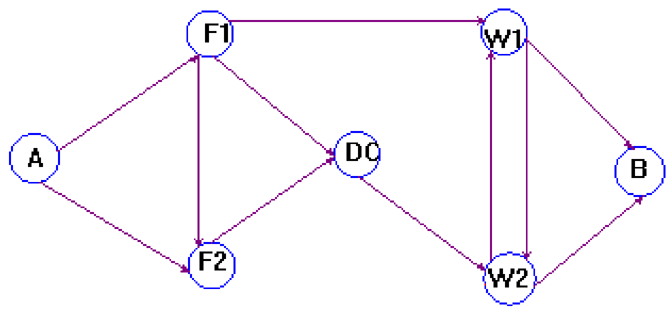

1
A
2
Q
P
B
3

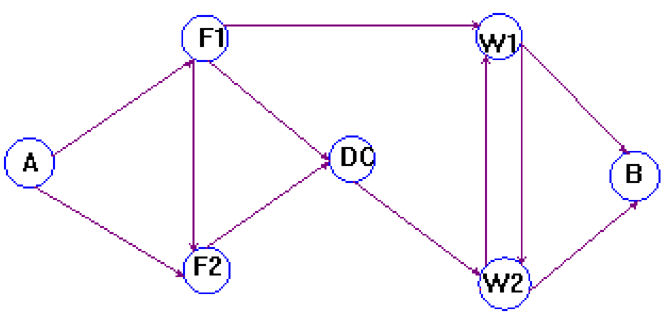
7

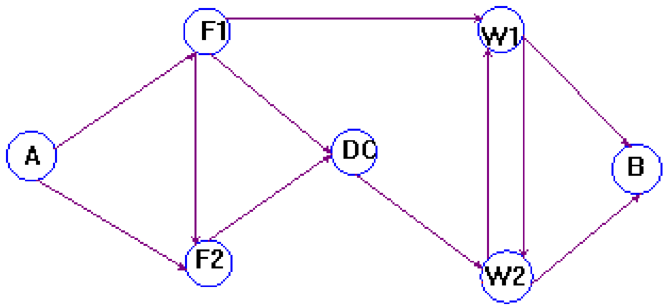

F1
W1
A
DC
B
F2
W2

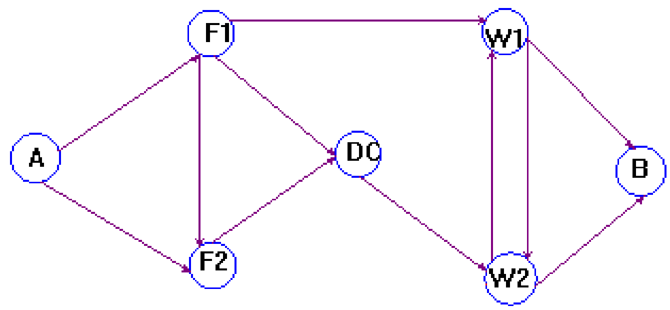

F1
W1
A
DC
B
F2
W2


F1
W1
A
DC
B
F2
W2

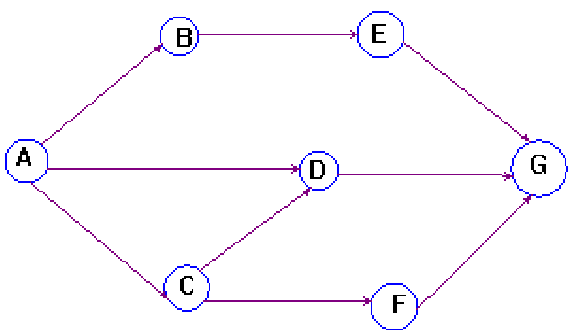

F1
W1
A
DC
B
F2
W2

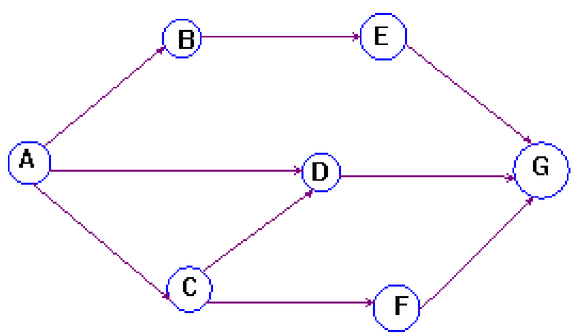

F1
W1
A
DC
B
F2
W2

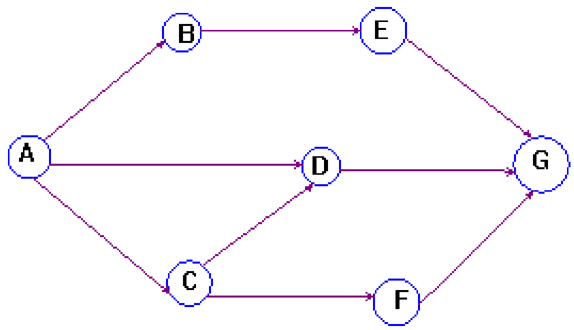


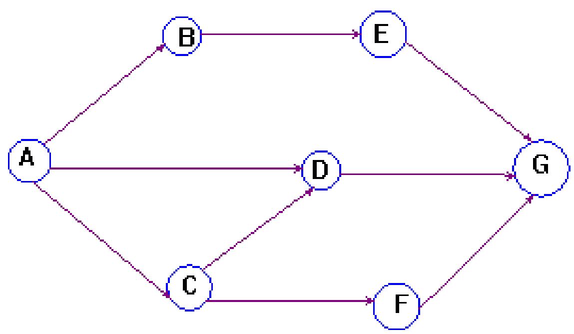


8 (Gebruik deze bijlage voor de hulpnetwerken van de kosten)



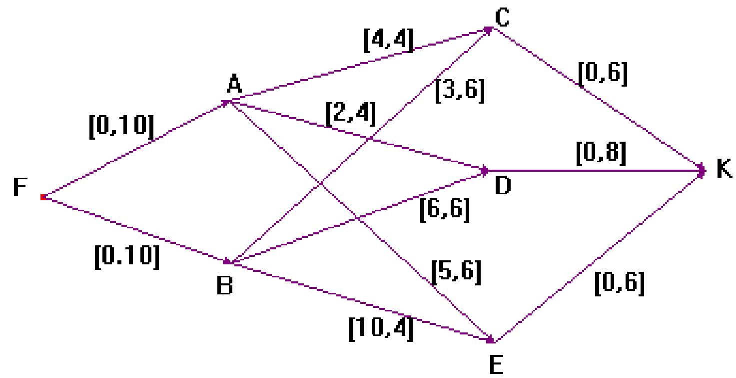



A
B
C
D
E
F
G


A
B
C
D
E
F
G

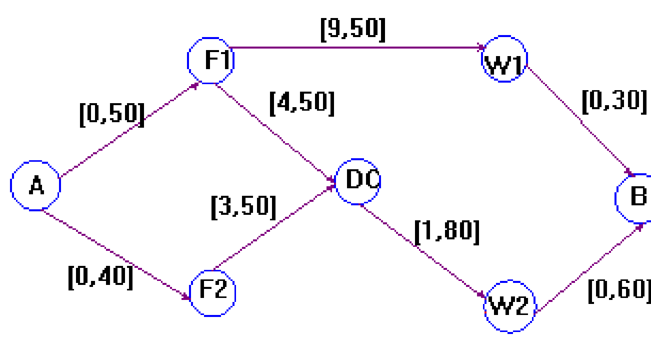
Toetsopgaven bij minimale-kosten-maximale-stromen.

T1 Vanuit 2 plaatsen A en B moeten 10 eenheden goederen getransporteerd worden naar de plaatsen C, D en E. De gevraagde hoeveelheden in de plaatsen C, D en E zijn respectievelijk 6, 8 en 6. In het netwerk hiernaast zijn 2 extra punten F en K toegevoegd met kosten 0 die aangeven de te transporteren hoeveelheden in de plaatsen A en B en de gevraagde hoeveelheden in de punten C, D en E. Bij de andere pijlen stelt het eerste getal de kosten per getransporteerde eenheid voor en het tweede getal geeft aan hoeveel er maximaal getransporteerd kan worden.



Bereken de minimale transportkosten en schrijf op hoe het vervoer zal plaatsvinden.

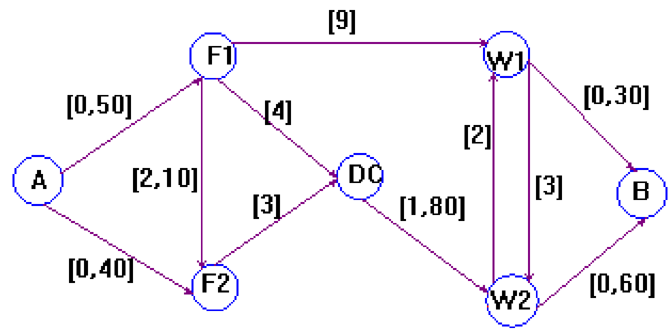
T2 Vanuit 2 fabrieken F1 en F2 moeten goederen getransporteerd worden naar 2 warenhuizen. DC is een distributiecentrum. In het netwerk is het eerste getal bij de pijl de kosten per te transporteren eenheid in veelvouden van honderd euro. Het tweede getal is de maximale hoeveelheid die getransporteerd kan worden. Om aan te geven hoeveel goederen getransporteerd moeten worden is een extra knooppunt A in het netwerk aangegeven met kosten 0 bij de pijlen van A naar F1 en F2. De gevraagde hoeveelheden in de warenhuizen W1 en W2 zijn respectievelijk 30 en 60 eenheden. In de graaf is een extra knooppunt B getekend met kosten 0 bij de pijlen van W1 en W2 naar B.



Bereken de minimale transportkosten en schrijf op hoe het vervoer zal plaatsvinden.

T3

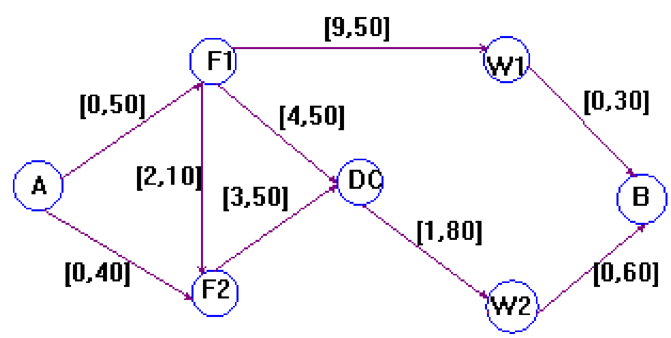
Vanuit 2 fabrieken F1 en F2 moeten goederen getransporteerd worden naar 2 warenhuizen W1 en W2. DC is een distributiecentrum. In het netwerk stelt het eerste getal bij de pijl voor de kosten per te transporteren eenheid in veelvouden van 100 euro. Het tweede getal geeft aan de maximale hoeveelheid die langs deze weg getransporteerd kan worden.



Staat er bij een pijl maar één getal, dan is er geen grens aan de te transporteren hoeveelheid en stelt dit getal dus voor de kosten in veelvouden van 100 euro per getransporteerde eenheid. Er kunnen ook goederen getransporteerd worden van W1naar W2 en van W2 naar W1. Om aan te geven hoeveel goederen getransporteerd moeten worden is een extra knooppunt A in de graaf aangegeven met kosten 0 bij de pijlen van A naar F1 en F2. De gevraagde hoeveelheden in de warenhuizen W1 en W2 zijn respectievelijk 30 en 60 eenheden. In de graaf is een extra knooppunt B getekend met kosten 0 bij de pijlen van W1 en W2 naar B. Bereken de minimale transportkosten en schrijf op hoe het vervoer zal plaatsvinden.

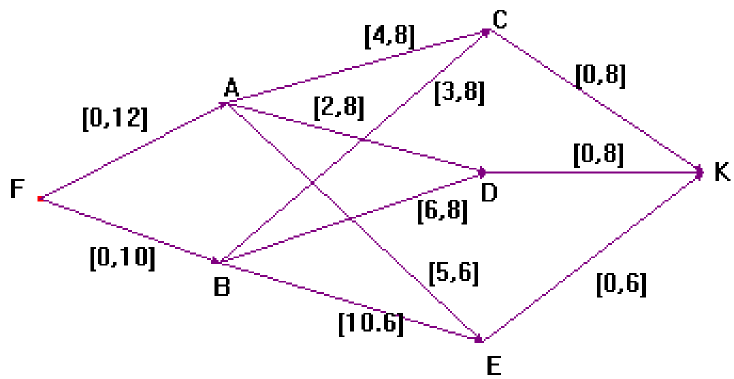
T4

Vanuit 2 fabrieken F1 en F2 moeten goederen getransporteerd worden naar 2 warenhuizen W1 en W2. DC is een distributiecentrum. In het netwerk is het eerste getal bij de pijl de kosten per te transporteren eenheid in veelvouden van 100 euro. Het tweede getal geeft aan de maximale hoeveelheid die langs deze weg getransporteerd kan worden.

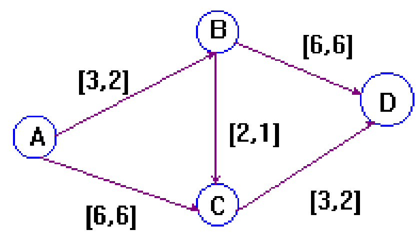


Om aan te geven hoeveel goederen getransporteerd moeten worden is een extra knooppunt A in het netwerk aangegeven met kosten 0 bij de pijlen van A naar F1 en F2. De gevraagde hoeveelheden in de warenhuizen W1 en W2 zijn respectievelijk 30 en 60 eenheden. In de graaf is een extra knooppunt B getekend met kosten 0 bij de pijlen van W1 en W2 naar B. Bereken de minimale transportkosten en schrijf op hoe het vervoer zal plaatsvinden.

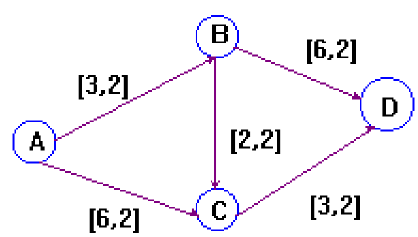
T5 Vanuit 2 plaatsen A en B moeten respectievelijk 12 en 10 eenheden goederen getransporteerd worden naar de plaatsen C, D en E. De gevraagde hoeveelheden in de plaatsen C, D en E zijn respectievelijk 8, 8 en 6. In het netwerk hiernaast zijn 2 extra punten F en K toegevoegd met kosten 0 die aangeven de te transporteren hoeveelheden in de plaatsen A en B en de gevraagde hoeveelheden in de punten C, D en E. Bij de andere pijlen stelt het eerste getal voor de kosten per getransporteerde eenheid.
Het tweede getal geeft aan hoeveel er maximaal getransporteerd kan worden via de betreffende route. Bereken de minimale transportkosten en schrijf op hoe het vervoer zal plaatsvinden.



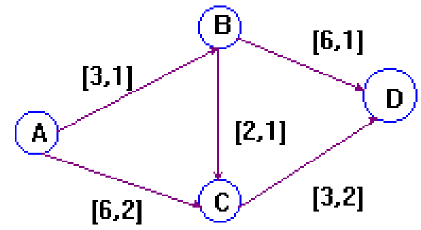
T6 In het netwerk dat hiernaast is weergegeven stelt het eerste getal de transportkosten per eenheid voor en het tweede getal de maximale capaciteit voor het betreffende traject.
Bepaal een stroom met waarde 3 van punt A naar punt D waarbij de kosten minimaal zijn.



T7 In het netwerk dat hiernaast is weergegeven stelt het eerste getal de transportkosten per eenheid voor en het tweede getal de maximale capaciteit voor het betreffende traject.
Bepaal een stroom met waarde 3 van punt A naar punt D waarbij de kosten minimaal zijn.



T8 In het netwerk dat hiernaast is weergegeven stelt het eerste getal de transportkosten per eenheid voor en het tweede getal de maximale capaciteit voor het betreffende traject.
Bepaal een stroom met waarde 3 van punt A naar punt D waarbij de kosten minimaal zijn.



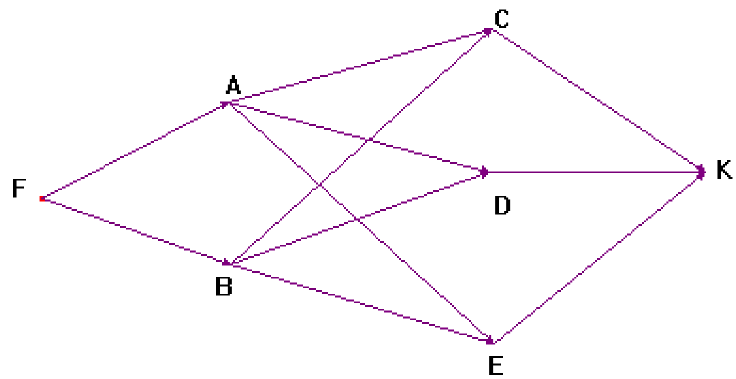
T9 A Company produces precision medical instruments at two factories. Three medical centers have placed orders for this month's production output. The table below shows what the cost would be for shipping each unit from factory to each of the customers.
Also shown are the number of units that will be produced at each factory and the number of units ordered by each customer.

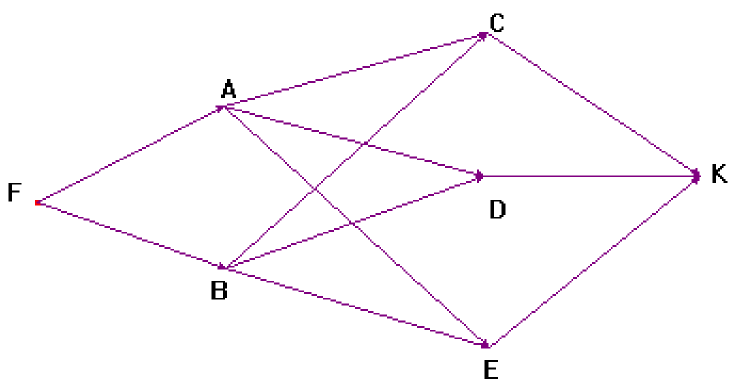
To / From	Unit shipping cost			Output
	Customer 1	Customer 2	Customer 3	
Factory 1	€ 600	€ 800	€ 700	400 units
Factory 2	€ 400	€ 900	€ 600	500 units
Order size	300 units	200 units	400 units	

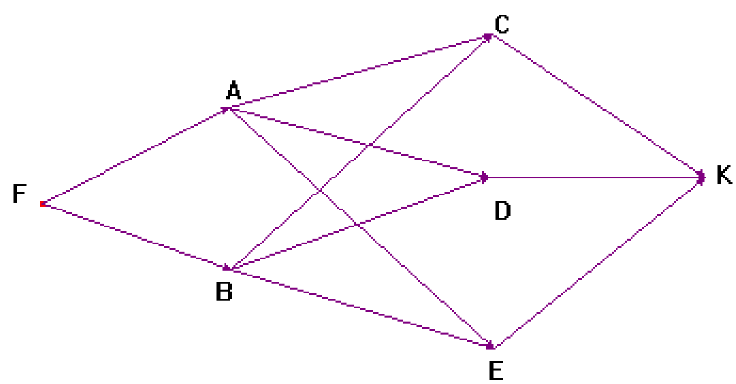
A decision needs to be made about the shipping plan for how many units to ship from each factory to each customer with a minimum of costs.

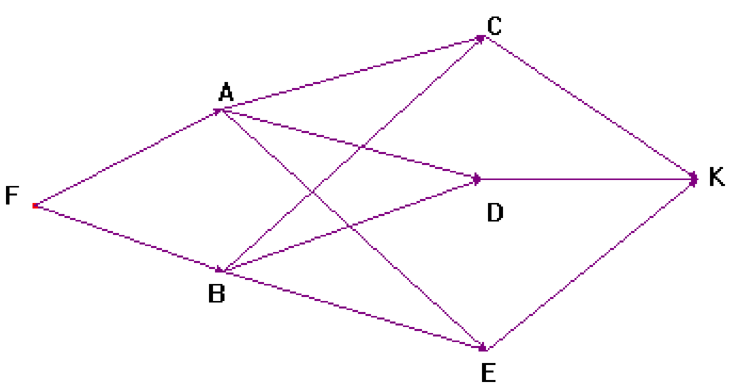
Bijlage bij de toetsopgaven.

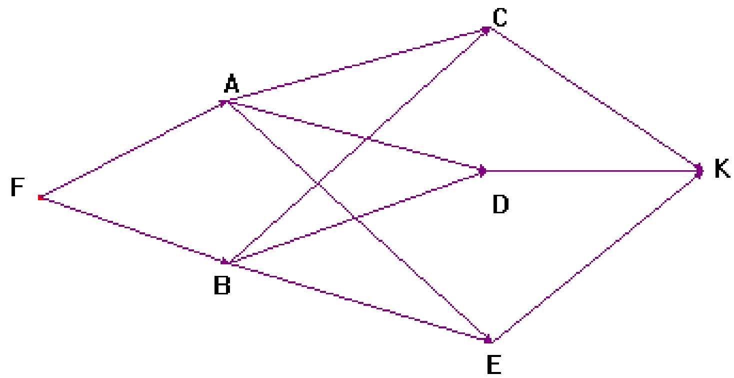
T1 (Gebruik de getekende netwerken voor de transportkosten)

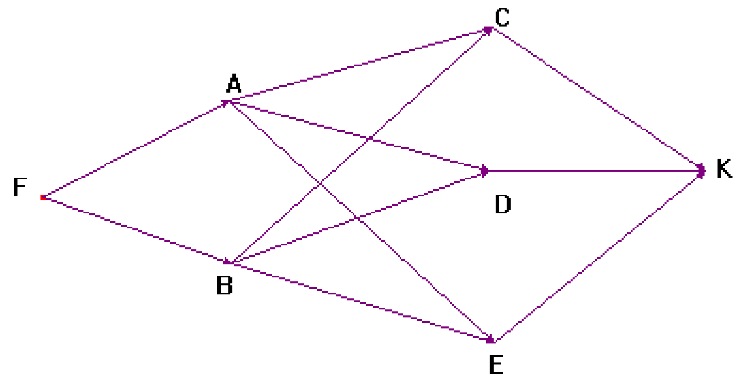




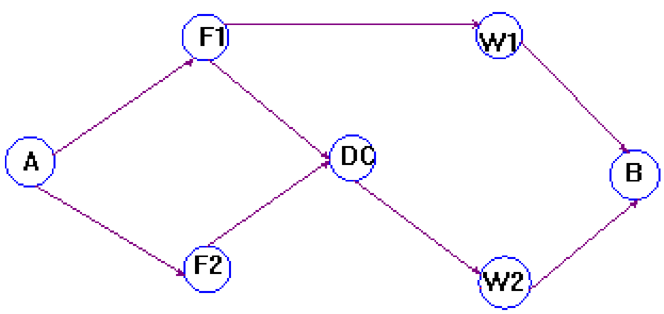


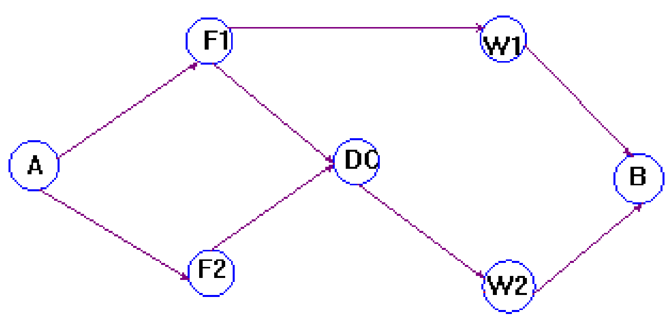


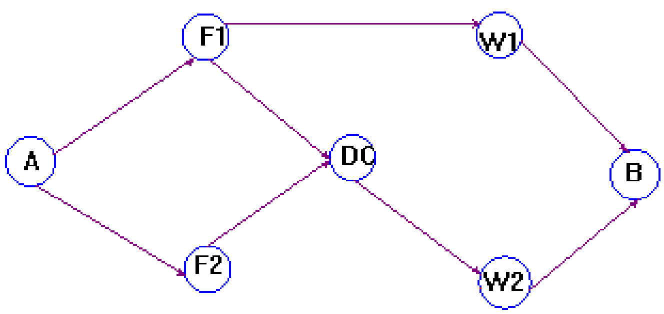


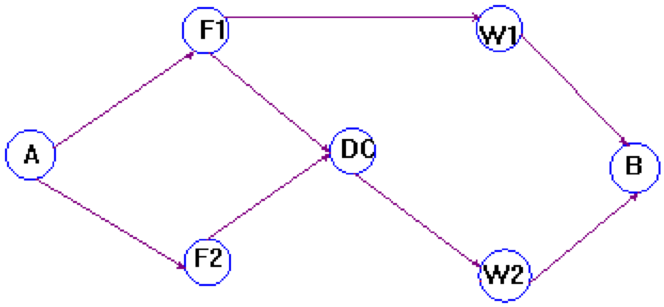


T2 (Gebruik de getekende netwerken voor de transportkosten)

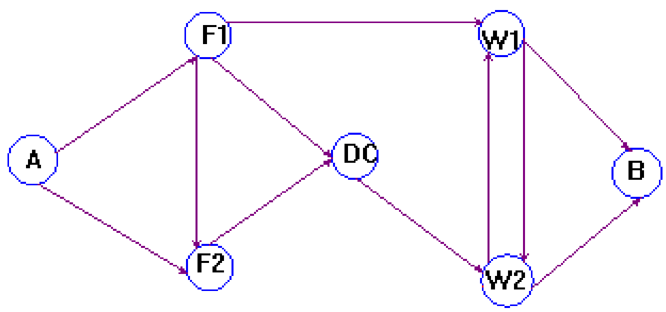


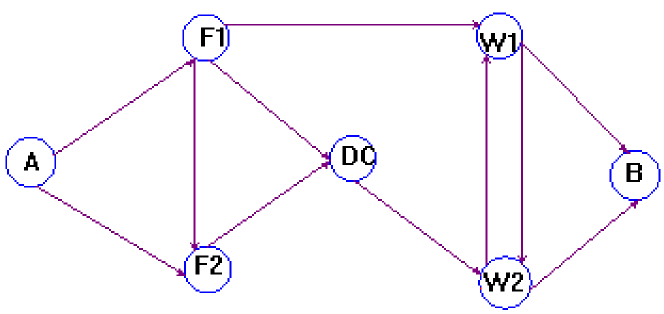


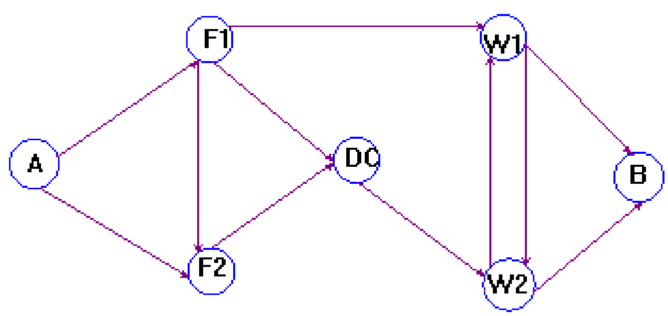


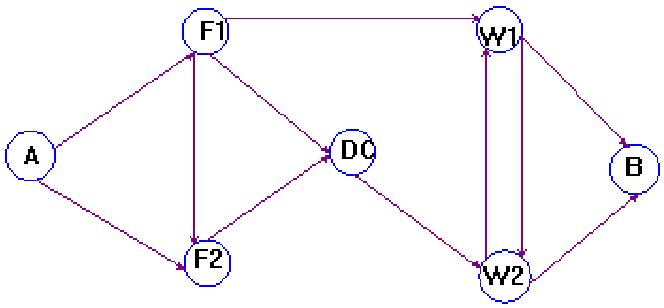


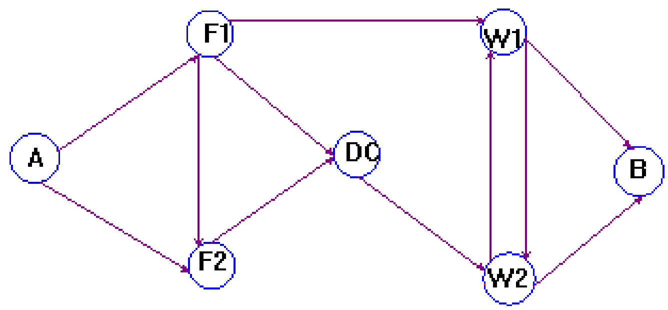
T3

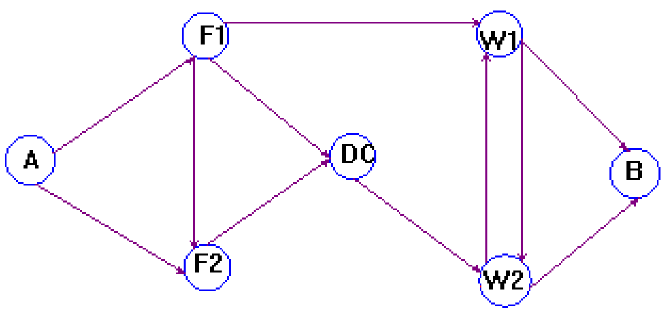


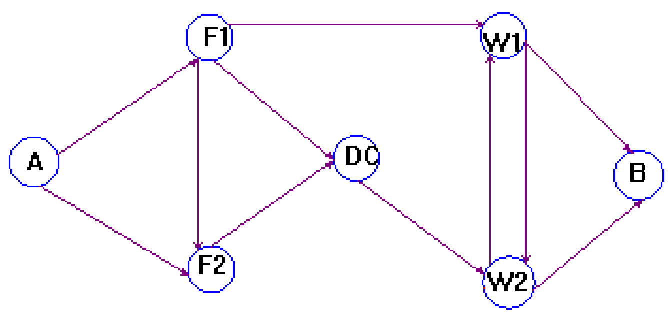




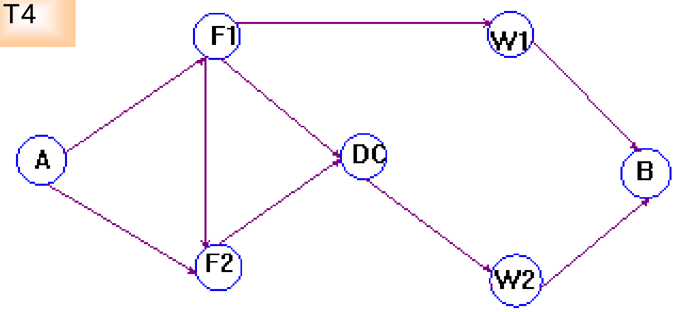

F1
W1
A
DC
B
F2
W2

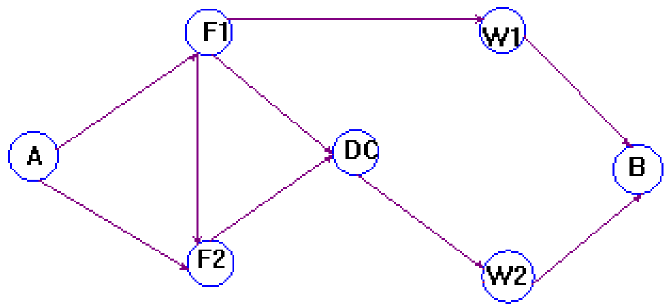

F1
W1
A
DC
B
F2
W2

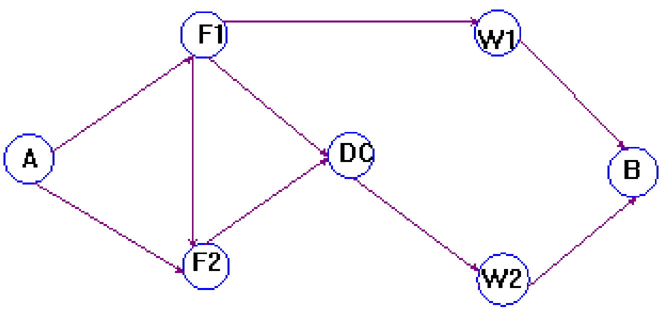

F1
W1
A
DC
B
F2
W2

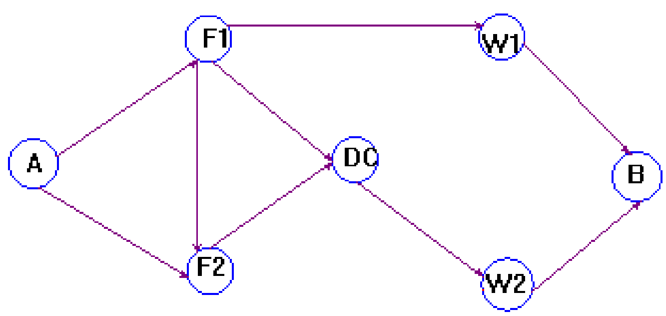

F1
W1
A
DC
B
F2
W2

T4

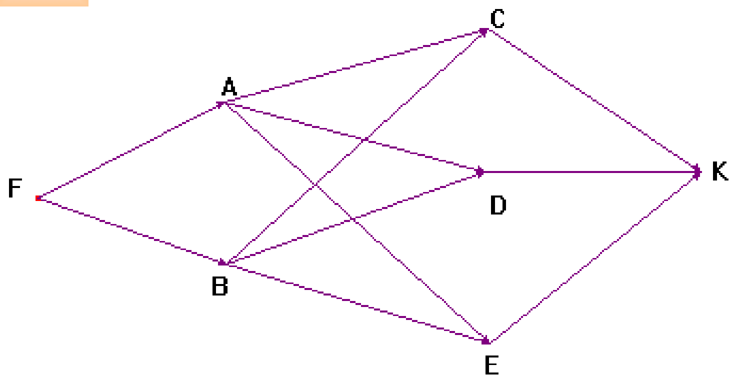


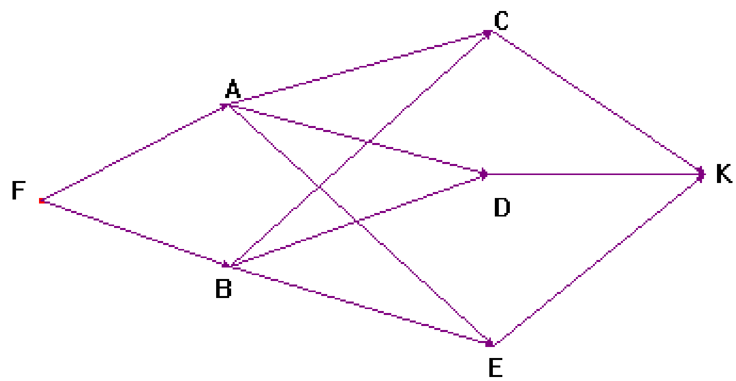


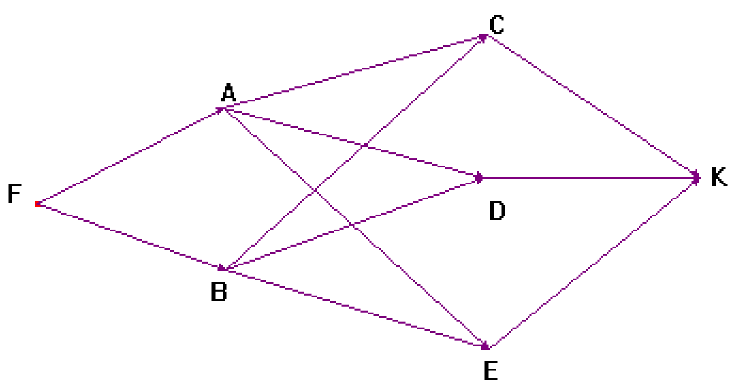


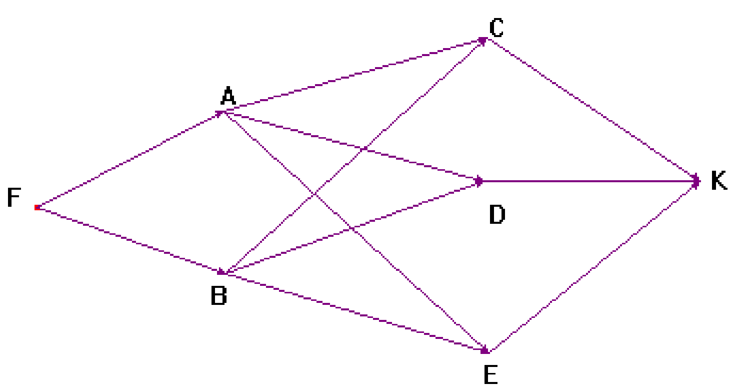


T5 (Gebruik de getekende netwerken voor de transportkosten)

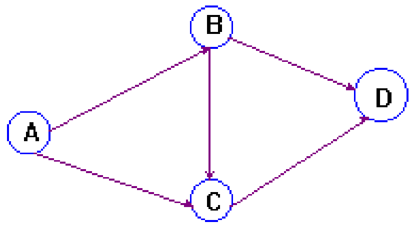


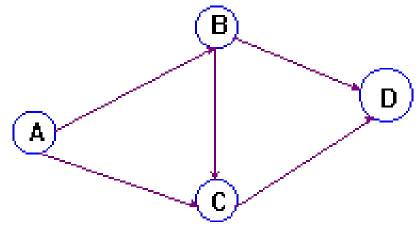


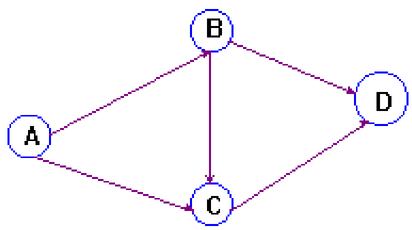




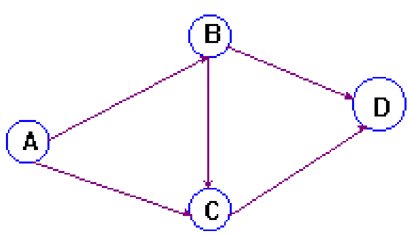
T6 (Gebruik de getekende netwerken voor de transportkosten)

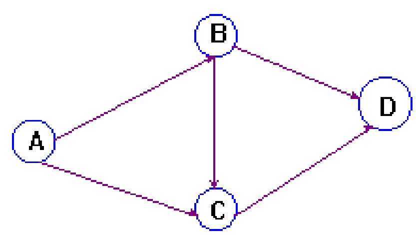


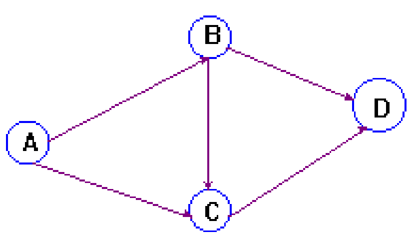




T7 (Gebruik de getekende netwerken voor de transportkosten)

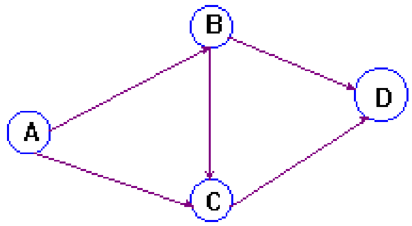


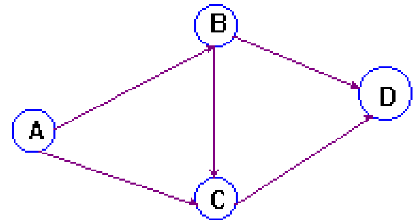


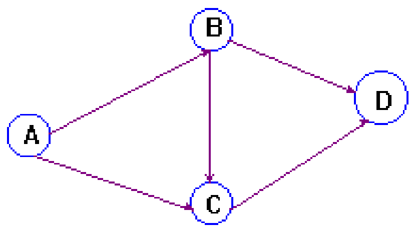


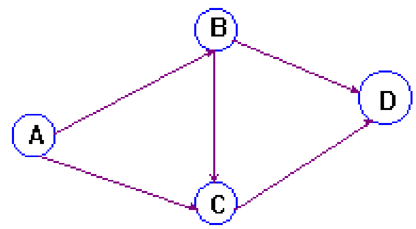
T8

(Gebruik de getekende netwerken voor de transportkosten)

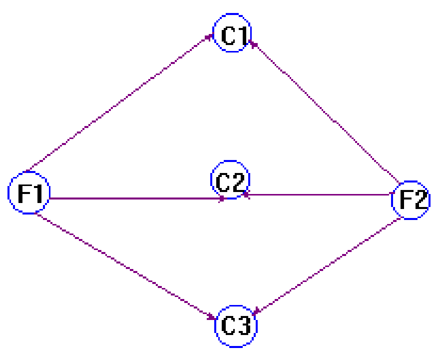


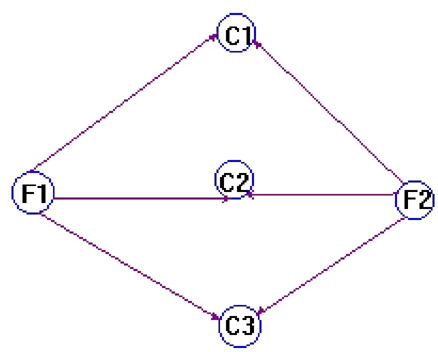


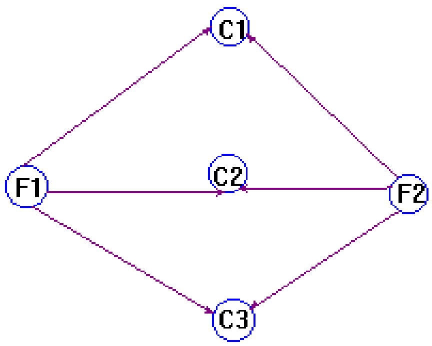


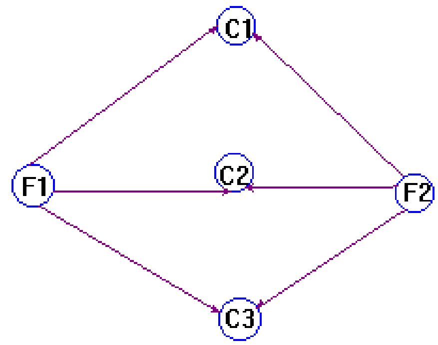


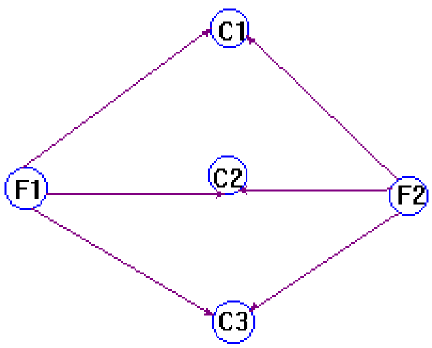
T9

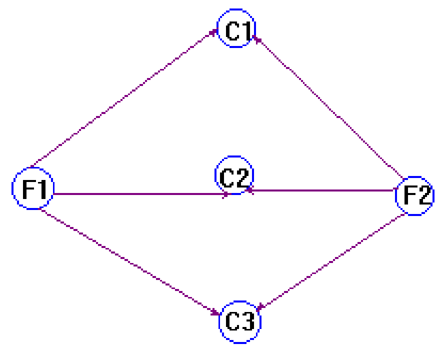


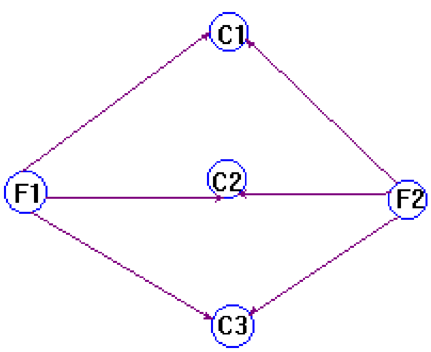


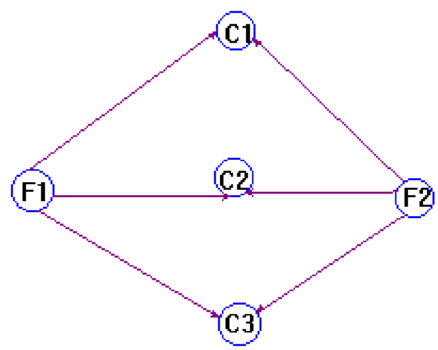

C1
C2
C3
F1
F2


C1
C2
C3
F1
F2


C1
C2
C3
F1
F2

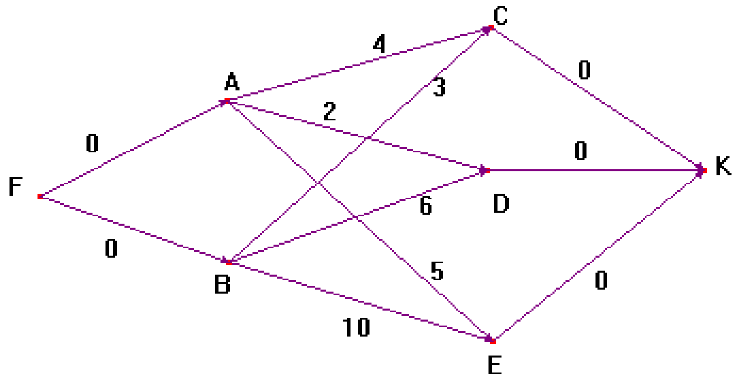

C1
C2
C3
F1
F2


C1
C2
C3
F1
F2

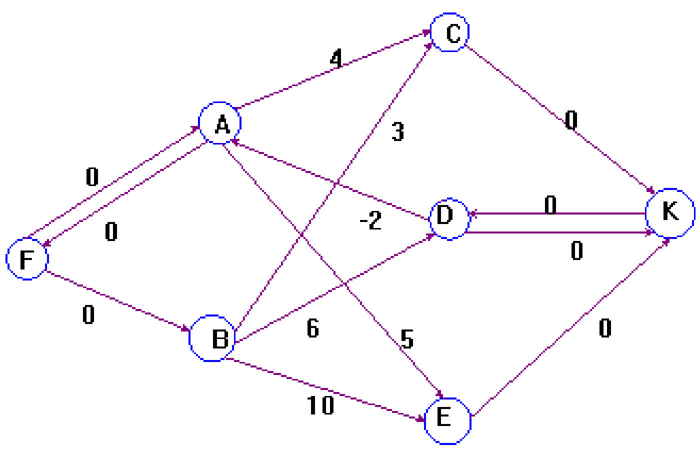

C1
C2
C3
F1
F2

Uitwerkingen van de toetsopgaven.

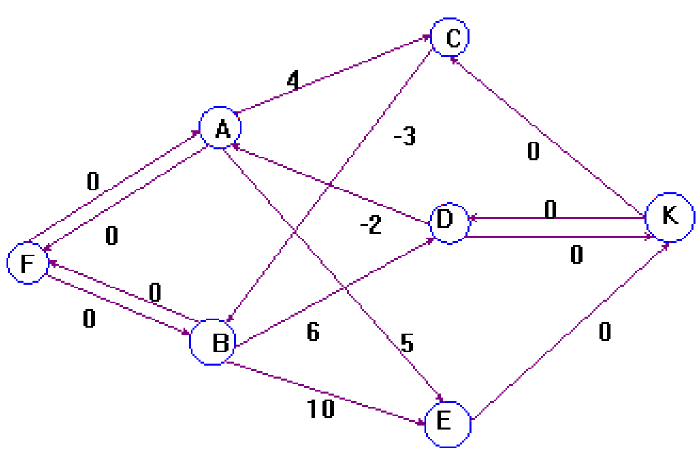
T1 (Alleen de hulpnetwerken van de transportkosten zijn weergegeven)



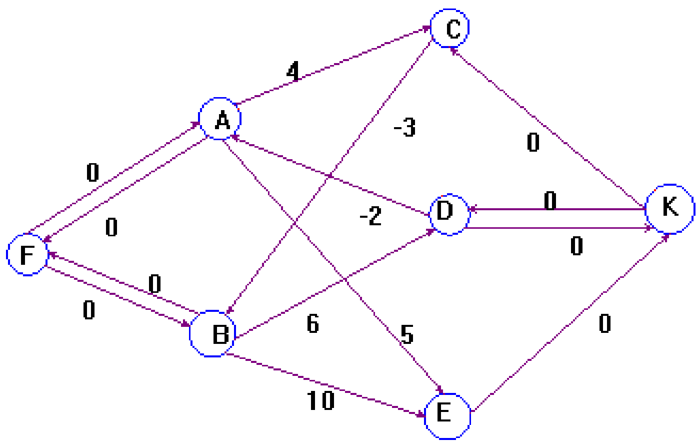
De minimale kosten zijn 2 per eenheid van A naar D.
Er kunnen 4 eenheden getransporteerd worden
De kosten zijn 8 kosteneenhede n.



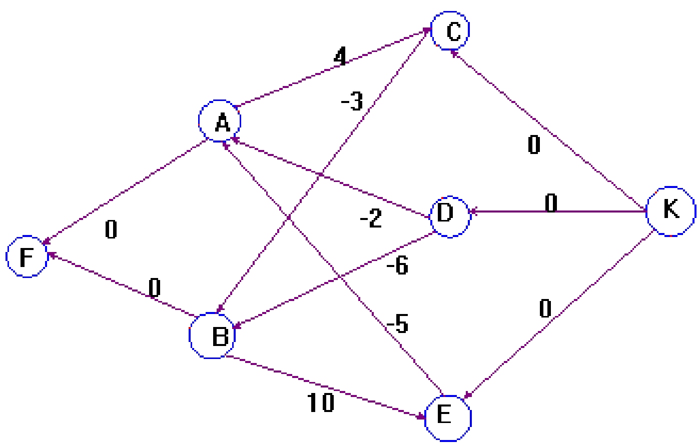
De minimale kosten zijn 3 per eenheid van B naar C.
Er kunnen 6 eenheden getransporteerd worden.
De kosten zijn 18 kosteneenheden.



De minimale kosten zijn 5 per eenheid van A naar E.
Er kunnen 6 eenheden verplaatst worden.
De kosten zijn 30 kosteneenheden.

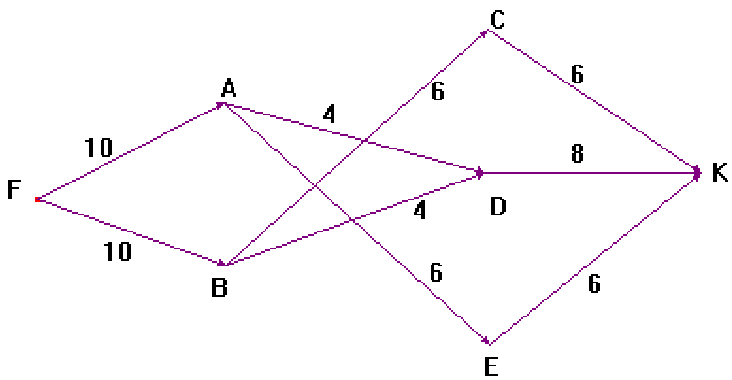


De minimale kosten zijn 6 per eenheid van B naar D. Er kunnen nog 4 eenheden verplaatst worden. De kosten zijn 24 kosteneenheden.



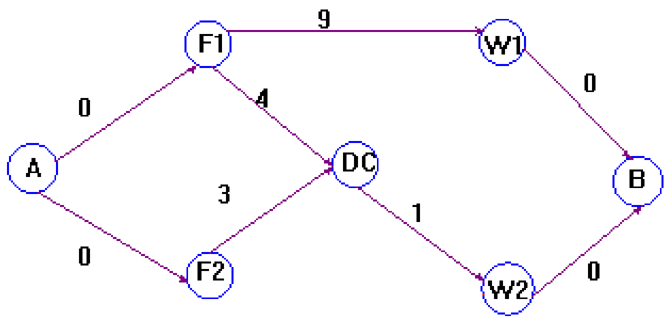
Er is geen transport meer mogelijk.

Het transport gaat dan als volgt:

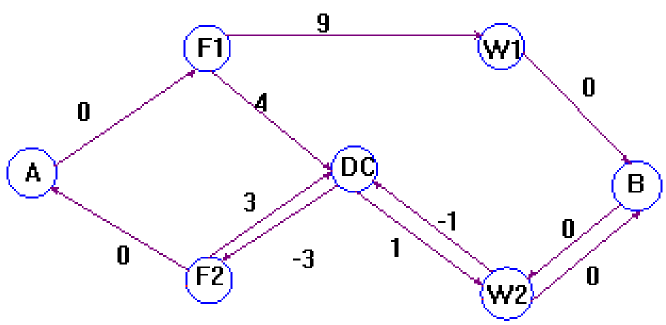


De totale kosten zijn: 8 + 18 + 30 + 24 = 80 kosteneenheden.

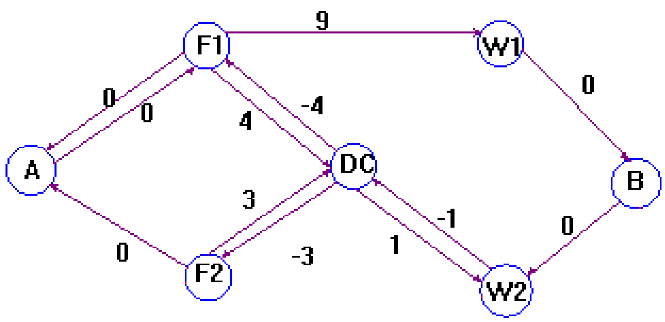
T2 (Alleen de hulpnetwerken van de transportkosten zijn weergegeven)



De minimale transportkosten zijn 4 per eenheid van F2 via DC naar W2.
Er kunnen 40 eenheden getransporteerd worden.
De kosten bedragen 160.



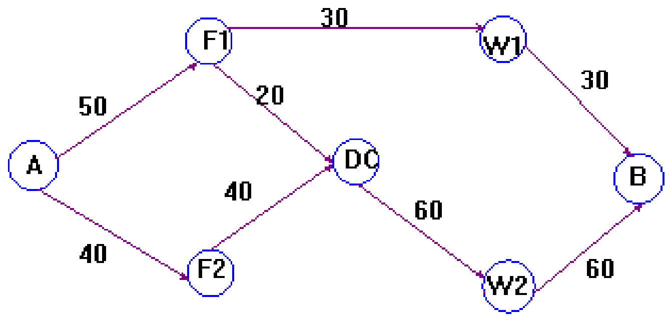
De minimale transportkosten zijn 5 per eenheid van F1 via DC naar W2.
Er kunnen 20 eenheden getransporteerd worden. De kosten bedragen 100.



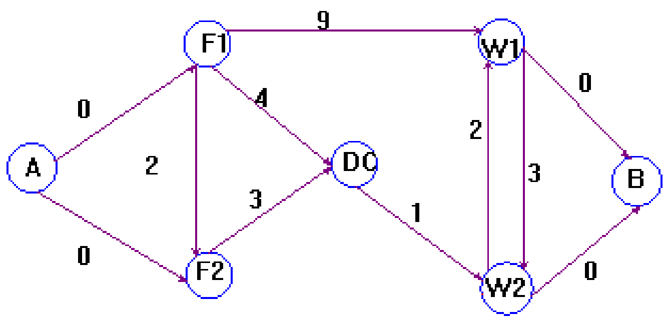
De minimale transportkosten zijn 9 per eenheid van F1 naar W1.
Er moeten nog 30 eenheden getransporteerd worden.
De kosten bedragen 270.

De totale kosten bedragen 530 x 100 = 53000 euro.

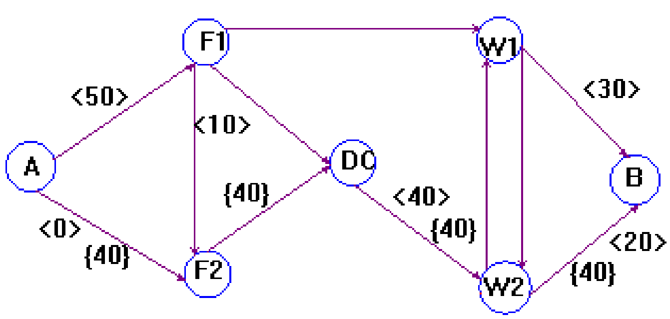
Het transport gaat dan als volgt:

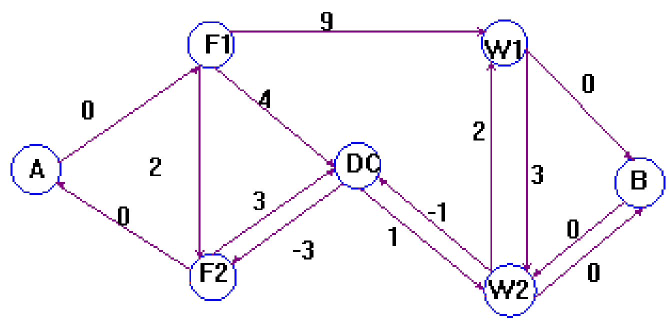


T3

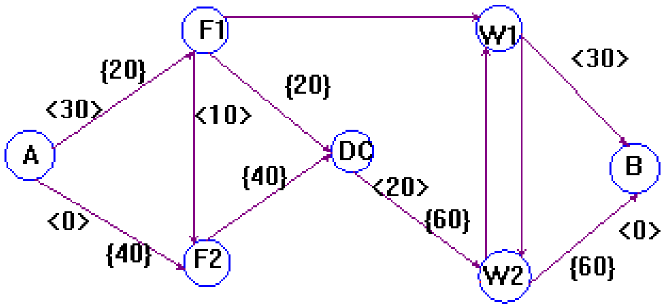


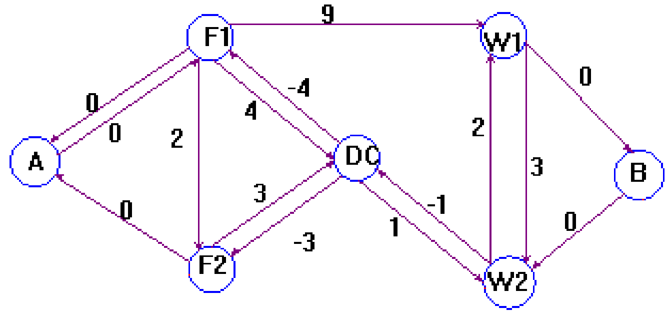
De minimale kosten per eenheid zijn 4 van F2 (A) via DC naar W2 (B). Er kunnen 40 eenheden getransporteerd worden. De kosten bedragen 16000 euro.



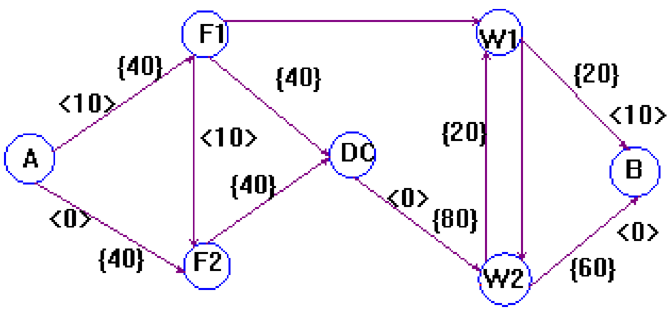


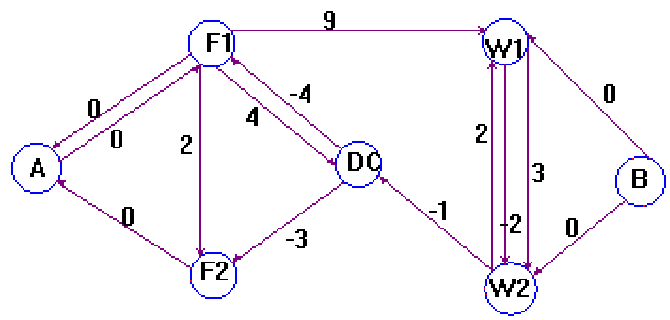
De minimale kosten per eenheid zijn 5 van F1(A) naar DC en W2 (B). Er kunnen nog 20 eenheden vervoerd worden. De kosten bedragen 10000 euro.



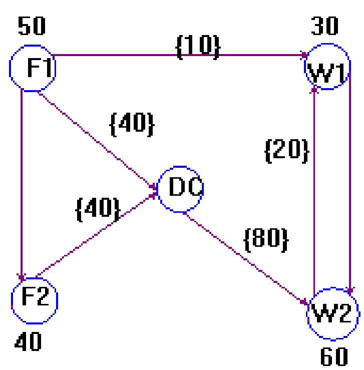


De minimale kosten per eenheid zijn 7 van F1(A) via DC en W2 naar W1(B). Er kunnen 20 eenheden vervoerd worden. De kosten bedragen 14000 euro.





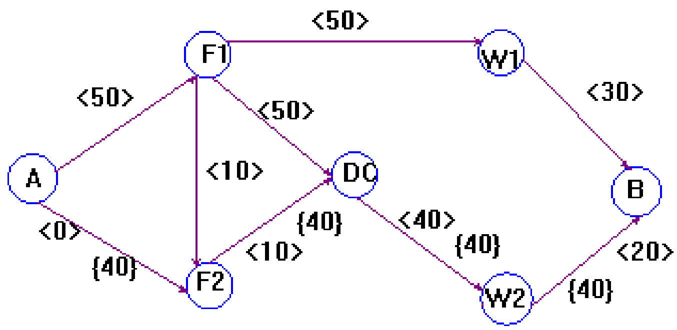
De minimale kosten per eenheid zijn 9 van F1(A) naar W1(B).
Er kunnen 10 eenheden vervoerd worden. De kosten zijn 9000 euro.

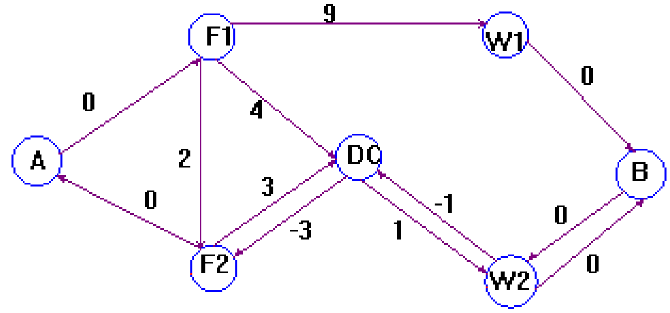


Er is geen transport meer mogelijk van F1, F2 (dus van A) naar W1, W2 (dus naar B).
De maximale kosten bedragen 16000 + 10000 + 14000 + 9000 = 49000 euro.
Het optimale transport (zonder de hulppunten A en B) is hier boven weergegeven.

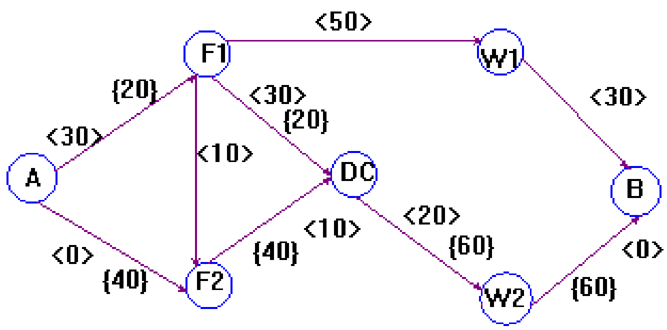
T4

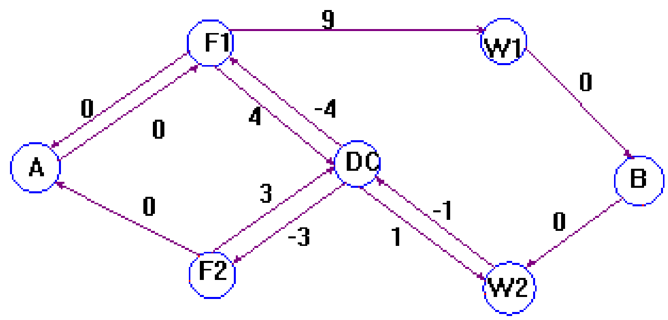
De minimale kosten zijn 4 per eenheid van F2 (A) via DC naar W2 (B). Er kunnen 40 eenheden getransporteerd worden. De kosten bedragen 16000 euro.



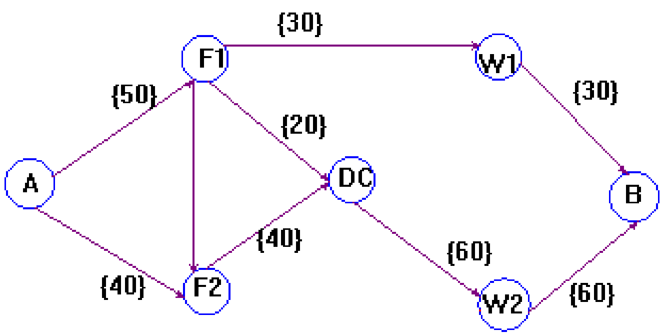


De minimale kosten zijn 5 per eenheid van F1 (A) via DC naar W2 (B). Er kunnen 20 eenheden getransporteerd worden. De kosten zijn 10000 euro.

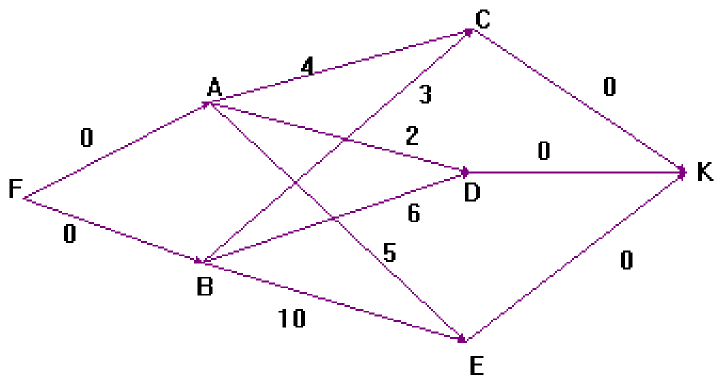




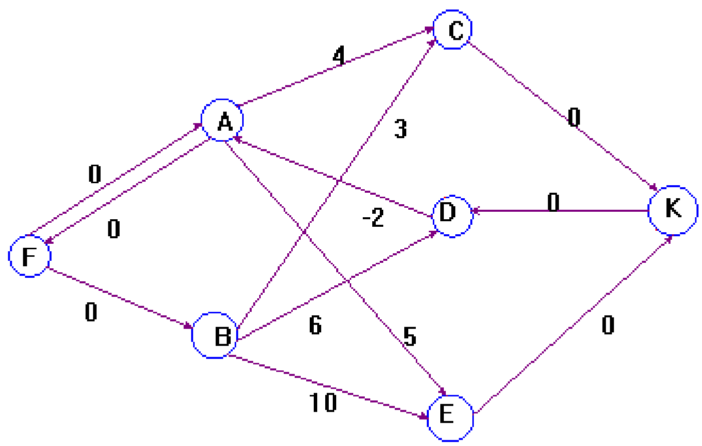
Er kunnen nu nog 30 eenheden verplaatst worden van F1 (A) naar W1 (B).
De kosten zijn 27000 euro.
De totale kosten zijn 53000 euro.
Het uiteindelijke transportschema is hier onder weergegeven.



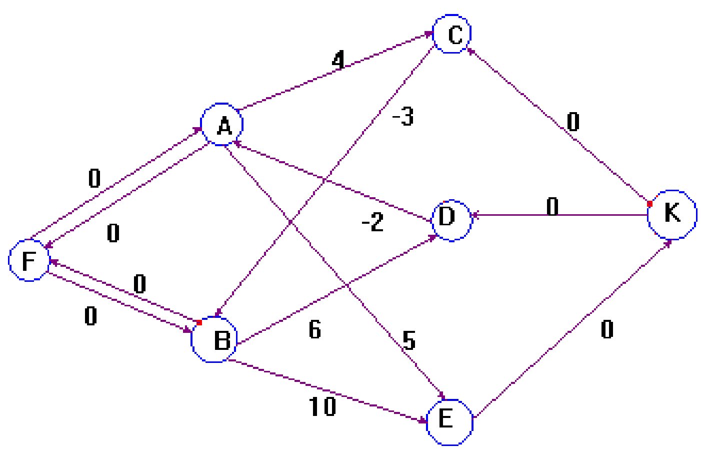
T5 (Alleen de hulpnetwerken van de transportkosten zijn weergegeven)



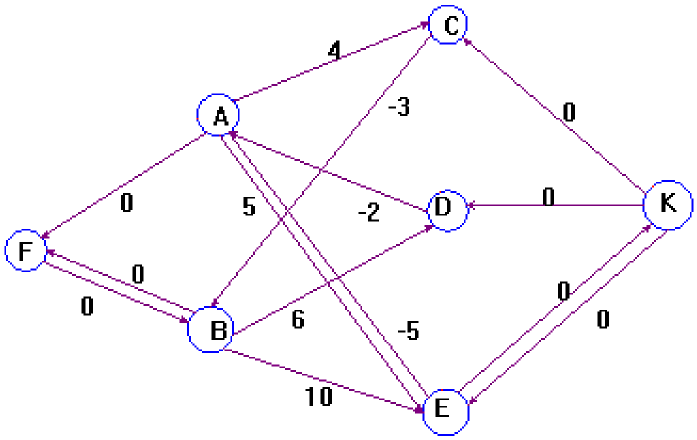
De minimale kosten zijn 2 van A naar D.
Er kunnen 8 eenheden getransporteerd worden
De kosten zijn 16 kosteneenheden.



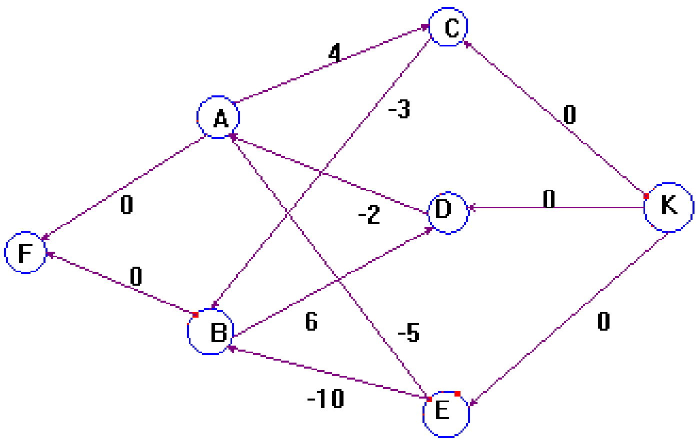
De minimale kosten zijn 3 van B naar C. Er kunnen 8 eenheden getransporteerd worden. De kosten zijn 24 kosteneenheden



De minimale kosten zijn 5 van A naar E. Er kunnen nog 4 eenheden getransporteerd worden. De kosten zijn 20 kosteneenheden.

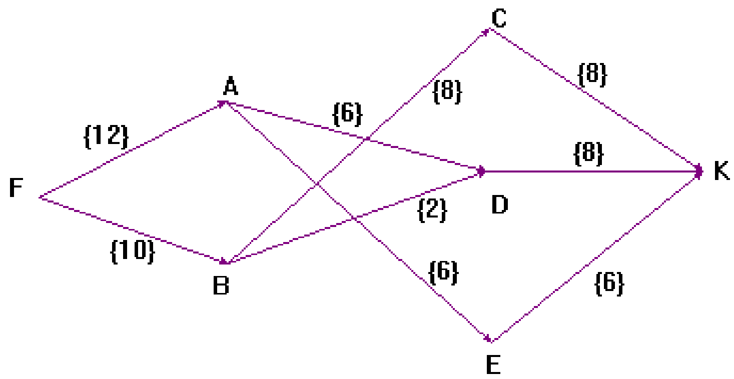


Er kunnen nog 2 eenheden van B, via D, A naar E getransporteerd worden. De kosten zijn 18 kosteneenheden

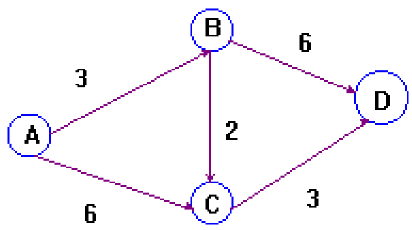


Er is geen transport meer mogelijk.

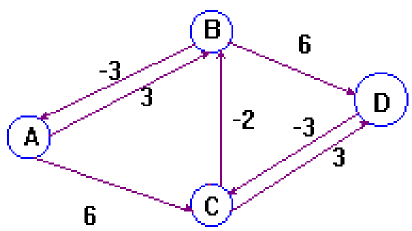
De totale kosten zijn 16 + 24 + 20 + 18 = 78 kosteneenheden.
Het transport ziet er als volgt uit.



T6 (Alleen de hulpnetwerken van de transportkosten zijn weergegeven)

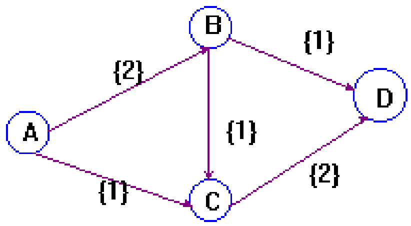


De minimale kosten zijn 8 via de route ABCD.
Er kan 1 eenheid vervoerd worden. De kosten zijn 8.



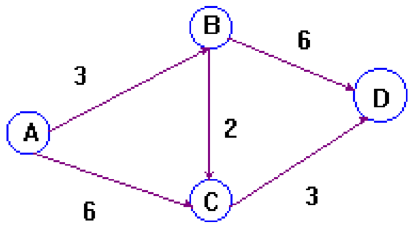
De minimale kosten zijn 9 via route ABD of via route ACD.
Via route ABD kan nog 1 eenheid vervoerd worden.
De kosten zijn 9.
Ook via route ACD kan 1 eenheid vervoerd worden.

De kosten zijn 9.

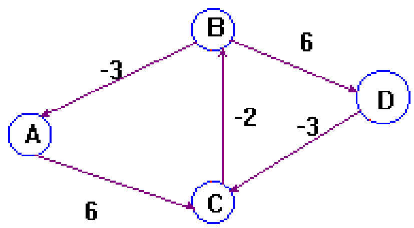


De totale kosten zijn 8 + 9 + 9 = 26 kosteneenheden.
Een transport met waarde 3 staat hiernaast.

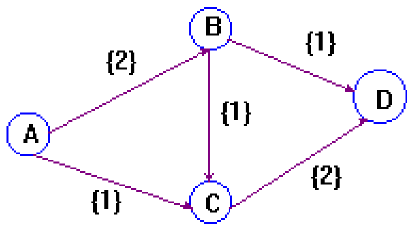
T7



De minimale kosten zijn 8 via de route ABCD.
Er kunnen 2 eenheden vervoerd worden.
De kosten zijn 16 kosteneenheden.

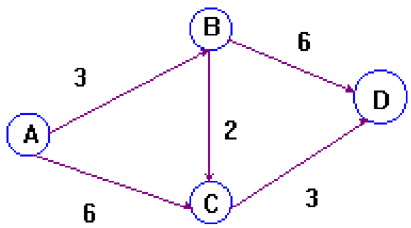


De minimale kosten zijn 6 + -2 + 6 = 10.
Er moet nog 1 eenheid vervoerd worden.
De kosten zijn 10 kosteneenheden.

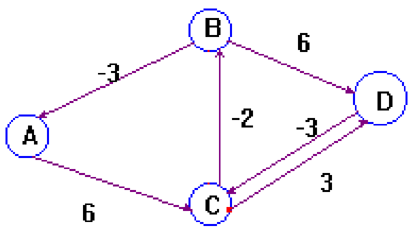


De totale kosten zijn 26 kosteneenheden.
Het transport met waarde 3 staat hiernaast.

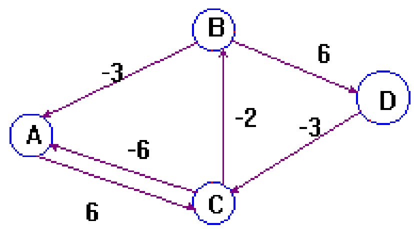
T8



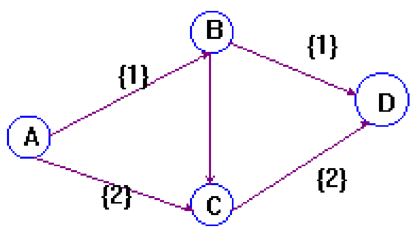
De minimale kosten zijn 8 via de route ABCD.
Er kan 1 eenheid vervoerd worden. De kosten zijn 8 kosteneenheden.



De minimale kosten zijn 9 via route ACD.
Er kan 1 eenheid vervoerd worden.
De kosten zijn 9 kosteneenheden.

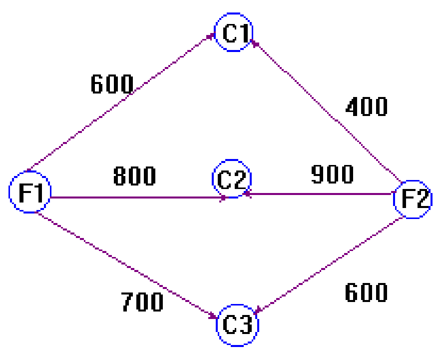


De minimale kosten zijn 10 via route ACBD.
Er moet nog 1 eenheid vervoerd worden.
De kosten zijn 10 kosteneenheden.

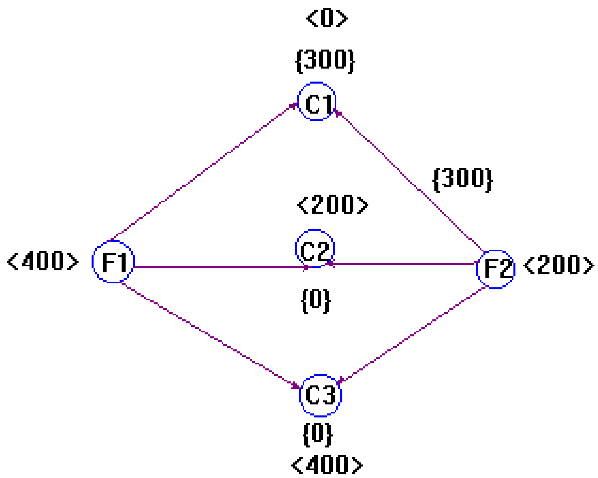


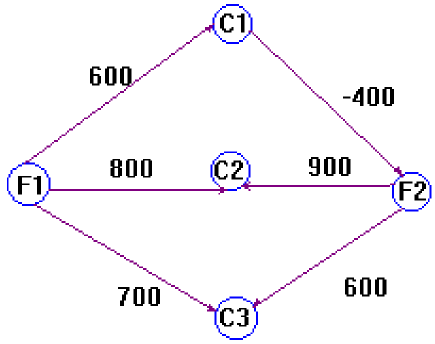
De totale kosten zijn 27 kosteneenheden.
Het transport is hiernaast aangegeven.

T9

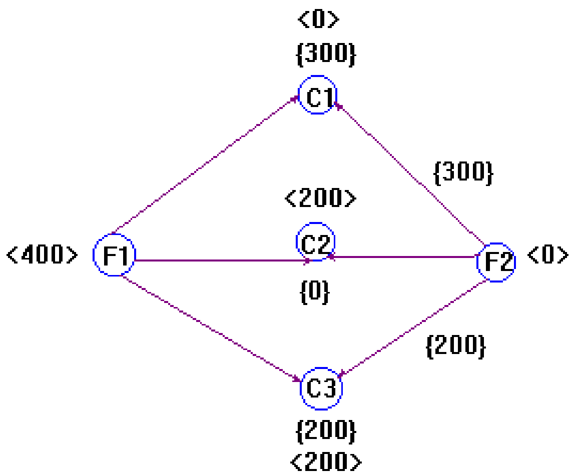


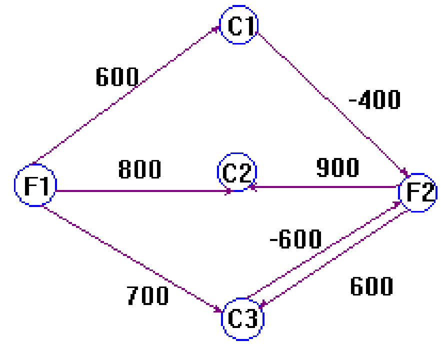
De minimale kosten zijn € 400 van F2 naar C1.
Er kunnen 300 eenheden verstuurd worden
De kosten zijn €120000.



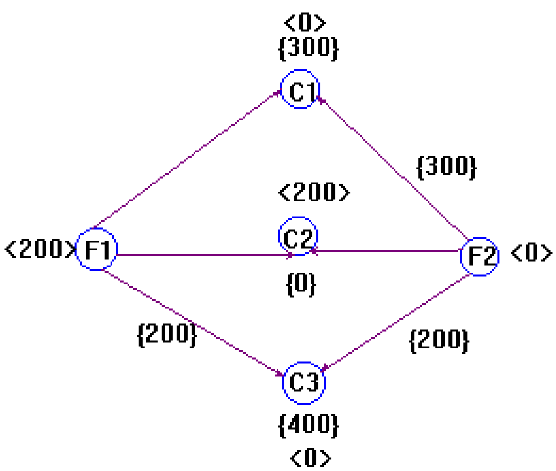


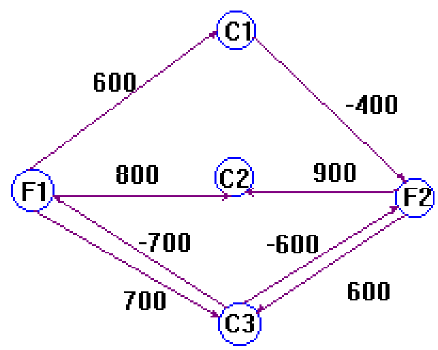
In het linker netwerk staat de voorlopige stroom. In het rechter netwerk staan de kosten weer vermeld.
De minimale kosten zijn € 600 van F2 naar C3. Er kunnen 200 eenheden verstuurd worden. De kosten bedragen € 120000.





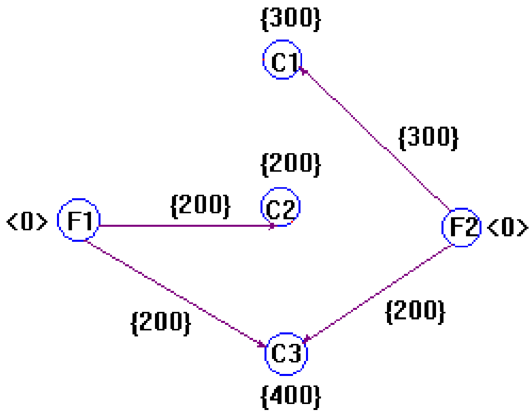
In de linker figuur is weer het voorlopige transport weergegeven.
De minimale kosten zijn € 700 van F1 naar C3. Er kunnen 200 eenheden verstuurd worden. De kosten zijn € 140000.





In de linker figuur is weer het voorlopige transport weergegeven.
De minimale kosten zijn € 800 van F1 naar C2. Er kunnen 200 eenheden verstuurd worden.
De kosten zijn € 160000.

Uit F1 en F2 is nu alles vervoerd.



De totale kosten zijn € 540000.
Het transportschema is hiernaast weergegeven.
(De niet gebruikte routes zijn weggelaten)