# Hoofdstuk 2

# Proposities

In de wiskunde en in de informatica, en ook in veel andere disciplines, is er behoefte aan redeneren. Om dat goed te kunnen doen moet men allereerst beschikken over een arsenaal van begrippen en uitdrukkingswijzen. Alleen wanneer men over deze zaken tot overeenstemming kan komen, bestaat er een redelijke kans dat twee of meer beoefenaren van een vak met elkaar kunnen praten zonder al te vaak in onzekerheid te verkeren over de betekenis van mededelingen die worden uitgewisseld.

We geven een paar voorbeelden van zinnen die men in de krant zou kunnen lezen:

"niemand kan dit bijna doen"

"kamer aangeboden voor student, tot 25 jaar"

"wegens lekkage kerncentrale gesloten"

Er bestaat in bovenstaande voorbeelden weinig kans op misverstanden omdat verkeerde (?) interpretatie onwaarschijnlijke situaties schetst. Echter ... het laatste bericht zou ook op de deur van een winkel kunnen hangen. En het is menigmaal voorgekomen dat een verdachte vrijgesproken is op grond van een onduidelijk gestelde beschuldiging.

Voorbeelden van een "vaktaal" in andere disciplines vinden we heel duidelijk in de protocollen van gerechtelijke uitspraken, en in notariële akten. Ook daar heeft men gekozen voor bepaalde vaste formuleringen om de zaken ondubbelzinnig vast te leggen. Voor een buitenstaander wordt het daardoor echter meestal niet duidelijker, vaak is juist het tegendeel het geval!

De manier waarop iets is opgeschreven valt onder het begrip *syntax*, de betekenis van het opgeschrevene valt onder het begrip *semantiek*. We kunnen dus zeggen dat "zeven" en "7" syntactisch verschillend en semantisch hetzelfde zijn.

We definiëren, omschrijven is een beter woord, nu het belangrijkste begrip van dit hoofdstuk. Graag zouden we dat wat preciezer doen, maar dat precieze begrippenapparaat moeten we juist nog opbouwen.

**Definitie 2.1** Een *propositie* is een zinvolle bewering, een vaststelling met een duidelijke betekenis: *waar* of *niet waar*.

Het is erg lastig om een fundamenteel begrip zoals “propositie” ondubbelzinnig vast te leggen. Hoe objectief zijn “zinvol” en “duidelijk” ? Wanneer we ons beperken tot de beweringen in een programmeertaal, dan is het tamelijk eenvoudig om precies te definiëren wat een propositie is, dat wil zeggen: hoe een propositie er syntactisch uitziet. We hebben dan een erg beperkte woordenschat, en kunnen gebruik maken van de syntactische schema’s die de programmeertaal definiëren. Wij zullen ons hier echter niet zo strikt vastleggen op de syntax, omdat we de theorie toepasbaar willen laten zijn op algemene onderwerpen uit wiskunde èn informatica.

Voorbeelden van propositites zijn:

| | |
|---|---|
| “in deze zaal zitten 140 mensen” | |
| “een plus een is twee” | “drie plus vijf is zes” |
| “de maan is een spiegel” | “$3 + 5 = 6$” |
| “dit bewijs is fout” | “$1 - 1 = 0$” |

We laten nu een paar voorbeelden zien van uitspraken die geen proposities zijn, en geven bij iedere uitspraak een kort commentaar tussen haakjes

“x is gelijk aan y” (ik weet niet wat x is en wat y is)

“ga naar huis” (dit is geen vaststelling, maar een bevel)

“zou het regenen?” (wel goed is “het regent”)

“jan te ver kaas” (wat zou hiervan de betekenis zijn?, dit voldoet ook niet aan de syntax van de nederlandse taal)

Tenslotte nog een paar voorbeelden van uitspraken die wat complexer van aard zijn, en daarom meer aandacht vragen als het gaat om de vraag of het proposities zijn

“alle mensen zijn dieren”

“als het gras nat wordt, dan regent het”

“Jan is een zoon van Kees en Mien is de moeder van Jaap”

“de zon schijnt of het regent”

Een nieuw element in bovenstaande uitspraken is dat er verschillende beweringen in één uitspraak worden gedaan. We komen hierop nog terug.

In enkele van de voorbeelden hebben we al gezien dat een propositie niet waar hoeft te zijn.

In de definitie van het begrip propositie hebben we gëist dat hij hetzij *waar* hetzij *onwaar* is (precies één van beide). Dit betekent echter niet dat we over de waarheid onmiddellijk uitsluitsel moeten kunnen geven. Zo beschouwen we de uitspraak

“onder de eerste tien miljard decimalen van $\pi$ komen precies één miljard cijfers 9 voor”

wel als een propositie. Immers zij is waar of onwaar, maar we kunnen (nog) niet vaststellen of zij waar dan wel onwaar is. Daarentegen is

“deze zin is onwaar”

geen propositie. Immers deze bewering kan niet waar zijn (want dan zegt zij zelf onwaar te zijn) en zij kan ook niet onwaar zijn (want dan zegt zij zelf waar te zijn). Men kan ook zeggen dat deze bewering zowel waar als onwaar is. Naar onze begrippen is de betekenis van deze bewering niet duidelijk.

Merk op dat we gebruik hebben gemaakt van een nog onuitgesproken afspraak, die we nu expliciet zullen vastleggen.

**Afspraak:**

"niet onwaar" betekent hetzelfde als "waar"

Deze fundamentele afspraak (we noemen zoiets ook wel een *axioma*) is een grondpeiler van de klassieke logica. Hierdoor wordt het mogelijk om een bewijs uit het ongerijmde te leveren zoals dat in het vorige hoofdstuk ook al aan de orde kwam: als de ontkenning van een propositie onwaar is, dan is de propositie zelf waar!

In het vervolg zullen we de betekenis van een propositie verengen tot het waar danwel onwaar zijn van de propositie.

## 2.1 Samenstellen van proposities

We hebben net al door voorbeelden aangestipt dat het wenselijk is als we proposities kunnen samenstellen. In feite willen we iets meer, namelijk zo'n samenstelling zou weer een propositie moeten zijn. Daarvoor is nodig dat de samenstelling ook voldoet aan de definitie van propositie, en dus moeten we precies vastleggen wat we zullen bedoelen met uitspraken zoals

"... en ..."

"... of ..."

"als ... dan ..."

"... dan, en slechts dan, als ..."

"niet ..."

waarin op de plaats van de stippeltjes proposities kunnen worden ingevuld.

Een eerste stap in de goede richting is het vastleggen van een notatie voor deze samenstellingen. Het is niet verstandig om hiervoor alleen het gewone woordgebruik te kiezen. Immers aan het begin van dit hoofdstuk hebben we al gezien dat hierdoor misverstanden zouden kunnen ontstaan bij de interpretatie. Daarnaast heeft het invoeren van een compacte notatie het voordeel dat ingewikkelder uitdrukkingen die we daarmee opbouwen, nog steeds betrekkelijk compact opgeschreven kunnen worden.

**Notatie**

Laten $p$ en $q$ proposities voorstellen. We gebruiken de volgende notaties:

| | | |
|---|---|---|
| $p \wedge q$ | voor | "$p$ en $q$" |
| $p \vee q$ | voor | "$p$ of $q$" |
| $p \to q$ | voor | "als $p$ dan $q$" |
| $p \leftrightarrow q$ | voor | "$p$ dan, en slechts dan, als $q$" |
| $\neg p$ | voor | "niet $p$" |

De symbolen $\wedge$ , $\vee$ , $\rightarrow$ , $\leftrightarrow$ , $\neg$ heten *connectieven*, of ook wel *Boolse operatoren*. Ze staan respectievelijk bekend onder de namen *conjunctie*, *disjunctie*, *implicatie*, *equivalentie*, *negatie*.

## 2.2 Waarheidstafels

We gaan nu de betekenis van deze samenstellingen vastleggen. Omdat de uitspraken $p$ en $q$ proposities zijn, is hun betekenis per definitie duidelijk: waar of niet waar. Omdat er maar twee mogelijkheden zijn kunnen we de betekenis van een samenstelling vastleggen door voor alle mogelijke waarden van $p$ en $q$ het resultaat vast te leggen. We doen dit met behulp van *waarheidswaarde* en *waarheidstafel*s.

**Definitie 2.2** De waarheidswaarde van een propositie is 0 of 1:
een propositie die waar is, heeft waarheidswaarde 1,
een propositie die onwaar is heeft waarheidswaarde 0.

Vervolgens stellen we de zogenaamde waarheidstafels op: we sommen systematisch alle combinaties van waarheidswaarden van $p$ en $q$ op, en geven bij elke samenstelling aan wat het gewenste resultaat is. Dit kunnen we voor elke samenstelling afzonderlijk doen, maar we kunnen het ook combineren in een grote tabel:

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ | $p \vee q$ | $p \rightarrow q$ | $p \leftrightarrow q$ | $\neg p$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

Deze tabel kan gezien worden als een compact opgeschreven definitie van alle samenstellingen.

Als we willen weten hoe de waarheidswaarde van bijvoorbeeld $p \wedge q$ afhangt van de waarheidswaarden van $p$ en van $q$, dan vergelijken we de kolommen van $p$ en $q$ met de kolom van $p \wedge q$ en lezen de gewenste informatie horizontaal af. Hieruit zien we dan de definitie van $p \wedge q$:

**Definitie 2.3** De propositie $p \wedge q$ is waar als $p$ en $q$ beide waar zijn. In alle andere gevallen is $p \wedge q$ onwaar.

Analoog hebben we de definitie van $p \vee q$:

**Definitie 2.4** De propositie $p \vee q$ is onwaar als $p$ en $q$ beide onwaar zijn. In alle andere gevallen is $p \vee q$ waar.

Hetzelfde kunnen we doen met $\neg p$. Omdat $\neg p$ alleen afhangt van $p$ kunnen we ook de kleinere tafel

| $p$ | $\neg p$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

raadplegen en vinden als definitie

**Definitie 2.5** De propositie $\neg p$ is waar als $p$ onwaar is en onwaar als $p$ waar is.

De definitie van de overige ter sprake gekomen samenstellingen zouden we na deze twee voorbeelden aan de lezer kunnen overlaten, maar we vinden het toch wenselijk om wat uitvoeriger stil te staan bij $p \to q$.

Uit de tabel zien we

**Definitie 2.6** De propositie $p \to q$ is onwaar als $p$ waar en $q$ onwaar is. In alle andere gevallen is $p \to q$ waar.

Een consequentie van deze definitie van $p \to q$ is, dat er voor de waarheid van $p \to q$ *geen verband* tussen $p$ en $q$ vereist is.
Als we dus voor $p$ en $q$ twee ware proposities invullen die niets met elkaar te maken hebben, dan is $p \to q$ een ware uitspraak.
Een ware uitspraak is bijvoorbeeld

$1 = 1 \to$ de diagonalen van een ruit staan loodrecht op elkaar

Het is *af te raden* "$p \to q$" uit te spreken als "uit $p$ volgt $q$": geldigheid van $p \to q$ zegt alleen dat $q$ waar is als $p$ waar is, en niet dat daarbij sprake is van een oorzakelijk verband.

Een andere consequentie is, dat $p \to q$ altijd waar is als $p$ onwaar is. Nu vinden we dat misschien niet zo erg vreemd, omdat we een uitspraak zoals

"als Pasen en Pinksteren op één dag vallen, dan ..."

niet als een leugen opvatten, ook al zou er op de plaats van de stippeltjes iets onwaars staan. Plastisch gezegd: Uit een absurde veronderstelling kan men alles concluderen.

Toch zal menigeen de wenkbrouwen fronsen bij het lezen van de ware uitspraak

$$e = \pi \;\to\; 1 = 1.$$

Analoge opmerkingen kunnen worden gemaakt over de samenstelling $p \leftrightarrow q$.

We kunnen samenstellingen weer opnieuw samenstellen en daarmee ingewikkelde constructies maken, zoals bijvoorbeeld

$(p \wedge q) \rightarrow r$

$(p \rightarrow q) \rightarrow p$

$(((\neg p) \rightarrow q) \wedge ((\neg q) \rightarrow p)) \leftrightarrow (p \leftrightarrow \neg q)$

die alle weer proposities zijn. Hierbij gebruiken we haakjes om de struktuur duidelijk te maken.
Veel haakjes zijn overbodig als er (bijvoorbeeld door de syntax) afspraken gemaakt worden over de prioriteit van de connectieven. Wij zullen hierover geen expliciete regels vastleggen, maar toch proberen zo weinig mogelijk haakjes te gebruiken. Zo schrijven we $p \rightarrow \neg q$ in plaats van $p \rightarrow (\neg q)$ omdat er geen verwarring mogelijk is. Daarentegen schrijven we wel $(\neg p) \rightarrow q$ in plaats van $\neg p \rightarrow q$.

Van dit soort combinaties kunnen we ook weer waarheidstafels maken: som weer alle mogelijkheden voor $p$ en $q$ systematisch op en bereken wat het resultaat is. Omdat we dat voor elk van de connectieven al hadden vastgelegd, ligt het resultaat voor elke daarmee opgebouwde combinatie ook vast.

In onze gewone taal komen nog andere connectieven voor dan alleen de zojuist behandelde. Zo kennen we bijvoorbeeld de uitdrukkingen

"noch ..., noch ..."
"òf ..., òf ..."
"wel ..., maar niet ..."

De waarheidstafel van een connectief dat twee proposities $p$ en $q$ verbindt, bestaat uit 4 regels. Er zijn dus 16 verschillende mogelijkheden om een waarheidstafel voor zo'n connectief te construeren: op elke plek kunnen we een 0 of een 1 zetten. Daaronder komen ook de connectieven voor die alleen iets doen met $p$ of alleen iets met $q$ of die helemaal onafhankelijk zijn van $p$ en $q$. Van deze laatste soort zijn er twee, ze worden weergegeven door $\mathsf{T}$ en $\mathsf{F}$. De waarheidswaarde van $\mathsf{T}$ is in alle gevallen 1, en de waarheidswaarde van $\mathsf{F}$ is in alle gevallen 0. De letters $\mathsf{T}$ en $\mathsf{F}$ zijn afkortingen voor true (waar) en false (onwaar). Je zou bijna denken dat $\mathsf{T}$ hetzelfde is als 1 en $\mathsf{F}$ hetzelfde is als 0. Dat is niet helemaal waar: $\mathsf{T}$ en $\mathsf{F}$ zijn proposities en 1 en 0 zijn waarden. Je kunt zeggen dat $\mathsf{T}$ en $\mathsf{F}$ horen tot de *syntax* van proposities, net zoals alle connectieven, en dat 0 en 1 de *semantiek* weergeven van respectievelijk $\mathsf{F}$ en $\mathsf{T}$.

In de tabel hebben we maar 5 van de 16 mogelijkheden geëtaleerd, enerzijds omdat juist die de connectieven zijn waarvan men zich bedient in redeneringen, anderzijds omdat elke samengestelde propositie reeds kan worden geformuleerd met de connectieven $\wedge$ , $\vee$ en $\neg$. Een paar voorbeelden:

$p \rightarrow q$ heeft dezelfde waarheidstafel als $(\neg p) \vee q$

"noch $p$, noch $q$" heeft dezelfde waarheidstafel als $(\neg p) \wedge \neg q$

We komen hier nog uitgebreid op terug.

## 2.3 Tautologieën

Sommige proposities zijn steeds waar, andere zijn soms waar en soms onwaar, afhankelijk van de situatie waarop ze betrekking hebben. Zo is “de brug is open” waar als de brug open is, en anders is deze uitspraak onwaar. Wanneer men in een computerprogramma twee variabelen $x$ en $y$ heeft, dan is de als test te gebruiken propositie “$x = y$” waar als $x$ en $y$ dezelfde waarde hebben, en anders onwaar. De propositie “$x = x$” is echter steeds waar.

Wat ons vooral interesseert zijn samengestelde proposities en hoe men aantoont dat een propositie steeds waar is. Bij een uit een klein aantal proposities $p$, $q$, $r$, … samengestelde propositie $A$ kan men gemakkelijk controleren of $A$ steeds waar is door de waarheidstafel van $A$ op te stellen en te kijken of de waarheidswaarde van $A$ steeds 1 is. De elementaire bouwstenen $p$, $q$, $r$, … heten wel *atomen* of *atomaire propositie*s. Omdat elk atoom twee waarheidswaarden kan hebben, bestaat de waarheidstafel voor een propositie opgebouwd uit $n$ atomen uit $2^n$ regels. Als $n = 3$ of $n = 4$ is dat nog best te doen, maar als $n$ minstens 10 is praat je toch wel over meer dan duizend regels, en komt de vraag op of het niet met minder werk kan.

We zullen nu een manier aangeven om te manipuleren met samengestelde proposities, het vervangen van een propositie door een andere propositie met dezelfde betekenis. Met dergelijke manipulaties is het opstellen en nalopen van waarheidstafels vaak te vermijden.

Twee proposities $A$ en $B$, beide opgebouwd uit $p$, $q$, $r$, … , hebben dezelfde betekenis precies dan als $A \leftrightarrow B$ steeds waar is. Dit is hetzelfde als te zeggen dat de waarheidstafels van $A$ en $B$ aan elkaar gelijk zijn.

**Definitie 2.7** Een *tautologie* is een steeds ware propositie, oftewel voor elke keuze van waarheidswaarden voor de erin voorkomende atomen is de waarheidswaarde van de propositie 1.
Twee proposities $A$ en $B$ heten *gelijkwaardig* of *equivalent* als $A \leftrightarrow B$ een tautologie is, oftewel voor elke keuze van waarheidswaarden voor de erin voorkomende atomen is de waarheidswaarde van $A$ gelijk aan die van $B$.
We schrijven dan wel $A \equiv B$, of ook wel $A \Leftrightarrow B$.

Een propositie is dus een tautologie als hij gelijkwaardig is met $\mathsf{T}$.

We maken een lijst van belangrijke tautologieën en een lijst van gelijkwaardige proposities, zodat we die niet telkens weer opnieuw hoeven te bewijzen. De in de lijsten voorkomende letters zijn atomen. Hiervoor mag men willekeurige concrete proposities invullen, onder de conditie dat voor hetzelfde atoom ook steeds dezelfde propositie wordt ingevuld.

**Stelling 2.8** Alle proposities in de volgende lijst zijn tautologieën

1. $p \vee \neg p$
2. $\neg(p \wedge \neg p)$
3. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$
4. $(\neg p) \rightarrow (p \rightarrow q)$
5. $(p \wedge \neg p) \rightarrow q$
6. $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q)$
7. $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$
8. $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$
9. $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$
10. $((p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)) \rightarrow ((p \wedge r) \rightarrow (q \wedge s))$
11. $((p \rightarrow q) \vee (r \rightarrow s)) \rightarrow ((p \wedge r) \rightarrow (q \vee s))$
12. $((p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)) \rightarrow (p \leftrightarrow r)$
13. $\mathsf{T}$
14. $\neg\mathsf{F}$

Het lijkt een lange lijst, maar de regels 1 t/m 6 liggen nogal voor het oprapen. Regel 7 drukt uit dat implicatie *transitief* is

Hopelijk geven de regels 8 en 11 de lezer het gevoel dat het niet allemaal zo vanzelfsprekend is.

Een stelling is pas echt een stelling als er ook een bewijs bij is; in dit geval betekent dat dat we voor elke regel moeten bewijzen dat de genoemde propositie een tautologie is. Dat kunnen we met waarheidstafels doen: als we systematisch alle mogelijke combinaties van waarheidswaarden voor $p$, $q$ en $r$ en we zien dat de waarheidswaarde voor de propositie in alle gevallen 1 is, hebben we bewezen dat het een tautologie is. Dit doen we hier alleen voor regel 7; voor de overige regels gaat het op soortgelijke wijze en laten we het aan de lezer over. Voor regel 7 moeten we laten zien dat $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$ een tautologie is, en daarvoor moeten we eerst de waarheidswaarden van $p \rightarrow q$, van $q \rightarrow r$, van $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$ en van $p \rightarrow r$ bepalen. Dat zouden we afzonderlijk kunnen doen door hier aparte waarheidstafels van de maken, maar het kan ook in één keer met een grote waarheidstafel, waarin we onder de pijl van $p \rightarrow q$ de waarheidswaarde van $p \rightarrow q$ invullen, vervolgens onder de pijl van $q \rightarrow r$ de waarheidswaarde van $q \rightarrow r$, dan onder de $\wedge$ van $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$ de waarheidswaarde van $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$, dan onder de pijl van $p \rightarrow r$ de waarheidswaarde van $p \rightarrow r$, en tenslotte onder de resterende pijl de waarheidswaarde van de gehele propositie:

| $p$ | $q$ | $r$ | $((p \rightarrow q)$ | $\wedge$ | $(q \rightarrow r))$ | $\rightarrow$ | $(p \rightarrow r)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | | | | | | $\uparrow$ | |

Inderdaad zien we in de met ↑ aangewezen kolom alleen maar enen staan, waarmee bewezen is dat de hele propositie een tautologie is.

In principe maakt de volgorde van de mogelijke combinaties van waarheidswaarden niet uit, als alle mogelijke combinaties maar opgesomd worden. Hier is de systematiek gevolgd waarbij bij het laatste atoom ($r$) afwisselend 0 en 1 is ingevuld, bij het voorlaatste ($q$) afwisselend twee nullen en twee enen, en daar weer voor (bij $p$) eerst vier nullen en dan vier enen. Dit breidt op een voor de hand liggende manier uit naar elk willekeurig aantal atomen: bij $n$ atomen staan er in de eerste $n$ kolommen de getallen van 0 tot en met $2^n - 1$ in *binaire notatie*.

## 2.4 Gelijkwaardige proposities

**Stelling 2.9** In de volgende lijst zijn de proposities op eenzelfde regel gelijkwaardig

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1. | $p$ | $\neg(\neg p)$ | $p \wedge p$ | $p \vee p$ |
| 2. | $p \vee q$ | $q \vee p$ | | |
| 3. | $p \wedge q$ | $q \wedge p$ | | |
| 4. | $p \leftrightarrow q$ | $q \leftrightarrow p$ | | |
| 5. | $(p \vee q) \vee r$ | $p \vee (q \vee r)$ | | |
| 6. | $(p \wedge q) \wedge r$ | $p \wedge (q \wedge r)$ | | |
| 7. | $p \leftrightarrow q$ | $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ | $(p \wedge q) \vee ((\neg p) \wedge \neg q)$ | |
| 8. | $p \rightarrow q$ | $(\neg p) \vee q$ | | |
| 9. | $p \rightarrow q$ | $(\neg q) \rightarrow \neg p$ | | |
| 10. | $\neg(p \rightarrow q)$ | $p \wedge \neg q$ | | |
| 11. | $\neg(p \vee q)$ | $(\neg p) \wedge \neg q$ | | |
| 12. | $\neg(p \wedge q)$ | $(\neg p) \vee \neg q$ | | |
| 13. | $(p \vee q) \rightarrow r$ | $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$ | | |
| 14. | $p \rightarrow (q \wedge r)$ | $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$ | | |
| 15. | $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ | $(p \wedge q) \rightarrow r$ | | |
| 16. | $(p \vee q) \wedge r$ | $(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ | | |
| 17. | $(p \wedge q) \vee r$ | $(p \vee r) \wedge (q \vee r)$ | | |
| 18. | $p$ | $p \vee \mathsf{F}$ | $p \wedge \mathsf{T}$ | |
| 19. | $p \vee \neg p$ | $p \vee \mathsf{T}$ | $\mathsf{T}$ | |
| 20. | $p \wedge \neg p$ | $p \wedge \mathsf{F}$ | $\mathsf{F}$ | |

Regels 2, 3 en 4 geven aan dat de operatoren $\vee$, $\wedge$ en $\leftrightarrow$ *commutatief* zijn.
Regels 5 en 6 geven aan dat de operatoren $\vee$ en $\wedge$ *associatief* zijn.
Regel 8 geeft eigenlijk de definitie van de implicatie.
Regels 10, 11 en 12 laten zien hoe we met ontkenningen moeten omgaan. De regels 11 en 12 staan bekend als de wetten van *DeMorgan*.
Regel 9 geeft de wet van de *contrapositie*: om de waarheid van $p \rightarrow q$ vast te stellen, kan men even goed de waarheid van $(\neg q) \rightarrow \neg p$ vaststellen.
Regels 16 en 17 beschrijven dat $\wedge$ en $\vee$ *distributief* zijn, preciezer: regel 16 zegt dat $\wedge$ *distribueert over* $\vee$, en regel 17 zegt dat $\vee$ distribueert over $\wedge$. Regel 18 zegt dat $\mathsf{F}$ een

*neutraal element* voor $\vee$ is en dat $\mathsf{T}$ een neutraal element voor $\wedge$ is. Regels 19 en 20 geven nog enkele voor de hand liggende verbanden met $\mathsf{T}$ en $\mathsf{F}$.

Van deze lijst is het handig om in ieder geval de regels 1 t/m 9, 11, 12 en 16 t/m 20 te kennen en altijd paraat te hebben.

Ook deze stelling kan zonder enig probleem worden bewezen door voor de onderhavige proposities de waarheidstafels op te stellen en te controleren dat de zaak klopt: steeds moet je laten zien dat proposities op dezelfde regel precies gelijke kolommen geven in de waarheidstafel.

Voor het toepassen van Stelling 2.9 zijn de volgende opmerkingen van groot belang:

- Voor $p$, $q$, $r$, ... mogen steeds willekeurige proposities worden ingevuld.
- De regels zijn niet alleen van toepassing op de hele uitdrukking, maar ook op delen daarvan. Zo mogen we uit $A \equiv B$ concluderen: $\neg A \equiv \neg B$, $p \vee A \equiv p \vee B$, $A \vee p \equiv B \vee p$, $p \wedge A \equiv p \wedge B$, et cetera.

Het op deze manier toepassen van Stelling 2.9 en andere spelregels van dit hoofdstuk wordt ook wel *propositierekening* genoemd.

Soms kan een regel ook worden bewezen uit een combinatie van andere regels.
Als voorbeeld laten we zien hoe regel 10 van Stelling 2.9 volgt uit andere regels door proposities te vervangen door gelijkwaardige proposities. Een dergelijk bewijs heet een *equationeel bewijs.*

$$\begin{array}{rcll} \neg(p \to q) & \equiv & \neg((\neg p) \vee q) & \text{(regel 8)} \\ & \equiv & (\neg(\neg p)) \wedge \neg q & \text{(regel 11)} \\ & \equiv & p \wedge \neg q & \text{(regel 1)} \end{array}$$

Op deze manier kunnen ook nieuwe gelijkwaardigheden worden afgeleid, bijvoorbeeld

$$\begin{array}{rcll} p \wedge (q \vee r) & \equiv & (q \vee r) \wedge p & \text{(regel 3)} \\ & \equiv & (q \wedge p) \vee (r \wedge p) & \text{(regel 16)} \\ & \equiv & (p \wedge q) \vee (r \wedge p) & \text{(regel 3)} \\ & \equiv & (p \wedge q) \vee (p \wedge r) & \text{(regel 3)} \end{array}$$

Door herhaaldelijk toepassen van de regels 2 en 5 van Stelling 2.9 kan men laten zien dat in $p \vee q \vee \cdots \vee r$ de haakjes willekeurig geplaatst mogen worden, en dat de volgorde er niet toe doet. Daarom laten we in samenstellingen met alleen het connectief $\vee$ vaak de haakjes weg.
Een analoge opmerking geldt voor $p \wedge q \wedge \cdots \wedge r$, hetgeen volgt door herhaaldelijk toepassen van de regels 3 en 6.

## 2.5 Speciale vormen

Aan het eind van sectie 2.2 hebben we aangekondigd dat elk connectief zich laat schrijven met behulp van de connectieven $\wedge$ , $\vee$ en $\neg$. Inderdaad, laat $A$ een propositie zijn, opgebouwd uit eindig veel $p$, $q$, $r$, ... . Dan stellen we van $A$ de waarheidstafel op, en kijken hoe de waarheidswaarden van $p$, $q$, $r$, ... moeten zijn opdat $A$ de waarheidswaarde 1 heeft. We inventariseren die waarden met $\wedge$ en $\neg$ voor elke rij waarin voor $A$ de waarde

1 staat. Het totaal wordt vervolgens samengevoegd met $\vee$ . We krijgen op die manier vanzelf een uitdrukking in $p$, $q$, $r$, ... en $\wedge$ , $\vee$ , $\neg$ (en haakjes, uiteraard).
Als voorbeeld nemen we $A(p, q, r, s)$ met als waarheidstafel (we laten alleen de rijen zien waarin $A$ de waarde 1 heeft)

| $p$ | $q$ | $r$ | $s$ | $A$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |

Dan is $A(p, q, r, s)$ gelijkwaardig met

$$(p \wedge (\neg q) \wedge r \wedge s) \;\vee\; ((\neg p) \wedge q \wedge (\neg r) \wedge s) \;\vee\; (p \wedge (\neg q) \wedge (\neg r) \wedge s)$$

Dit is een zogenaamde *disjunctieve normaalvorm* van $A$, oftewel een disjunctie van een aantal conjuncties van literals. Hierbij wordt onder een *literal* verstaan een van de uitdrukkingen $p$, $\neg p$, $q$, $\neg q$, $r$, $\neg r$, ... , oftewel een atoom met al of niet een ontkenning ervoor.

Preciezer gezegd: een disjunctieve normaalvorm van een propositie opgebouwd uit de atomen $p_1$, $p_2$, ..., $p_r$ is een equivalente propositie van de vorm $X_1 \vee X_2 \vee \ldots \vee X_s$, waarbij elke $X_i$ van de vorm $(Y_1 \wedge Y_2 \wedge \ldots \wedge Y_{n_i})$ is, en elke $Y_j$ van de vorm $p_k$ of $\neg p_k$ is voor zekere $k$.

Een propositie kan meer dan één disjunctieve normaalvorm hebben: zo is $p \vee (q \wedge r)$ zelf al een disjunctieve normaalvorm, maar levert de methode met de waarheidstafel hiervoor een equivalente disjunctieve normaalvorm die een disjunctie van vijf conjuncten is.

Ook zonder gebruik te maken van waarheidstafels kan men een disjunctieve normaalvorm van een samengestelde propositie opstellen, namelijk via een equationeel bewijs. Dit kan heel systematisch door alleen de volgende equivalenties van links naar rechts toe te passen:

$$\begin{array}{lcl}
p \leftrightarrow q & \equiv & (p \wedge q) \vee ((\neg p) \wedge \neg q) \\
p \rightarrow q & \equiv & (\neg p) \vee q) \\
\neg(\neg p) & \equiv & p \\
\neg(p \vee q) & \equiv & (\neg p) \wedge \neg q \\
\neg(p \wedge q) & \equiv & (\neg p) \vee \neg q \\
p \wedge (q \vee r) & \equiv & (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\
(p \vee q) \wedge r & \equiv & (p \wedge r) \vee (q \wedge r).
\end{array}$$

Al deze regels komen voor of volgen direct uit Stelling 2.9. Desgewenst mogen we onderweg de betreffende uitdrukking nog vereenvoudigen door toepassing van regels 1, 18, 19 en 20 van Stelling 2.9. We geven een voorbeeld: we willen een disjunctieve normaalvorm van

$(p \leftrightarrow q) \wedge (q \to r)$ bepalen:

$$\begin{aligned}
(p \leftrightarrow q) \wedge (q \to r) &\equiv ((p \wedge q) \vee ((\neg p) \wedge \neg q)) \wedge (q \to r) \\
&\equiv ((p \wedge q) \vee ((\neg p) \wedge \neg q)) \wedge ((\neg q) \vee r) \\
&\equiv (p \wedge q \wedge ((\neg q) \vee r)) \vee ((\neg p) \wedge (\neg q) \wedge ((\neg q) \vee r)) \\
&\equiv (p \wedge q \wedge \neg q) \vee (p \wedge q \wedge r) \vee ((\neg p) \wedge (\neg q) \wedge ((\neg q) \vee r)) \\
&\equiv (p \wedge \mathsf{F}) \vee (p \wedge q \wedge r) \vee ((\neg p) \wedge (\neg q) \wedge ((\neg q) \vee r)) \\
&\equiv \mathsf{F} \vee (p \wedge q \wedge r) \vee ((\neg p) \wedge (\neg q) \wedge ((\neg q) \vee r)) \\
&\equiv (p \wedge q \wedge r) \vee ((\neg p) \wedge (\neg q) \wedge ((\neg q) \vee r)) \\
&\equiv (p \wedge q \wedge r) \vee ((\neg p) \wedge (\neg q) \wedge (\neg q)) \vee ((\neg p) \wedge (\neg q) \wedge r) \\
&\equiv (p \wedge q \wedge r) \vee ((\neg p) \wedge (\neg q)) \vee ((\neg p) \wedge (\neg q) \wedge r).
\end{aligned}$$

Een disjunctieve normaalvorm van $(p \leftrightarrow q) \wedge (q \to r)$ is dus

$$(p \wedge q \wedge r) \vee ((\neg p) \wedge (\neg q)) \vee ((\neg p) \wedge (\neg q) \wedge r).$$

Het kan nog korter: vanwege $((\neg p) \wedge (\neg q)) \vee ((\neg p) \wedge (\neg q) \wedge r) \equiv (\neg p) \wedge \neg q$ is ook $(p \wedge q \wedge r) \vee ((\neg p) \wedge \neg q)$ een disjunctieve normaalvorm van $(p \leftrightarrow q) \wedge (q \to r)$.

Door directe controle of door de regels 1 en 11 van Stelling 2.9 te combineren, ziet men dat $p \vee q$ gelijkwaardig is met $\neg((\neg p) \wedge \neg q)$.
Daarmee blijkt uit de disjunctieve normaalvorm dat elke propositie zelfs gelijkwaardig is met een uitdrukking in alleen $\neg$ en $\wedge$.
We laten het aan de lezer over om aan te tonen dat ook de paren $\vee, \neg$ en $\to, \neg$ voldoende zijn.

Het is zelfs mogelijk om te volstaan met één teken, bijvoorbeeld de *Sheffer stroke* $p/q$, die gelijkwaardig is met $\neg(p \wedge q)$. Immers voor dit connectief geldt

| | | |
|---|---|---|
| $\neg p$ | is gelijkwaardig met | $p/p$, |
| $p \wedge q$ | is gelijkwaardig met | $(p/q)/(p/q)$. |

## 2.6 Opgaven

**Opgave 2.1**

Welke van de volgende uitspraken is een propositie en welke niet?

*a.* $7 + 7 = 13$.

*b.* $7 + 7 = 14$.

*c.* Er bestaan groene koeien.

*d.* Er bestaat leven op een andere planeet.

*e.* Het schilderij *De Nachtwacht* van Rembrandt is mooi.

*f.* Koningin Beatrix vindt het schilderij *De Nachtwacht* van Rembrandt mooi.

*g.* Het schilderij *De Nachtwacht* van Rembrandt is mooier dan het schilderij *De Zonnebloemen* van Van Gogh.

*h.* Het schilderij *De Nachtwacht* van Rembrandt is zwaarder dan het schilderij *De Zonnebloemen* van Van Gogh.

*i.* Deze zin bestaat uit meer dan twintig letters.

**Opgave 2.2**

Construeer de waarheidstafels van de volgende samengestelde proposities

*a.* $(p \wedge q) \wedge ((\neg q) \vee r)$

*b.* $p \rightarrow (q \vee r)$

*c.* $\neg((\neg p) \vee \neg((\neg q) \vee \neg p))$

*d.* $p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$

*e.* $p \leftrightarrow (q \leftrightarrow p)$

**Opgave 2.3**

Kijk of de waarheidstafels voor de proposities in de vorige opgave aanleiding geven tot eenvoudigere gelijkwaardige samenstellingen.

**Opgave 2.4**

Bewijs met behulp van waarheidstafels dat

*a.* $((p \rightarrow q) \vee (r \rightarrow s)) \rightarrow ((p \wedge r) \rightarrow (q \vee s))$ een tautologie is

*b.* $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$ een tautologie is

*c.* $\neg(p \rightarrow \neg q)$ en $p \wedge q$ gelijkwaardig zijn

**Opgave 2.5**

Bewijs dat regels 13, 14 en 15 van Stelling 2.9 inderdaad gelijkwaardige proposities aangeven.

**Opgave 2.6**

Bewijs door uitsluitend gelijkwaardige proposities uit Stelling 2.9 door elkaar te vervangen, dat

*a.* $a \leftrightarrow b$ en $(\neg a) \leftrightarrow \neg b$ gelijkwaardig zijn

*b.* $((\neg a) \wedge \neg b) \rightarrow c$ en $(\neg a) \rightarrow (b \vee c)$ gelijkwaardig zijn

**Opgave 2.7**

*a.* Druk $(p \vee q) \wedge r$ uit met de connectieven $\to$ en $\neg$

*b.* Druk $(p \vee q) \wedge r$ uit met / als enige connectief

**Opgave 2.8**

Definieer het connectief $\downarrow$ door:

$$p \downarrow q \text{ is gelijkwaardig aan } \neg(p \vee q).$$

Dit connectief $\downarrow$ heet de *Quine dagger*.

*a.* Laat zien dat elk connectief uit te drukken is in alleen $\downarrow$.

*b.* Druk $(p \vee q) \wedge r$ uit met $\downarrow$ als enige connectief.

**Opgave 2.9**

Geef een disjunctieve normaalvorm van

*a.* $p \to (q \to r)$

*b.* $(p \vee q) \wedge r$

*c.* $(p \vee q) \wedge (r \vee q)$

*d.* $(p \wedge r) \to (q \wedge r)$

**Opgave 2.10**

Een *conjunctieve normaalvorm* van een propositie opgebouwd uit $p_1$, $p_2$, …, $p_r$ is een equivalente propositie van de vorm $X_1 \wedge X_2 \wedge \ldots \wedge X_s$, waarbij elke $X_i$ van de vorm $(Y_1 \vee Y_2 \vee \ldots \vee Y_{n_i})$ is, en elke $Y_j$ van de vorm $p_k$ of $\neg p_k$ is voor zekere $k$.

*a.* Leid een conjunctieve normaalvorm van $\neg(p \to (q \to r))$ af uit een disjunctieve normaalvorm van $p \to (q \to r)$ (zie vorige opgave, deel a).

*b.* Geef een conjunctieve normaalvorm van $p \to (q \to r)$.