Hoofdstuk 4

Predicaten

Tot nu toe hebben we ons beziggehouden met proposities, en gezien hoe we daarmee moeten omgaan. Proposities zijn echter niet toereikend om daarin alle overwegingen te formuleren waarvan we gebruik willen maken. Als voorbeeld komen we terug op de postbode uit het eerste hoofdstuk. De redenering begon als volgt:

Stel dat de bewering

> er is een adres waarop vier of meer stukken zijn afgeleverd

niet waar is, dan geldt:

> voor alle adressen zijn er hoogstens drie stukken afgeleverd.

Voor het redeneren met *vier of meer* en *hoogstens drie* kunnen we gewone rekenregels voor getallen toepassen, maar voor het redeneren met *er is een* en *voor alle* hebben we nog niets En dat is precies wat we in dit hoofdstuk gaan doen.

Definitie 4.1 We schrijven

$$\exists x \langle P \rangle$$

voor:

> er is een x zo dat P geldt,

en we schrijven

$$\forall x \langle P \rangle$$

voor:

> voor elke x geldt P.

Hierin mag P een willekeurige bewering zijn waar x in voor mag komen.
De tekens $\forall$ en $\exists$ heten *quantoren*,
$\forall$ heet de *universele quantor*, en
$\exists$ heet de *existentiële quantor*.

4.1 Vrij en gebonden, universum

Eerst moeten we wat meer vertrouwd raken met het gebruik van de notaties $\forall x\langle P\rangle$ en $\exists x\langle P\rangle$.

Iedere quantor wordt gevolgd door een variabele (bijvoorbeeld $\forall x$, of $\exists y$). Meestal is de uitspraak P waarop de quantificering betrekking heeft zelf van een vorm die aan een propositie doet denken. Het essentiële verschil met een propositie is echter dat er in P *variabelen* kunnen optreden die staan voor *verschillende objecten*.

We herinneren er nog eens aan dat een propositie gekenmerkt wordt doordat hij waar of onwaar is.
$2 > 1$ is een propositie, evenals $1 > 2$, maar $x > 1$ is geen propositie, immers we kunnen niet uitmaken of $x > 1$ waar is. Dat hangt van de waarde van x af. De aanwezigheid van variabelen verstoort dus het propositie-karakter.

Definitie 4.2 Door $\forall x\langle P\rangle$ worden de in P eventueel voorkomende variabelen x *gebonden* door de quantor $\forall$.
Een niet door een quantor gebonden variabele in een uitspraak heet een *vrije variabele* in die uitspraak. De vrije variabelen in $\forall x\langle P\rangle$ zijn dus de vrije variabelen in P, met uitzondering van x.
Het voorgaande geldt ook met betrekking tot $\exists$.
Een *predicaat* is een uitspraak die waar of niet waar kan zijn, en waarin vrije variabelen en quantoren mogen optreden.

Het verschijnsel van *gebonden variabelen* komt in vele andere onderwerpen ook voor, bijvoorbeeld bij integralen en bij het declareren van variabelen in computerprogramma's.
In een formule zoals

$$\int_a^b f(x)dx$$

is x gebonden, a en b zijn vrij, het maakt niets uit als we x vervangen door v (in $f(x)$ en in dx). Ook bij de quantoren betekent bijvoorbeeld $\exists x\langle x \neq 0\rangle$ hetzelfde als $\exists v\langle v \neq 0\rangle$.

Er zijn hier weer *scope-regels*: in $\int_a^b f(x)dx$ slaat de x in dx alleen op de variabelen x die voorkomen tussen de tekens $\int$ en d, en in $\exists x\langle x \neq 0\rangle$ slaat de x in $\exists x$ alleen op de variabelen x die die voorkomen tussen de tekens $\langle$ en $\rangle$.

Het gebruik van een variabele in een predikaat of bij een quantor heeft alleen zin als we van te voren afspreken welke de mogelijke objecten zijn waarop zo'n variabele betrekking heeft (het *type* van de variabele). De verzameling van die objecten noemen we het *universum*. Wil men iets zeggen over gehele getallen, dan ligt het voor de hand om als universum de verzameling der gehele getallen te kiezen. Het kan ook zijn dat iemand alleen maar geïnteresseerd is in uitspraken over autobanden, of alleen maar in uitspraken over priemgetallen, of alleen maar in uitspraken over reële getallen, of alleen maar in uitspraken over de informaticastudenten die in 1998 met hun studie zijn begonnen.
In het laatste geval betreft het een *eindig* universum. Dan kunnen we eventueel ook zonder quantoren toe.

Laten we bijvoorbeeld eens aannemen dat het universum bestaat uit de getallen 1, 2, 3 en dat $P(x)$ een predikaat is dat een betekenis heeft als men voor x respectievelijk 1, 2 of 3 invult, denk bijvoorbeeld aan $P(x) := (x^2 - 2x = 0)$.
Dan betekent $\exists x \langle P(x) \rangle$ hetzelfde als $(1 - 2 = 0 \vee 4 - 4 = 0 \vee 9 - 6 = 0)$,
en betekent $\forall x \langle P(x) \rangle$ hetzelfde als $(1 - 2 = 0 \wedge 4 - 4 = 0 \wedge 9 - 6 = 0)$.

Hieruit zien we dat $\exists$ een generalisatie is van $\vee$ en dat $\forall$ een generalisatie is van $\wedge$.

In verschillende boeken zie je soms variaties op de hier gebruikte notatie. De notatie $\forall$ en $\exists$ is wel algemeen in gebuik. In een grijs verleden is wel eens geprobeerd om hiervoor respectievelijk $\wedge$ en $\vee$ te gebruiken omdat het inderdaad generalisaties van conjunctie en disjunctie zijn, maar dat heeft het nooit echt gehaald. In de nostalgische tijd van de schrijfmachines is wel eens $\underline{\mathtt{A}}$ gebruikt voor $\forall$ en $\underline{\mathtt{E}}$ voor $\exists$, maar ook dat is lang geleden. Als historisch verantwoord ezelsbruggetje is het wel aardig: $\forall$ is een omgekeerde A van 'alle', en $\exists$ is een omgekeerde E van 'existentie', 'er is een'.

De variatie in de notatie zit hem in de haakjes. Wij gebruiken $\langle$ en $\rangle$ omdat dat soorten haakjes zijn die we verder nauwelijks tegenkomen, en dus zo weinig mogelijk verwarring op kan leveren. Maar alle mogelijke soorten haakjes zijn hiervoor in omloop. Soms zie je ook helemaal geen haakjes, en zie je $\forall x : P$ of $\forall x \cdot P$ in plaats van $\forall x \langle P \rangle$. Hier is een waarschuwing echter wel op zijn plaats: door het ontbreken van het sluithaakje is het niet altijd duidelijk waar de *scope* van de variabele x afgelopen is: tot hoever in de uitdrukking is elke x gebonden door deze quantor $\forall$? In onze notatie geeft '$\rangle$' precies het eind van de *scope* aan; we komen hier nog op terug.

Variatie in notatie is er ook in het aangeven van het universum. Vooruitlopend op de notatie $\in$ uit de verzamelingenleer zoals we die in de komende hoofdstukken ook zullen gebruiken, schrijven wij

$$\forall x \in U \langle P \rangle \quad \text{en} \quad \exists x \in U \langle P \rangle$$

om expliciet aan te geven dat U het universum van x is. Als uit de situatie duidelijk is wat het universum is, laten we het gewoon weg.

Als er in een uitspraak meerdere quantoren in een groep bij elkaar staan, laten we overbodige haakjes wel eens weg. Voorbeelden hiervan zijn

$$\forall x \exists y \langle x < y \rangle \qquad \exists x \forall y \langle x < y \rangle \qquad \exists x \exists y \langle x < y \rangle \qquad \forall x \forall y \langle x < y \rangle$$

Dan betekenen deze uitspraken respectievelijk

$$\forall x \langle \exists y \langle x < y \rangle \rangle \qquad \exists x \langle \forall y \langle x < y \rangle \rangle \qquad \exists x \langle \exists y \langle x < y \rangle \rangle \qquad \forall x \langle \forall y \langle x < y \rangle \rangle$$

Als de quantoren gemengd voorkomen, dus $\forall$ gevolgd door $\exists$ of omgekeerd, dan hangt de betekenis sterk af van de volgorde waarin ze voorkomen. Immers de eerste zin is duidelijk waar: neem voor y maar $x + 1$. Daarentegen is de tweede zin duidelijk niet waar: er bestaat geen getal dat kleiner is dan alle getallen.
In groepjes van quantoren van dezelfde soort mag men wel naar believen de volgorde verwisselen. Zo hebben in het volgende lijstje de uitdrukkingen op dezelfde regel dezelfde betekenis

$$\begin{array}{lll}
\forall x \forall y \forall z \langle P \rangle & \forall y \forall x \forall z \langle P \rangle & \forall z \forall y \forall x \langle P \rangle \\
\forall x \forall y \exists z \langle P \rangle & \forall y \forall x \exists z \langle P \rangle & \\
\forall x \forall y \exists z \forall u \forall v \langle P \rangle & \forall x \forall y \exists z \forall v \forall u \langle P \rangle & \\
\exists x \exists y \exists z \forall u \forall v \langle P \rangle & \exists z \exists y \exists x \forall v \forall u \langle P \rangle &
\end{array}$$

Van deze verwisselingsmogelijkheid maakt men gebruik bij het "vertalen" van zo'n uitdrukking naar gewoon Nederlands. We geven weer een paar voorbeelden:

> $\forall x \forall y \exists z \forall u \forall v \langle P \rangle$ wordt
> "Voor elke x en y is er een z zo dat voor elke u en v uitspraak P geldt"
>
> $\exists x \exists y \exists z \forall u \forall v \langle P \rangle$ wordt
> "Er zijn x, y en z zo dat voor elke u en v uitspraak P geldt"

Soms wordt ook wel kortweg '$\forall x, y$' geschreven in plaats van '$\forall x \forall y$', en wordt '$\exists x, y$' geschreven in plaats van '$\exists x \exists y$'.

De zaken kunnen behoorlijk ingewikkeld worden, wanneer er in een uitspraak quantoren voorkomen die niet alle vooraan in een groepje staan. Men kan dan situaties krijgen zoals

$$\forall x \langle x > 2 \rightarrow \exists y \langle y < 7 \rangle \rangle \quad \text{of} \quad \forall x \langle x > 2 \rightarrow \exists x \langle x < 7 \rangle \rangle$$

Beide bovenstaande uitdrukkingen hebben dezelfde betekenis!

Dit komt omdat $\exists y \langle y < 7 \rangle$ een uitdrukking is waarin y naar buiten toe geen rol vervult. Immers $\exists y \langle y < 7 \rangle$ heeft dezelfde betekenis als $\exists z \langle z < 7 \rangle$ en ook dezelfde betekenis als $\exists x \langle x < 7 \rangle$. De variabele x in $x < 7$ wordt gebonden door $\exists x$, en daarmee is $\exists x \langle x < 7 \rangle$ een *gesloten uitdrukking* voor x. We moeten dus een aanvulling geven op definitie 4.2:

> Door $\forall x \langle P \rangle$ en $\exists x \langle P \rangle$ worden alleen de *vrij voorkomende* x-en in P gebonden.

Vanzelfsprekend geeft het grote kans op verwarring wanneer in een predikaat eenzelfde letter voorkomt als vrije en tevens als gebonden variabele. Daarom raden we ten sterkste aan om als eerste aktie bij het bestuderen van een uitdrukking die quantoren bevat, ervoor te zorgen dat alle quantoren quantificeren over verschillende variabelen. Daartoe moeten we eventueel de vrij voorkomende x-en binnen de *scope* (het *bereik*) van $\exists x$ respectievelijk van $\forall x$ vervangen door een nog niet gebruikte letter, zeg z, en dan uiteraard ook schrijven $\exists z$ respectievelijk $\forall z$. Dit proces heet *herbenoemen* van variabelen, in het Engels *renaming*. Omdat de gekozen naam van zo'n gebonden variabele er blijkbaar niet toe doet, heet zo'n variabele ook wel een *dummy*.

Hier zien we een sterke analogie met computerprogramma's waar in een procedure gebruikte lokale variabelen niet bekend zijn buiten die procedure, maar waar het voor de menselijke lezer prettig is als er geen lokale en globale variabelen optreden onder dezelfde naam.

Als S een deel van het universum is, dan hebben

$$\forall x \in S \langle P \rangle \quad \text{en} \quad \exists x \in S \langle P \rangle,$$

respectievelijk dezelfde betekenis als

$$\forall x \langle (x \in S) \rightarrow P \rangle \quad \text{en} \quad \exists x \langle (x \in S) \wedge P \rangle$$

In de praktijk hebben de notaties $\forall x \in S \ \langle P \rangle$ en $\exists x \in S \ \langle P \rangle$ het belangrijke voordeel dat meteen duidelijk is van welk type x is (tot welke verzameling we ons kunnen beperken).

Er zijn twee speciale gevallen met betrekking tot het universum die we expliciet willen noemen, namelijk het geval dat het universum leeg is, en het geval dat de door een quantor gebonden variabele niet vrij voorkomt in het predikaat.
Is het universum leeg, dan is $\forall x \ \langle P \rangle$ waar en is $\exists x \ \langle P \rangle$ onwaar, onafhankelijk van het predikaat P.
Is het universum niet leeg, en is P een predikaat waarin de variabele x niet vrij voorkomt, dan zijn $\forall x \ \langle P \rangle$ en $\exists x \ \langle P \rangle$ beide equivalent met P.
Meestal zullen we aannemen dat het universum niet leeg is.

De hele machinerie van predikaten, quantoren enz. is opgezet om op een systematische manier te kunnen redeneren. Daarbij is de manier van opschrijven van groot belang. Wij hebben gekozen voor de zogenaamde *prefixnotatie* voor quantoren, dat wil zeggen dat quantoren voor de uitspraak staan. Soms zet men in een slordige bui de quantoren achter de uitspraak, als “afterthought” als het ware. We zien dan uitspraken als

$$x^2 \geq 0 \qquad (\forall x)$$

We raden ten sterkste aan om dit te vermijden, aangezien de binding tussen de twee x-en verloren gaat, en de betekenis afgeleid moet worden uit de typografische vormgeving ($\forall x$ staat op dezelfde regel als $x^2 \geq 0$). Beter is het in zo’n geval te schrijven

$$x^2 \geq 0 \text{ is geldig voor alle } x$$

zodat de betekenis uit het zinsverband blijkt.
Nog beter is natuurlijk

$$\text{voor alle } x \text{ geldt } x^2 \geq 0.$$

4.2 Gelijkwaardige predicaten

Behalve de al genoemde regels over de volgorde van quantoren, zijn er nog andere rekenregels die van groot nut zijn. We maken een lijst van gelijkwaardige uitdrukkingen

Stelling 4.3 In de volgende lijst zijn de uitdrukkingen op eenzelfde regel gelijkwaardig

$$\begin{array}{lll}
1. & \forall x\langle \neg P\rangle & \neg\exists x\langle P\rangle \\
2. & \exists x\langle \neg P\rangle & \neg\forall x\langle P\rangle \\
3. & \forall x\langle P \wedge Q\rangle & \forall x\langle P\rangle \wedge \forall x\langle Q\rangle \\
4. & \exists x\langle P \vee Q\rangle & \exists x\langle P\rangle \vee \exists x\langle Q\rangle
\end{array}$$

Ga zelf aan de hand van voorbeelden na dat de stelling klopt. Suggesties zijn:
“niet iedere Nederlander draagt een bril”
“er is geen reëel getal waarvan het kwadraat -1 is”.

Met de opmerking in gedachten dat de universele quantificatie een generalisatie is van de conjunctie, en de existentiële quantificatie een generalisatie van de disjunctie, kunnen we regels 1 en 2 zien als generalisaties van de regels van DeMorgan, regel 3 als generalisatie van de commutativiteit van de conjunctie, en regel 4 als generalisatie van de commutativiteit van de disjunctie. We merken op dat regel 2 door negatie te verkrijgen is uit regel 1, en idem regel 4 uit regel 3.

Waarschuwing:
$\forall x\langle P \vee Q\rangle$ is *niet* gelijkwaardig met $\forall x\langle P\rangle \vee \forall x\langle Q\rangle$

$\exists x\langle P \wedge Q\rangle$ is *niet* gelijkwaardig met $\exists x\langle P\rangle \wedge \exists x\langle Q\rangle$

We illustreren dit aan een paar voorbeelden.
Bekijk met de gehele getallen als universum de predikaten $P := (x < 10)$ en $Q := (x > 0)$, dan is $\forall x\langle P \vee Q\rangle$ een ware bewering, maar $\forall x\langle P\rangle$ is onwaar, en $\forall x\langle Q\rangle$ is onwaar, dus is ook $\forall x\langle P\rangle \vee \forall x\langle Q\rangle$ onwaar.

Bekijken we daarentegen eveneens met de gehele getallen als universum de predikaten $P := (x > 10)$ en $Q := (x < 0)$, dan is $\exists x\langle P\rangle$ waar en $\exists x\langle Q\rangle$ is waar, dus $\exists x\langle P\rangle \wedge \exists x\langle Q\rangle$ is waar, maar $\exists x\langle P \wedge Q\rangle$ is onwaar.

Het komt erop neer dat er bij $\exists x\langle P \wedge Q\rangle$ één waarde voor x moet bestaan waarvoor P en Q beide waar zijn, terwijl bij $\exists x\langle P\rangle \wedge \exists x\langle Q\rangle$ er een waarde x is waarvoor P waar is, en ook een waarvoor Q waar is, maar die hoeven niet dezelfde te zijn. Hoewel beide bewering dus niet gelijkwaardig zijn is het wel zo dat als $\exists x\langle P \wedge Q\rangle$ waar is, dan is ook $\exists x\langle P\rangle \wedge \exists x\langle Q\rangle$ waar. Op soortgelijke wijze geldt dat als $\forall x\langle P\rangle \vee \forall x\langle Q\rangle$ waar is, dan is ook $\forall x\langle P \vee Q\rangle$ waar.

Onder beperkende voorwaarden bestaan er wel gelijkwaardigheden van de soort waarvoor we zojuist gewaarschuwd hebben. We geven deze in de volgende stelling.

Stelling 4.4 Als in Q de variabele x niet vrij voorkomt, en het universum is niet leeg, dan zijn in de volgende lijst de uitspraken op eenzelfde regel gelijkwaardig

1.	$\forall x\langle Q\rangle$	Q
2.	$\exists x\langle Q\rangle$	Q
3.	$\forall x\langle Q \vee P\rangle$	$Q \vee \forall x\langle P\rangle$
4.	$\exists x\langle Q \wedge P\rangle$	$Q \wedge \exists x\langle P\rangle$
5.	$\exists x\langle Q \rightarrow P\rangle$	$Q \rightarrow \exists x\langle P\rangle$
6.	$\forall x\langle Q \rightarrow P\rangle$	$Q \rightarrow \forall x\langle P\rangle$
7.	$\exists x\langle P \rightarrow Q\rangle$	$\forall x\langle P\rangle \rightarrow Q$
8.	$\forall x\langle P \rightarrow Q\rangle$	$\exists x\langle P\rangle \rightarrow Q$

Dit lijkt een ingewikkelde lijst, maar al deze regels volgen uit eenzelfde principe: een predicaat waarin de variabele x niet vrij voorkomt mag je buiten een quantor over x halen. De laatste regels zien er ingewikkelder uit omdat soms $\forall$ overgaat in $\exists$ en omgekeerd, maar volgen direct door het combineren van propositierekening en het toepassen van Stelling

4.3. Als voorbeeld bewijzen we regel 8 van Stelling 4.4, waarbij we steeds een uitdrukking vervangen door een equivalente uitdrukking met tussen haakje de motivatie er achter:

$$\begin{array}{rcll}
\forall x\langle P \to Q\rangle & \equiv & \forall x\langle(\neg P) \vee Q\rangle & \text{(propositierekening)} \\
& \equiv & \forall x\langle Q \vee (\neg P)\rangle & \text{(propositierekening)} \\
& \equiv & Q \vee \forall x\langle\neg P\rangle & \text{(Stelling 4.4, regel 3)} \\
& \equiv & Q \vee \neg(\exists x\langle P\rangle) & \text{(Stelling 4.3, regel 1)} \\
& \equiv & \neg(\exists x\langle P\rangle) \vee Q & \text{(propositierekening)} \\
& \equiv & \exists x\langle P\rangle \to Q & \text{(propositierekening)}
\end{array}$$

Hiermee hebben we het bewijs geleverd van regel 8 van Stelling 4.4, uitgaande van propositierekening, Stelling 4.3 en regel 3 van Stelling 4.4.

Het toepassen van commutativiteit van $\vee$ en $\wedge$ zullen we in het vervolg niet steeds meer als aparte stap opschrijven, zo gelden wegens regels 1 en 2 van Stelling 4.4 de volgende equivalenties:

$$\forall x\langle P \vee Q\rangle \equiv \forall x\langle P\rangle \vee Q, \quad \text{en} \quad \exists x\langle P \wedge Q\rangle \equiv \exists x\langle P\rangle \wedge Q,$$

waarin x niet vrij voorkomt in Q en het universum niet leeg is.

Met het toepassen van de stellingen 4.3 en 4.4, propositierekening en herbenoemen van variabelen kunnen de quantoren altijd naar voren worden gehaald, preciezer gezegd, elk predicaat opgebouwd uit quantoren en connectieven kan herschreven worden naar een equivalent predicaat van de vorm $A\langle P\rangle$ waarin A een rij quantoren is, elk met een bijbehorende variable, en P een uitdrukking is waarin die variabelen wel mogen voorkomen, maar geen quantoren. Een predicaat van deze speciale vorm heet een *prenex normaalvorm*. We geven een voorbeeld van een dergelijke herleiding naar prenex normaalvorm, waarbij we aannemen dat het universum niet leeg is. Hierin zijn $P(x)$ en $Q(x)$ willekeurige uitdrukkingen waarin de variabele x voor mag komen, en is $Q(y)$ verkregen uit $Q(x)$ door elk vrij voorkomen van x in $Q(x)$ te vervangen door y, waarbij y zelf niet vrij in $P(x)$ en $Q(x)$ voorkomt.

$$\begin{array}{rcll}
\exists x\langle P(x)\rangle \to \exists x\langle Q(x)\rangle & \equiv & \neg\exists x\langle P(x)\rangle \vee \exists x\langle Q(x)\rangle & \text{(propositierekening)} \\
& \equiv & \forall x\langle\neg P(x)\rangle \vee \exists x\langle Q(x)\rangle & \text{(Stelling 4.3, regel 1)} \\
& \equiv & \forall x\langle\neg P(x)\rangle \vee \exists y\langle Q(y)\rangle & \text{(herben. van var.)} \\
& \equiv & \forall x\langle\neg P(x) \vee \exists y\langle Q(y)\rangle\rangle & \text{(Stelling 4.4, regel 3)} \\
& \equiv & \forall x\langle\exists y\langle\neg P(x)\rangle \vee \exists y\langle Q(y)\rangle\rangle & \text{(Stelling 4.4, regel 2)} \\
& \equiv & \forall x\exists y\langle\neg P(x) \vee Q(y)\rangle & \text{(Stelling 4.3, regel 4)}
\end{array}$$

Als het universum wel leeg is is het allemaal nog veel gemakkelijker: dan kunnen we elke $\exists x\langle\cdots\rangle$ vervangen door F en elke $\forall x\langle\cdots\rangle$ vervangen door T. Hiermee houden we een uitdrukking over waarin helemaal geen quantoren voorkomen, en die is zeker in prenex normaalvorm.

Hoewel het zeer nuttige regels zijn, zijn de regels van stellingen 4.3 en 4.4 niet in alle gevallen toereikend om bewijzen te geven waarbij je de geldigheid van een predicaat moet gebruiken of bewijzen. Daartoe is het zeer gewenst dat we quantoren kunnen elimineren en weer kunnen invoeren, op een soortgelijke manier als we afleidingsregels hebben voor proposities. Eerst moeten we daartoe echter nog wat voorbereidingen treffen.

4.3 Substitutie

Bij het werken met predikaten in bewijzen wordt een zeer belangrijke rol gespeeld door *substitutie* van variabelen: het vervangen van een variabele door iets anders. Een speciaal geval hiervan zijn we al tegengekomen in de vorm van het *herbenoemen* van variabelen. Daar ging het nog om het vervangen van een vrije variabele door een andere naam met als doel de betekenis te verduidelijken.

Soms is het echter ook nodig om een variabele te vervangen door een constante, of zelfs door een ingewikkelder uitdrukking. Voorbeelden hiervan (met als universum de reële getallen) zijn

> Uit de uitspraak $\forall x \langle x^2 \geq 0 \rangle$ wil ik kunnen concluderen $3^2 \geq 0$. Dit betekent dat de x in $x^2 \geq 0$ wordt vervangen door 3.

> Uit $3 > 2$ wil ik kunnen concluderen $\exists x \langle 3 > x \rangle$. Dat kan worden gerechtvaardigd door op te merken dat het predikaat $3 > x$ voor $x = 2$ een ware propositie is.

Met P^x_y duiden we, analoog als bij de proposities, aan dat alle vrij voorkomende x-en in P vervangen worden door y. Hiermee worden de bovenstaande voorbeelden geformaliseerd tot de regels

$$\begin{array}{lcll} \forall x \langle P \rangle & \vdash & P^x_3 & \text{(waarbij } P \text{ staat voor } x^2 \geq 0) \\ P^x_2 & \vdash & \exists x \langle P \rangle & \text{(waarbij } P \text{ staat voor } 3 > x) \end{array}$$

In deze voorbeelden was P een zeer eenvoudig predikaat. Als het predikaten betreft met een ingewikkelder structuur, dan is waakzaamheid vereist:

Alleen de in P vrij voorkomende x-en worden vervangen.

De x vervangende y kan een constante (bijvoorbeeld het getal 2) zijn. Maar y mag ook een variabele of algemener een *expressie* zijn. Het is wel essentieel dat x een variabele is, anders kunnen we geen zinvolle betekenis aan P^x_y geven.

Om het raamwerk zo algemeen mogelijk te houden willen we hier niet heel precies vastleggen wat een expressie is, maar het wordt gemakkelijker naarmate men met meer wiskunde kennis heeft gemaakt. Ruwweg gezegd is een expressie een uitdrukking die (eventueel na invullen van waarden voor variabelen) een waarde in het universum heeft. Wat een expressie is, hangt dus af van het universum waarin wordt gewerkt. In ieder geval worden variabelen en constanten altijd tot de expressies gerekend.

Met de reële getallen als universum rekenen we tot de expressies ook zinvolle uitdrukkingen die ontstaan door op variabelen en constanten bewerkingsoperaties zoals optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen, machtverheffen en bekende functies toe te passen. Voorbeelden van expressies zijn

$$\begin{array}{lllll} x & z & x+z & x+\sin(z) & 2(x-z) \\ 2 & 3 & \ln(x) & 3+4-7 & x+z/u \end{array}$$

In expressies komen behalve eventuele bewerkingssymbolen ($+$, $-$, $\cdot$, $/$) en functiesymbolen (sin, cos, tan, ln, log, etc.) ook variabelen en constanten voor. En juist die variabelen kunnen roet in het eten gooien. Immers, we mogen niet door 0 delen, en bijvoorbeeld ook niet de logaritme nemen van een niet-positief getal. Maar er is meer.

Bekijk bijvoorbeeld het geval $\forall x \exists z \langle x - z = 0 \rangle$. Dit is voor de reële getallen waar. Nu wil ik hieruit graag concluderen $\exists z \langle 2 - z = 0 \rangle$ en $\exists z \langle a - z = 0 \rangle$. Tot zover is er geen vuiltje aan de lucht, want voor alle x is het predikaat $\exists z \langle x - z = 0 \rangle$ waar, dus ook als ik voor x iets invul, zoals 2 of a. Maar stel nu eens dat ik voor x wil invullen $3 + z$. Dat gaat fout, want $\exists z \langle 3 + z - z = 0 \rangle$ is onwaar!

De reden van deze fout is, dat een *vrije variabele* (namelijk z) in de vervanger $3 + z$ wordt *gebonden* door de substitie. Daarom stellen we als eis

> Een vrije variabele in de vervanger mag niet worden gebonden door de substitutie.

Ongelukken zoals hierboven kunnen worden voorkomen door alvorens de substitutie P^x_y daadwerkelijk uit te voeren, eerst te kijken of er wellicht in P gebonden variabelen voorkomen met dezelfde naam als welke in y vrij voorkomen. Geef dan eerst zulke in P gebonden voorkomende variabelen een andere naam: ga ze *herbenoemen.*

In ingewikkelde bewijzen kan het voorkomen dat men variabelen en dergelijke gebruikt, die niet alle hetzelfde *type* (reële getallen, gehele getallen, boolse variabelen etc.) hebben. Ook dan moet men oppassen, omdat een expressie in het algemeen alleen zinvol is binnen één type. Dus mag men bij een substitutie in het algemeen

> niet een variabele vervangen door een uitdrukking van een ander type.

al zijn er uitzonderingen zoals bijvoorbeeld het substitueren van een geheel getal in een reële variabele. Op de spelregels over het omgaan met typen gaan we hier verder niet in.

4.4 Afleidingsregels

Nu hebben we voldoende voorbereidingen getroffen om de *afleidingsregels voor predikaten* te geven. Voor beide quantoren $\forall$ en $\exists$ geven we een introductieregel om een uitdrukking met die quantor te kunnen bewijzen, en een eliminatieregel om een uitdrukking met die quantor te kunnen gebruiken.

Met P en Q geven we predikaten aan. In de motiveringen schrijven we soms $P(x)$ in plaats van P om te benadrukken welke variabele in P ons interesseert.

- *introductie* $\forall$: $\quad P \;\vdash\; \forall x \langle P \rangle$

  mits in het voorafgaande geen veronderstellingen over x gemaakt zijn.

  Motivering: stel dat $P(x)$ afgeleid is zonder iets over x te veronderstellen, dan mag voor x ieder object worden ingevuld. Maar dat is precies de betekenis van $\forall x \langle P(x) \rangle$.

- *eliminatie* $\forall$: $\quad \forall x \langle P \rangle \;\vdash\; P^x_a$

  als a een expressie is.

  Motivering: als P geldt voor alle objecten van het universum, dan ook voor speciale gevallen.

- *introductie* $\exists$: $P^x_a \;\vdash\; \exists x\langle P\rangle$

  als a een expressie is.

  Motivering: als $P(x)$ het predikaat is, en $P(a)$ (a invullen voor x) al bewezen is, dan is er dus een object (nl. a) dat aan P voldoet.

- *eliminatie* $\exists$: $\exists x\langle P\rangle \;\vdash\; Q$

  mits $P^x_a \to Q$ eerder in een subbewijs is bewezen, waarbij a een variabele is die alleen in dat subbewijs, maar *niet* in Q, voorkomt.

  Motivering: in de praktijk zeggen we "er is een element dat aan P voldoet, laten we het zolang a noemen en daarmee verder werken". Aangezien er verder geen eigenschappen van dat element bekend zijn, mag over die a in het voorgaande dus niets gezegd zijn. Bovendien mag Q niet van a afhangen, want uiteindelijk weten we niet welk element die a dan wel is.

We geven een voorbeeld; als universum nemen we de reële getallen.

$\forall x\langle \forall y\langle y > 0 \to x \le y\rangle \to x \le 0\rangle$

BEWIJS:
1 $\forall y\langle y > 0 \to x \le y\rangle \to x \le 0$
  BEWIJS van 1:
  1.1 $\forall y\langle y > 0 \to x \le y\rangle$ (veronderstelling)
  1.2 $x > 0 \to \mathsf{F}$
    BEWIJS van 1.2
    1.2.1 $x > 0$ (veronderstelling)
    1.2.2 $x/2 > 0$ (1.2.1, elementaire rekenkunde)
    1.2.3 $\langle y > 0 \to x \le y\rangle^y_{x/2}$ (1.1, elim. $\forall$, subst. $x/2$ voor y)
    1.2.4 $x/2 > 0 \to x \le x/2$ (betekenis van 1.2.3)
    1.2.5 $x \le x/2$ (1.2.2, 1.2.4, modus ponens)
    1.2.6 $x \le 0$ (1.2.5, elementaire rekenkunde)
    1.2.7 $\neg(x > 0)$ (betekenis van 1.2.6)
    1.2.8 F (1.2.1, 1.2.7, introd. F)
    EINDE BEWIJS van 1.2 (deductie)
  1.3 $\neg(x > 0)$ (1.2, contradictie)
  1.4 $x \le 0$ (betekenis van 1.3)
  EINDE BEWIJS van 1 (deductie)
2 $\forall x\langle \forall y\langle y > 0 \to x \le y\rangle \to x \le 0\rangle$ (1, introd. $\forall$, regel 1 veronderstelt niets over x)
EINDE BEWIJS

Merk op dat in het bewijs wel veronderstellingen zitten over x, maar uitsluitend in het subbewijs van regel 1.

Hiermee is dus bewezen dat de bewering

$$\forall x\langle \forall y\langle y > 0 \to x \le y\rangle \to x \le 0\rangle$$

altijd waar is, anders gezegd, equivalent is aan T. Bij proposities noemden we dat een *tautologie*; nu noemen we dat ook wel een *stelling*, in aansluiting op het begrip stelling zoals we dat al eerder hebben gezien.

Deze zelfde stelling bewijzen we nu nog eens via de contrapositie, en daarna nog eens uit het ongerijmde. Preciezer gezegd: we vervangen de te bewijzen bewering door een andere bewering die volgens bekende equivalenties equivalent is aan de oorspronkelijke bewering. Vervolgens geven we een bewijs van de aldus aangepaste bewering. Wel zullen we sommige argumentaties wat bekorten. We zullen zien dat een aantal argumenten wel steeds terug komen, maar dat de bewijzen verder toch wel verschillend zijn.

Met standaardequivalenties (waaronder contrapositie) herschrijven we bovenstaande uitdrukking naar een equivalente vorm die we vervolgens gaan bewijzen.

$$\begin{array}{ll}
 & \forall x\langle \forall y\langle y > 0 \to x \leq y\rangle \to x \leq 0\rangle \\
\equiv & \forall x\langle \neg(x \leq 0) \to \neg(\forall y\langle y > 0 \to x \leq y\rangle)\rangle \\
\equiv & \forall x\langle x > 0 \to \exists y\langle \neg(y > 0 \to x \leq y)\rangle\rangle \\
\equiv & \forall x\langle x > 0 \to \exists y\langle \neg(\neg(y > 0) \vee x \leq y)\rangle\rangle \\
\equiv & \forall x\langle x > 0 \to \exists y\langle y > 0 \wedge \neg(x \leq y)\rangle\rangle \\
\equiv & \forall x\langle x > 0 \to \exists y\langle y > 0 \wedge x > y\rangle\rangle
\end{array}$$

Stelling: $\forall x\langle x > 0 \to \exists y\langle y > 0 \wedge x > y\rangle\rangle$

BEWIJS:
1 $\quad x > 0 \to \exists y\langle y > 0 \wedge x > y\rangle$
 BEWIJS van 1:
 1.1 $\quad x > 0$ (veronderstelling)
 1.2 $\quad x/2 > 0 \wedge x > x/2$ (1.1, elementaire rekenkunde)
 1.3 $\quad (y > 0 \wedge x > y)^{y}_{x/2}$ (dit is 1.2, subst. $x/2$ voor y)
 1.4 $\quad \exists y\langle y > 0 \wedge x > y\rangle$ (1.3, introductie $\exists$)
 EINDE BEWIJS van 1 (deductie)
2 $\quad \forall x\langle x > 0 \to \exists y\langle y > 0 \wedge x > y\rangle\rangle$ (1, introductie $\forall$)
EINDE BEWIJS

Toelichting: regel 2 is geoorloofd, omdat de enige veronderstelling over x zit in het subbewijs van regel 1.

Zoals beloofd bewijzen we dezelfde stelling ook nog eens uit het ongerijmde, oftewel we brengen de oorspronkelijke uitdrukking eerst met equivalenties naar de vorm $\cdots \to \mathsf{F}$ en gaan die vervolgens bewijzen.

$$\begin{array}{ll}
 & \forall x\langle \forall y\langle y > 0 \to x \leq y\rangle \to x \leq 0\rangle \\
\equiv & \neg(\forall x\langle \forall y\langle y > 0 \to x \leq y\rangle \to x \leq 0\rangle) \to \mathsf{F} \\
\equiv & \exists x\langle \neg(\forall y\langle y > 0 \to x \leq y\rangle \to x \leq 0)\rangle \to \mathsf{F} \\
\equiv & \exists x\langle \neg(\neg(\forall y\langle y > 0 \to x \leq y\rangle) \vee x \leq 0)\rangle \to \mathsf{F} \\
\equiv & \exists x\langle \forall y\langle y > 0 \to x \leq y\rangle \wedge \neg(x \leq 0)\rangle \to \mathsf{F} \\
\equiv & \exists x\langle \forall y\langle y > 0 \to x \leq y\rangle \wedge x > 0\rangle \to \mathsf{F}
\end{array}$$

Stelling: $\exists x \langle \forall y \langle y > 0 \rightarrow x \leq y \rangle \wedge x > 0 \rangle \rightarrow \mathsf{F}$

BEWIJS:
1 $\exists x \langle \forall y \langle y > 0 \rightarrow x \leq y \rangle \wedge x > 0 \rangle$ (veronderstelling)
2 $(\forall y \langle y > 0 \rightarrow a \leq y \rangle \wedge a > 0) \rightarrow \mathsf{F}$
BEWIJS van 2:
2.1 $\forall y \langle y > 0 \rightarrow a \leq y \rangle \wedge a > 0$ (veronderstelling)
2.2 $a > 0$ (2.1, eliminatie $\wedge$)
2.3 $a/2 > 0$ (2.2, elementaire rekenkunde)
2.4 $a > a/2$ (2.2, elementaire rekenkunde)
2.5 $\forall y \langle y > 0 \rightarrow a \leq y \rangle$ (2.1, eliminatie $\wedge$)
2.6 $\langle y > 0 \rightarrow a \leq y \rangle^{y}_{a/2}$ (2.5, elim. $\forall$: subst. $a/2$ voor y)
2.7 $a/2 > 0 \rightarrow a \leq a/2$ (betekenis van 2.6)
2.8 $a \leq a/2$ (2.3, 2.7, modus ponens)
2.9 F (2.4, 2.8, introd. F)
EINDE BEWIJS van 2 (deductie)
3 F (1, 2, eliminatie $\exists$)
EINDE BEWIJS (deductie)

In bovenstaand bewijs hebben we de eliminatie van $\exists$ toegepast. Inderdaad is a op regel 2 een nieuwe variabele, en bovendien komt a niet voor in F.

Aan deze bewijzen zien we dat er soms heel verschillende manieren zijn om een bewijs te geven van dezelfde bewering, door die bewering te vervangen door een equivalente bewering. Dit is iets wat altijd correct is, en het is een goed principe te proberen om een te bewijzen bewering eerst in een zodanige equivalente vorm op te schrijven dat het bewijs zo eenvoudig mogelijk verloopt.

Vanaf nu zullen we vaak bewijzen in minder detail opschrijven, en vaak ook nummering van regels achterwege laten.

4.5 Opgaven

Opgave 4.1

Maak gebruik van de afkortingen

$M(x)$	:	x is mannelijk
$V(x)$	:	x is vrouwelijk
$J(x,y)$	:	x is jonger dan y
$K(x,y)$	:	x is een kind van y
$G(x,y)$	:	x en y zijn met elkaar getrouwd

Schrijf, gebruik makend van bovenstaande afkortingen, met als universum de verzameling van alle mensen, in predikatentaal:

a. Iedereen heeft een vader.

b. Iedereen is jonger dan zijn moeder.

c. Er is een man met een schoondochter die ouder is dan hij.

d. x is grootvader van y.

e. x is een zuster van y.

f. x is een oom van y van moeders kant.

Opgave 4.2

Gebruik de notatie $K(x, y)$ voor: x is een kind van y. Schrijf in predicaat-logische notatie: x heeft precies één kind.

Opgave 4.3

Als universum kiezen we de verzameling der reële getallen.

Schrijf de volgende proposities op in gewoon nederlands, en ga na of ze waar zijn:

a. $\forall x \exists y \langle x + y = 3 \rangle$

b. $\exists x \forall y \langle x + y = 3 \rangle$

c. $\exists x \exists y \langle x + y = 3 \rangle$

d. $\forall x \forall y \langle x + y = 3 \rangle$

Opgave 4.4

Neem de natuurlijke getallen als universum, en schrijf op in logische taal: p is een priemgetal.

Opgave 4.5

We bekijken de propositie

$$\forall x \forall t \langle P(x, t) \to (\exists x \langle Q(x, t) \rangle \wedge \forall t \langle R(x, t) \rangle) \rangle$$

waarin $P(x, t)$, $Q(x, t)$ en $R(x, t)$ predikaten zijn.

a. Geef voor elke voorkomende variabele met een pijl aan door welke quantor hij wordt gebonden.

b. Zorg er door het vervangen van variabelen voor dat eenzelfde letter niet in verschillende scopes optreedt.

Opgave 4.6

Maak gebruik van de volgende afkortingen:
Gxy betekent 'x is getrouwd met y',
en $Kxyz$ is 'z is kind van x en y'.

a. Schrijf als predikaatlogische formule: 'alle kinderen hebben twee ouders' *b.* Idem: ‘niet alle getrouwde mensen hebben kinderen, maar alle kinderen hebben getrouwde ouders’

c. Schrijf in goed Nederlands (gebruik geen variabelen)
$\forall z[(\exists x \exists y(Kxyz \wedge \neg Gxy)) \rightarrow (\exists u \exists v(Kuvz \rightarrow \forall t(Kuvt \rightarrow t = z)))]$

Opgave 4.7

Herleid de volgende predicaten naar prenex normaalvorm.

a. $(\neg(\forall x\langle P(x)\rangle)) \vee \forall x\langle R(x)\rangle$

b. $\forall x\langle P(x) \rightarrow \neg(\exists y\langle R(x,y)\rangle)\rangle$

c. $(\forall x \exists y\langle P(x,y)\rangle) \leftrightarrow \exists x \forall y\langle R(x,y)\rangle$

Opgave 4.8

Voer de volgende substituties uit, rekening houdend met de regels voor substitutie in bewijzen (alle variabelen zijn van eenzelfde type)

a. $(P(x) \vee \exists x\langle \neg P(x)\rangle)^x_t$

b. $(\forall y\langle (P(x,y) \wedge P(y,z)) \rightarrow P(x,z)\rangle)^x_y$

c. $(\forall y\langle (P(x,y) \wedge P(y,z)) \rightarrow P(x,z)\rangle)^y_x$

Opgave 4.9

a. Geef een voorbeeld van een predikaat P, en expressies t en s zo dat

$$(P^x_t)^y_s \quad \text{en} \quad (P^y_s)^x_t$$

verschillende betekenissen hebben.

b. Bedenk een voorwaarde waaronder verwisseling van de volgorde van twee substituties de betekenis niet aantast.

Opgave 4.10

Beschouw het volgende predikaat P:

$$\forall x \exists y(W(x) \rightarrow R(x,y,z)) \rightarrow \forall x \exists u \exists v(W(x) \vee S(x,y) \vee R(z,u,x))$$

a. Omcirkel alle vrije voorkomens van variabelen en geef met een pijl aan door welke quantor de gebonden variabelen gebonden worden.

b. Zoals je weet is $A(x)$ niet equivalent aan $A(y)$ (vanwege de vrije variabele) maar is $\exists x A(x)$ wel equivalent aan $\exists y A(y)$ (beide drukken uit dat er een object is met eigenschap A).

Geef nu een P' met de eigenschap:

- P en P' zijn equivalent
- in P' komt geen variabele zowel vrij als gebonden voor
- elke quantor in P' bindt een unieke variabele