Hoofdstuk 5

Verzamelingen

In de meest uiteenlopende omstandigheden kan het handig zijn om een stel objecten, elementen, of wat dan ook, samen een naam te geven. Het resultaat noemen we dan een *verzameling*. Zo'n verzameling bestaat alleen maar bij de gratie van de elementen die erin zitten.

Het fundamentele verband tussen een verzameling en objecten is dat van elk object vast ligt of het behoort tot die verzameling of niet. Synoniemen van "behoren tot" zijn "lid zijn van" en "element zijn van".

We gebruiken het *esti-teken* $\in$ als afkorting van "is lid van" of "behoort tot" of "is element van", zoals in $x \in A$.

Als x geen element is van A schrijven we $x \notin A$, wat we kunnen zien als afkorting voor $\neg(x \in A)$.

Een verzameling is volledig bepaald door de objecten die er lid van zijn, door zijn elementen.

Heeft een verzameling slechts eindig veel elementen, dan kunnen we die elementen allemaal *opsommen*, en daardoor de verzameling definiëren. De standaardnotatie die we daarvoor gebruiken is het achter elkaar opschrijven van de elementen, gescheiden door komma's, en het geheel afsluiten met accoladen. Bijvoorbeeld

$$V = \{3, 4, 9, 1\}$$
$$W = \{\text{maandag, dinsdag, woensdag, donderdag, vrijdag, zaterdag}\}$$

Merk op dat het er niet toe doet in welke volgorde de elementen tussen de accoladen staan. Ook mogen elementen herhaald worden:

$$\{3, 4, 9, 1\} = \{1, 3, 4, 9\} = \{3, 4, 9, 3, 1\}.$$

Soms gebruiken we ook een suggestieve notatie, zoals in

$$A = \{1, 2, \ldots, 10\} \qquad B = \{3, 4, 5, \ldots\}$$

Een waarschuwing is hier wel op zijn plaats: in zijn algemeenheid is het niet precies duidelijk wat '...' betekent, en is het aan te raden dit alleen te gebruiken als iedereen er dezelfde betekenis aan hecht. Wat zou bijvoorbeeld

$$\{1, 2, 4, 8, 16, \ldots\}$$

betekenen? De meeste mensen zullen dit rijtje wel voortgezet denken op de manier waarin elk getal door verdubbelen uit het vorige verkregen is, maar het zou met het eerste voorbeeld uit Hoofdstuk 1 in gedachten ook de verzameling van mogelijke aantal stukken kunnen zijn waarin een cirkel verdeeld kan worden door een aantal randpunten met elkaar te verbinden.

Voor grotere verzamelingen, waarbij de neiging bestaat om puntjes te gebruiken hebben we behoefte aan een andere notatie.

Om te beginnen, spreken we voor een aantal veel gebruikte verzamelingen af dat we ze altijd met een vast teken zullen aanduiden. Zo kennen we de standaard notaties

$\emptyset$	voor de *lege verzameling*, zonder elementen.
$\mathbf{N}$	voor de verzameling van alle *natuurlijke getallen*,
$\mathbf{Z}$	voor de verzameling van alle *gehele getallen*,
$\mathbf{Q}$	voor de verzameling van alle *rationale getallen*,
$\mathbf{R}$	voor de verzameling van alle *reële getallen*,
$\mathbf{C}$	voor de verzameling van alle *complexe getallen*.

De keuze van de letters **N**, **R** en **C** spreken voor zich, de keuze van de letter **Q** is ontleend aan 'quotiënt', terwijl de keuze van de letter **Z** afkomstig van het Duitse woord 'Zahlen'.

Bij **N** en **Z** zouden we voor een redelijk ervaren lezer ook de puntjes-notatie

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\} \quad \text{en} \quad \mathbf{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

kunnen gebruiken. Voor **Q**, **R** en **C** kan dat niet.

Merk op dat we hier 0 rekenen tot de natuurlijke getallen. Het is alleen een kwestie van afspraak om dat wel of niet te doen; voor beide is wat te zeggen. Helaas is er op dat gebied niet een uniform gebruik: in de diverse leerboeken kom je zowel definities van natuurlijke getallen tegen waarbij 0 er niet bij hoort als waarbij 0 er wel bij hoort.

Vaak stoppen we objecten in een verzameling omdat ze alle een specifieke eigenschap hebben die ons interesseert. Zo schrijven we bijvoorbeeld

$$A = \{x \in \mathbf{Z} |\ 1 \leq x \wedge x \leq 10\},$$

daarmee aangevend dat A bestaat uit alle gehele getallen die voldoen aan de eigenschap dat ze tussen (inclusief) 1 en 10 zitten. Dit is dus dezelfde verzameling als

$$A = \{1, 2, 3, \ldots, 10\},$$

maar we behoeven niet te raden wat de puntjes betekenen, en we hoeven ook niet alle elementen op te sommen. In zijn algemeenheid kunnen we altijd eigenschappen gebruiken om een verzameling te definiëren. Eigenschappen zijn te verwoorden in predikaten, en zo gaan de predikaten dus een rol vervullen bij het definiëren van verzamelingen. Algemeen bedoelen we met

$$\{x \in U \mid E(x)\}$$

de verzameling die bestaat uit alle objecten uit de verzameling U die de eigenschap E hebben. Als de verzameling U steeds dezelfde is (het *universum*) en het is duidelijk wat U is, wordt ook wel kortweg geschreven $\{x|E(x)\}$, analoog aan de manier waarop ook bij predicaten het universum wel wordt weggelaten.

Voor de lege verzameling geldt

$$\emptyset = \{x \mid \mathsf{F}\}.$$

Hierin hebben we het universum weggelaten omdat dit er toch niet toe doet. De lege verzameling is de verzameling zonder elementen die we als deelverzameling van elk gewenst universum op willen kunnen vatten.

Een verzameling A heet *deelverzameling* van een verzameling B als elk element van A ook element van B is. We gebruiken hiervoor de notatie $A \subseteq B$, en soms ook wel $B \supseteq A$. Dus:

$$A \subseteq B \text{ betekent } \forall x \langle x \in A \to x \in B \rangle.$$

De relatie $\subseteq$ tussen verzamelingen heet ook wel *inclusie*. Een verzameling A heet een *echte deelverzameling* van een verzameling B als $A \subseteq B$ en er een element van B is dat niet een element van A is. Hiervoor wordt wel de notatie $A \subset B$ gebruikt, en soms ook wel $B \supset A$, wij zullen deze notatie niet veel tegenkomen.

Twee verzamelingen A en B zijn *gelijk* (notatie $A = B$) als ze dezelfde elementen bevatten, dus precies dan als $A \subseteq B$ en $B \subseteq A$.

$$A = B \text{ betekent } \forall x \langle x \in A \leftrightarrow x \in B \rangle$$

Als $P(x)$ en $Q(x)$ equivalente predicaten zijn, dan zijn de verzamelingen $\{x|P(x)\}$ en $\{x|Q(x)\}$ gelijk. Omgekeerd als $\{x|P(x)\}$ en $\{x|Q(x)\}$ gelijk zijn, dan zijn $P(x)$ en $Q(x)$ equivalent. Dit vatten we als volgt samen:

$$P(x) \equiv Q(x) \iff \{x|P(x)\} = \{x|Q(x)\}.$$

5.1 Operatoren op verzamelingen

Bij twee verzamelingen A en B die niet gelijk zijn, kunnen we een hele serie nieuwe verzamelingen definiëren. Dat is wat we nu gaan doen.

Met $A \cap B$ duiden we de *doorsnede* van A en B aan: de verzameling die bestaat uit alle objecten die zowel in A als in B zitten, oftewel

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\},$$

ook te schrijven als

$$A \cap B = \{x \in A \mid x \in B\},$$

en ook als

$$A \cap B = \{x \in B |\ x \in A\}.$$

Een belangrijke equivalentie die direct volgt uit deze definitie is

$$x \in A \cap B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \wedge x \in B.$$

Twee verzamelingen heten *disjunct* als hun doorsnede leeg is.

Met $A \cup B$ duiden we de *vereniging* van A en B aan: de verzameling die bestaat uit alle objecten van A en alle objecten van B, oftewel

$$A \cup B = \{x |\ x \in A \vee x \in B\}.$$

Een belangrijke equivalentie die direct volgt uit deze definitie is

$$x \in A \cup B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \vee x \in B.$$

Met $A - B$, het *verschil* van A met B, bedoelen we de verzameling bestaande uit alle objecten die wel tot A behoren, maar niet tot B, oftewel

$$A - B = \{x \in A | x \notin B\}.$$

Een belangrijke equivalentie die direct volgt uit deze definitie is

$$x \in A - B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \wedge x \notin B.$$

De verzameling $(A \cup B) - (A \cap B)$ staat bekend als het *symmetrische verschil* van A en B. Deze is gelijk aan $(A - B) \cup (B - A)$ zoals we later nog zullen zien. Hiervoor wordt wel de notatie $A \Delta B$ gebruikt.

Het komt vaak voor dat we het uitsluitend willen hebben over objecten in een vast *universum* U.

Dat houdt tevens in dat alle verzamelingen waarover we dan kunnen spreken deelverzamelingen zijn van U. Is U het universum, dan heet $U - A$ het *complement* van A, ook wel korter genoteerd als A^c:

$$A^c = \{x |\ x \notin A\}.$$

Bij de begrippen die we tot nu toe (maar dat geldt ook voor het vervolg) hebben behandeld, is het nuttig om plaatjes te tekenen. Daartoe worden verzamelingen vaak voorgesteld als elkaar overlappende (cirkel)schijfjes. Zo'n plaatje heet een *Venn-diagram.* Plaatjes verhelderen vaak de betekenis van een definitie. Bovendien zijn plaatjes nuttig bij het ontdekken van vermoedens, die men vervolgens kan proberen te bewijzen (want een plaatje geldt niet als bewijs). Ook is het tekenen van een plaatje soms de snelste manier om te laten zien dat iets niet waar is.

Het wordt nu tijd om de voorgaande grote hoeveelheid van definities (die hopelijk niet allemaal nieuw zijn) te laten figureren in een aantal belangrijke rekenregels voor verzamelingen.

Stelling 5.1 Voor alle verzamelingen A, B en C gelden de volgende regels

1. $A \cup \emptyset = A$
2. $A \cap \emptyset = \emptyset$
3. $A \cup B = B \cup A$
4. $A \cap B = B \cap A$
5. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
6. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
7. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
8. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

Hierin drukt regel 1 uit dat $\emptyset$ een *neutraal element* is met betrekking tot de vereniging. Regels 3 en 4 geven aan dat vereniging en doorsnede *commutatief* zijn. Regels 5 en 6 geven aan dat vereniging en doorsnede *associatief* zijn. Regel 7 geeft aan dat doorsnede *distribueert over* vereniging en regel 8 geeft aan dat vereniging distribueert over doorsnede.

Hoe kunnen we deze stelling bewijzen? We moeten een aantal keren een bewijs geven dat twee verzamelingen V en W gelijk aan elkaar zijn. Per definitie betekent dat dat elk element van V in W moet zitten en omgekeerd. Dit zouden we volgens de regel 'introductie $\forall$' kunnen bewijzen door twee 'halve bewijzen' te geven:

- kies een willekeurig element in V en bewijs dat die in W zit;
- kies een willekeurig element in W en bewijs dat die in V zit.

Vaak kunnen we zo'n bewijs echter korter opschrijven: als we voor een willekeurig element x een reeks equivalenties kunnen vinden van de vorm

$$x \in V \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \cdots\cdots\cdots \Leftrightarrow x \in W$$

dan hebben we daarmee het eerste halve bewijs gegeven door deze reeks van links naar rechts te lezen, en hebben we het tweede halve bewijs gegeven door deze reeks van rechts naar links te lezen. We geven enkele voorbeelden van dergelijke bewijzen. Steeds schrijven we voor elke stap de motivatie voor de geldigheid tussen haakjes er achter, in dezelfde stijl als we dat bij het herleiden van een predicaat naar prenex normaalvorm ook al deden. Equivalenties in deze redeneringen noteren we met $\Leftrightarrow$; deze notatie geeft de twee richtingen al aan waarin we het bewijs kunnen lezen. We beginnen met het bewijs van regel 1 van Stelling 5.1.

$$\begin{array}{rcll} x \in A \cup \emptyset & \Leftrightarrow & x \in A \vee x \in \emptyset & \text{(definitie } \cup) \\ & \Leftrightarrow & x \in A \vee \mathsf{F} & \text{(definitie } \emptyset) \\ & \Leftrightarrow & x \in A & \text{(propositierekening).} \end{array}$$

Vanwege $x \in A \cup \emptyset \Leftrightarrow x \in A$ geldt nu $A \cup \emptyset = A$ en is regel 1 van Stelling 5.1 bewezen.

We bewijzen nu regel 8 van Stelling 5.1.

$$
\begin{array}{rcll}
x \in (A \cap B) \cup C & \Leftrightarrow & x \in (A \cap B) \vee x \in C & \text{(definitie } \cup\text{)} \\
& \Leftrightarrow & (x \in A \wedge x \in B) \vee x \in C & \text{(definitie } \cap\text{)} \\
& \Leftrightarrow & (x \in A \vee x \in C) \wedge (x \in B \vee x \in C) & \text{(propositierekening)} \\
& \Leftrightarrow & (x \in A \cup C) \wedge (x \in B \vee x \in C) & \text{(definitie } \cup\text{)} \\
& \Leftrightarrow & (x \in A \cup C) \wedge (x \in B \cup C) & \text{(definitie } \cup\text{)} \\
& \Leftrightarrow & x \in (A \cup C) \cap (B \cup C) & \text{(definitie } \cap\text{)}
\end{array}
$$

Vanwege $x \in (A \cap B) \cup C \Leftrightarrow x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$ geldt nu $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$, en is dus ook regel 8 van Stelling 5.1 bewezen. De bewijzen van de overige regels van Stelling 5.1 gaan geheel analoog. We zien ook dat het geen toeval is dat dat dezelfde regels die we in de propositierekening tegenkwamen voor $\vee$ en $\wedge$ hier precies zo gelden voor $\cup$ en $\cap$: bij het toepassen van de definities van $\cup$ en $\cap$ vertaalt elk $\cup$-symbool naar $\vee$, elk $\cap$-symbool naar $\wedge$ en $\emptyset$ naar F, waarna de bijbehorende regel uit de propositierekening toegepast wordt, en vervolgens nog een aantal keren de definities van $\cup$ en $\cap$ tot het gewenste resultaat is bereikt.

Aan de ene kant is deze analogie heel handig, aan de andere kant is een waarschuwing hier ook op zijn plaats: $\cup$ en $\cap$ zijn operatoren die altijd op verzamelingen werken, en $\vee$ en $\wedge$ zijn operatoren die altijd op proposities / beweringen / predicaten werken. Haal ze dus niet door elkaar!

Stelling 5.2 Voor alle verzamelingen A, B en C gelden de volgende regels

1. $\emptyset \subseteq A$
2. $A \subseteq (A \cup B)$
3. $(A \cap B) \subseteq A$
4. als $A \subseteq B$, dan $(A \cup C) \subseteq (B \cup C)$
5. als $A \subseteq B$, dan $(A \cap C) \subseteq (B \cap C)$
6. als $A \subseteq C$ en $B \subseteq C$, dan $(A \cup B) \subseteq C$
7. als $A \subseteq B$ en $A \subseteq C$, dan $A \subseteq (B \cap C)$
8. als $A \subseteq B$ en $B \subseteq C$, dan $A \subseteq C$

Regel 8 drukt uit dat inclusie *transitief* is.

Het bewijs van een bewering $V \subseteq W$ gaat vrijwel altijd als volgt: neem een willekeurig element $x \in V$ en bewijs dat $x \in W$.

Als voorbeeld bewijzen we $\emptyset \subseteq A$. Neem een willekeurig element $x \in \emptyset$. Zo'n element bestaat helemaal niet: de aanname is F. Uit F kunnen we alles concluderen, in het bijzonder dat $x \in A$. Hiermee is bewezen $\emptyset \subseteq A$, oftewel regel 1 van Stelling 5.2.

Nu gaan we regel 4 van Stelling 5.2 bewijzen. Volgens het deductieprincipe nemen we aan dat $A \subseteq B$, en moeten op grond daarvan bewijzen dat $(A \cup C) \subseteq (B \cup C)$. Kies daartoe een willekeurig element $x \in A \cup C$. Per definitie geldt dan $x \in A \vee x \in C$. Om deze disjunctie te gebruiken hebben we *eliminatie* $\vee$ nodig. We schrijven het bewijs nog maar eens in detail in stappen op:

1	$x \in A \cup C$	(aanname)
2	$x \in A \vee x \in C$	(1, definitie $\cup$)
3	$x \in A \rightarrow x \in B \cup C$	
	bewijs van 3:	
	3.1 $\quad x \in A$	(veronderstelling)
	3.2 $\quad x \in B$	(3.1, aanname $A \subseteq B$)
	3.3 $\quad x \in B \vee x \in C$	(3.2, introductie $\vee$)
	3.4 $\quad x \in B \cup C$	(3.3, definitie $\cup$)
	einde bewijs van 3 (deductie)	
4	$x \in C \rightarrow x \in B \cup C$	
	bewijs van 4:	
	4.1 $\quad x \in C$	(veronderstelling)
	4.2 $\quad x \in B \vee x \in C$	(4.1, introductie $\vee$)
	4.3 $\quad x \in B \cup C$	(4.2, definitie $\cup$)
	einde bewijs van 4 (deductie)	
5	$x \in B \cup C$	(2, 3, 4, eliminatie $\vee$)

Hiermee hebben we bewezen dat $x \in B \cup C$ voor elk willekeurig element $x \in A \cup C$, oftewel $(A \cup C) \subseteq (B \cup C)$. Daarmee is regel 4 van Stelling 5.2 bewezen.

In woorden zouden we ditzelfde bewijs ook iets slordiger zo op kunnen schrijven:

> We weten $x \in A \vee x \in C$ en maken nu een gevalsonderscheid tussen $x \in A$ en $x \in C$. Als $x \in A$ dan $x \in A \subseteq B \subseteq B \cup C$. Als $x \in C$ dan $x \in C \subseteq B \cup C$. In beide gevallen hebben we $x \in B \cup C$, dus geldt $x \in B \cup C$.

De slordigheid in dit bewijs zit hem in het weglaten van details als nummertjes en namen van regels; maar afgezien daarvan is het precies hetzelfde, en is elk detail weer desgewenst in te vullen. Als daaraan voldaan is, zullen we ook dit soort 'slordige' bewijzen toestaan. Met nadruk wijzen we erop dat dit geen water in de wijn doet op het gebied van precisie, en zeker niet gebruikt kan worden om ontbrekende stukken van een redenering onder de tafel te vegen. Het vinden van een een bewijs blijft even moeilijk en de gestelde eisen aan een redenering blijven dezelfde, we staan alleen een beknoptere en misschien begrijpelijkere notatie van het eindresultaat toe.

Het bewijs van de overige regels van Stelling 5.2 laten we aan de lezer over.

We geven nu een aantal gelijkheden met betrekking tot het *complement* van verzamelingen.

Stelling 5.3 In een vast universum U gelden de volgende regels voor verzamelingen

1. $\emptyset^c = U$
2. $U^c = \emptyset$
3. $(A^c)^c = A$
4. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
5. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
6. als $A \subseteq B$, dan $B^c \subseteq A^c$

We zien dat de bij Stelling 5.1 genoemde analogie tussen operatoren voor proposities en operatoren voor verzamelingen zich nog verder uitbreidt: het complement vertaalt naar $\neg$ en het universum U vertaalt naar T. De basis-regels zijn

$$x \in \emptyset \Leftrightarrow \mathsf{F}, \quad x \in U \Leftrightarrow \mathsf{T}, \quad x \in A^c \Leftrightarrow \neg(x \in A),$$

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \ \vee \ x \in B), \qquad x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A \ \wedge \ x \in B).$$

Samen met de propositierekening kunnen we hiermee rechtstreeks de eerste vijf regels van Stelling 5.3 bewijzen op dezelfde manier als bij Stelling 5.1: $V = W$ bewijs je door voor een willekeurig element x te bewijzen $x \in V \Leftrightarrow x \in W$. Regels 4 en 5 heten wel de wetten van *DeMorgan* omdat ze precies overeenkomen met wetten van DeMorgan in de propositierekening.

Regel 6 komt overeen met *contrapositie* en gaan we nu bewijzen.

Bewijs:

> Neem aan dat $A \subseteq B$.
>
> Kies $x \in B^c$ willekeurig.
>
> Dan $\neg(x \in B)$ (definitie complement).
>
> Stel $x \in A$.
>
> Dan $x \in B$ (vanwege $A \subseteq B$).
>
> Tegenspraak met $\neg(x \in B)$.
>
> Dus $\neg(x \in A)$.
>
> Dus $x \in A^c$ (definitie complement).
>
> Hiermee is bewezen dat $B^c \subseteq A^c$.

Einde Bewijs.

Hiermee is bewezen dat $B^c \subseteq A^c$ onder de aanname dat $A \subseteq B$, oftewel regel 6 van Stelling 5.3 is bewezen.

We bewijzen nu de gelijkheid tussen de twee definities van het *symmetrische verschil* van twee verzamelingen A en B:

$$(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A).$$

Daarvoor hebben we de volgende regel nodig:

$$(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) \qquad (*)$$

In principe hebben we drie manieren om deze equivalentie te bewijzen: we kunnen een *waarheidstafel* opstellen, we kunnen aan de slag met de regels uit Stelling 2.9 en we kunnen voor beide richtingen een deductiebewijs geven. Omdat er hier slechts twee atomaire proposities p en q zijn, hebben we te maken met een waarheidstafel van slechts vier regels en is de eerste methode het snelst en laten we die aan de lezer over. Verder korten we $x \in A$ af tot p en korten we $x \in B$ af tot q.
$x \in (A \cup B) - (A \cap B)$

$$\begin{array}{lll}
\Leftrightarrow & x \in (A \cup B) \wedge \neg(x \in A \cap B) & (\text{definitie } -) \\
\Leftrightarrow & (x \in A \vee x \in B) \wedge \neg(x \in A \cap B) & (\text{definitie } \cup) \\
\Leftrightarrow & (x \in A \vee x \in B) \wedge \neg(x \in A \wedge x \in B) & (\text{definitie } \cap) \\
\Leftrightarrow & (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q) & (\text{definitie } p, q) \\
\Leftrightarrow & (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) & (*) \\
\Leftrightarrow & (x \in A \wedge \neg(x \in B)) \vee (x \in B \wedge \neg(x \in A)) & (\text{definitie } p, q) \\
\Leftrightarrow & (x \in A - B) \vee (x \in B \wedge \neg(x \in A)) & (\text{definitie } -) \\
\Leftrightarrow & (x \in A - B) \vee (x \in B - A) & (\text{definitie } -) \\
\Leftrightarrow & x \in (A - B) \cup (B - A) & (\text{definitie } \cup)
\end{array}$$

Nu is voor een willekeurig element x bewezen dat

$$x \in (A \cup B) - (A \cap B) \Leftrightarrow x \in (A - B) \cup (B - A),$$

waarmee is bewezen dat $(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$.

5.2 Machtsverzameling en cartesisch product

Objecten hoeven geen “ondeelbare” dingen te zijn. Het komt zelfs vaak voor dat we hele verzamelingen als objecten wensen te beschouwen. Denk bijvoorbeeld aan een elftal, een regiment, een mierenkolonie.
Op de middelbare school hebben we iets dergelijks ook gezien bij de kansrekening, waar bijvoorbeeld gevraagd kan worden naar het aantal mogelijkheden waarop men uit een verzameling V met n objecten een greep kan doen. Dat is de vraag naar het aantal deelverzamelingen van V. Dat is het aantal *elementen* van

de verzameling bestaande uit de *deelverzamelingen* van V.

Deze verzameling noemen we de *machtsverzameling* van V. In het Engels heet dit *power set*; we noteren hem dan ook met $\mathcal{P}(V)$:

$$\mathcal{P}(V) = \{A |\ A \subseteq V\}$$

We geven een voorbeeld. Zij V={a,b,c}. Dan is

$$\mathcal{P}(V) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

$\mathcal{P}(V)$ heeft in dit voorbeeld dus 8 ($= 2^3$) elementen. In het algemeen bestaat $\mathcal{P}(V)$ uit 2^n elementen als V uit n elementen bestaat. Dit is als volgt in te zien. Een element van $\mathcal{P}(V)$ is een deelverzameling van V, en die ligt vast door voor elk element aan te geven of die wel of niet in de deelverzameling zit. Als V bestaat uit n elementen heb je hierbij dus n keer een keuze uit twee mogelijkheden. In totaal levert dat 2^n mogelijkheden. Elke mogelijkheid correspondeert met precies één deelverzameling, en elke deelverzameling kan zo worden verkregen, dus heeft $\mathcal{P}(V)$ precies 2^n elementen. Vanwege deze eigenschap wordt de machtsverzameling $\mathcal{P}(V)$ ook wel genoteerd als 2^V; het woord *machtsverzameling* is zo gekozen omdat hier sprake is van *machtsverheffen*.

> Merk op dat we een onderscheid dienen te maken tussen het element a en de verzameling $\{a\}$ die a als enige element heeft.
>
> In het voorbeeld geldt wel $a \in \{a\}$ en $a \in V$ en $\{a\} \in \mathcal{P}(V)$ en $\{a\} \subseteq V$, maar niet $\{a\} \subseteq \mathcal{P}(V)$. Wel geldt $\{\{a\}\} \subseteq \mathcal{P}(V)$.

Onder het *cartesisch product* $A \times B$ van twee verzamelingen A en B verstaan we de verzameling van alle *geordende paren* (x, y) waarvoor $x \in A$ en $y \in B$.
Dat de paren geordende paren zijn, betekent dat (x, y) en (y, x) verschillend zijn als $x \neq y$.

$$A \times B = \{(x, y) |\ x \in A \wedge y \in B\}$$

Een voorbeeld: Zij

$$A = \{a, b, c, d\} \quad \text{en} \quad B = \{a, d, f, e, g\}.$$

Dan is

$$\begin{array}{rclllllll} A \times B & = & \{ & (a,a), & (a,d), & (a,f), & (a,e), & (a,g), & \\ & & & (b,a), & (b,d), & (b,f), & (b,e), & (b,g), & \\ & & & (c,a), & (c,d), & (c,f), & (c,e), & (c,g), & \\ & & & (d,a), & (d,d), & (d,f), & (d,e), & (d,g) & \} \end{array}$$

Als A en B eindige verzamelingen zijn met respectievelijk n en m elementen, heeft het cartesisch product $A \times B$ precies $n \times m$ elementen: voor elk geordend paar hebben we n mogelijkheden om het eerste argument te kiezen en m mogelijkheden om het tweede argument te kiezen. Dit aantal verklaart dat we dit een *product* noemen. Het voorvoegsel is afgeleid van de wiskundige René *Descartes* (1596-1650), die de punten het platte vlak opvatte als geordende paren van reëele getallen: de *coördinaten*.

Een reden dat we de begrippen machtsverzameling en cartesisch produkt als laatste hebben genoemd, is in de eerste plaats omdat ze abstracter (en wellicht onbekender) zijn dan de overige begrippen. Een andere reden is, dat deze constructies ons buiten een gegeven universum kunnen brengen. Men kan gemakkelijk zelf voorbeelden hiervan vinden.

5.3 Vereniging en doorsnede over een indexverzameling

We hebben de doorsnede en de vereniging van twee verzamelingen gedefinieerd, en daarmee kan men ook doorsneden en verenigingen bestuderen van meer dan twee verzamelingen.

Vanwege associativiteit is de betekenis van zo'n doorsnede of vereniging onafhankelijk van de manier waarop haakjes geplaatst worden, en kunnen we de haakjes ook weglaten. Zo geldt bijvoorbeeld

$$A \cup (B \cup (C \cup D)) = (A \cup B) \cup (C \cup D) = ((A \cup B) \cup C) \cup D$$

en kunnen we deze verzameling zonder verwarring schrijven als $A \cup B \cup C \cup D$. Vanwege commutativiteit kunnen we ook nog de volgorde veranderen zonder de betekenis aan te tasten. Let wel dat dit alleen opgaat als er alleen sprake is van vereniging of alleen van doorsnede, maar niet van combinaties van vereniging en doorsnede. Op deze wijze kunnen we bij elke eindige verzameling van verzamelingen spreken van de vereniging en de doorsnede.

We gaan nu een notatie invoeren waarmee ook de vereniging en de doorsnede kan worden genomen van *oneindig veel* verzamelingen. waarvan de doorsnede of de vereniging moet worden bepaald.

In het algemeen is voor een verzameling $\mathcal{A}$ van verzamelingen de vereniging van alle elementen van $\mathcal{A}$ gedefinieerd door

$$\bigcup_{z \in \mathcal{A}} z = \{x |\ \exists z \in \mathcal{A}\ \langle x \in z \rangle\}$$

en de doorsnede van alle elementen van $\mathcal{A}$ door

$$\bigcap_{z \in \mathcal{A}} z = \{x |\ \forall z \in \mathcal{A}\ \langle x \in z \rangle\}$$

Net zoals

$+$ generaliseert tot Σ,

$\vee$ generaliseert tot $\exists$,

$\wedge$ generaliseert tot $\forall$,

kunnen we nu zeggen dat

$\cup$ generaliseert tot $\bigcup$,

$\cap$ generaliseert tot $\bigcap$.

Als voorbeeld kiezen we $\mathcal{A} = \{A, B\}$. Omdat $\exists z \in \mathcal{A}\ \langle x \in z \rangle$ hetzelfde betekent als $x \in A \vee x \in B$, en $\forall z \in \mathcal{A}\ \langle x \in z \rangle$ hetzelfde betekent als $x \in A \wedge x \in B$, geldt in dit geval

$$\bigcup_{z \in \mathcal{A}} z = A \cup B \quad \text{en} \quad \bigcap_{z \in \mathcal{A}} z = A \cap B.$$

Als de verzameling $\mathcal{A}$ van verzamelingen geschreven is als

$$\mathcal{A} = \{A_i | i \in I\}$$

schrijven we ook wel

$$\bigcup_{i \in I} A_i \quad \text{voor} \quad \bigcup_{z \in \mathcal{A}} z, \quad \text{en} \quad \bigcap_{i \in I} A_i \quad \text{voor} \quad \bigcap_{z \in \mathcal{A}} z.$$

In dit geval heet I de *indexverzameling*. In plaats van

$$\bigcup_{i\in\mathbf{N}} \quad \text{en} \quad \bigcap_{i\in\mathbf{N}}$$

wordt ook wel geschreven

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} \quad \text{en} \quad \bigcap_{i=0}^{\infty}.$$

Als $I = \{i \in \mathbf{N} | i > 0 \wedge i < 10\}$ hebben we dus

$$\bigcup_{i\in I} A_i \quad = \quad A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7 \cup A_8 \cup A_9;$$

zo zien we dat met deze notatie soms ook eindige verenigingen en doorsneden korter kunnen opschrijven dan voorheen.

Als slot van dit hoofdstuk bewijzen we dat

$$\bigcup_{i\in\mathbf{Z}} A_i \;=\; \mathbf{R}$$

waarbij voor iedere $i \in \mathbf{Z}$ de deelverzameling A_i van $\mathbf{R}$ gedefinieerd is door

$$A_i = \{x \in \mathbf{R} | i \leq x \wedge x \leq i+1\}.$$

We bewijzen dit in twee stappen: $\bigcup_{i\in\mathbf{Z}} A_i \subseteq \mathbf{R}$, afgekort tot '$\subseteq$', en $\bigcup_{i\in\mathbf{Z}} A_i \supseteq \mathbf{R}$, afgekort tot '$\supseteq$'.

Bewijs:

'$\subseteq$':

We kiezen een willekeurig element $x \in \bigcup_{i\in\mathbf{Z}} A_i$ en moeten daarvoor bewijzen dat $x \in \mathbf{R}$. Volgens de definitie van $\bigcup$ is er $i \in \mathbf{Z}$ zodanig dat $x \in A_i$. Vanwege $A_i \subseteq \mathbf{R}$ concluderen we nu $x \in \mathbf{R}$, en hebben we '$\subseteq$' bewezen.

'$\supseteq$':

We kiezen een willekeurig element $x \in \mathbf{R}$ en moeten daarvoor bewijzen dat $x \in \bigcup_{i\in\mathbf{Z}} A_i$. Definieer nu n als het grootste gehele getal waarvoor geldt $n \leq x$. Per definitie geldt dan $n \leq x$. Maar er geldt ook dat $x < n+1$, want als dat niet zo was, dan was $n+1 \leq x$, en was er een groter geheel getal, nl. $n+1$, waarvoor $n+1 \leq x$. Vanwege $x < n+1$ geldt zeker $x \leq n+1$, en vanwege $n \leq x$ geldt nu $n \leq x \wedge x \leq n+1$. Hieruit volgt dat $x \in A_n$. Dus is er een $i \in \mathbf{Z}$ (nl. n) met $x \in A_i$, dus geldt $x \in \bigcup_{i\in\mathbf{Z}} A_i$. Hiermee is '$\supseteq$' bewezen.

Einde Bewijs.

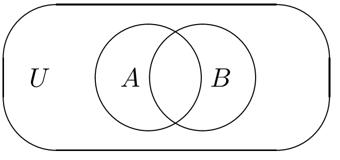
5.4 Opgaven

In de volgende opgaven is $X \Delta Y$ het symmetrische verschil tussen de verzamelingen X en Y.

Opgave 5.1

In onderstaand plaatje is U het universum, en zijn A en B verzamelingen. Teken dit plaatje een aantal malen over, en geef door arcering aan

a.	$A \Delta B$	**d.**	$A - B$
b.	$A^c \Delta B^c$	**e.**	$A^c - B$
c.	$(A^c - B^c)^c$	**f.**	$(A - B)^c$



Opgave 5.2

$P(x)$ en $Q(x)$ zijn predikaten, en x is een variabele over een universum U. We stellen $A = \{x|\ P(x)\}$ en $B = \{x|\ Q(x)\}$. Druk de volgende verzamelingen uit in A en B en de operatoren op verzamelingen.

a. $\{x|\ P(x) \to Q(x)\}$

b. $\{x|\ P(x) \wedge Q(x)\}$

c. $\{x|\ P(x) \leftrightarrow Q(x)\}$

d. $\{x|\ P(x) \vee Q(x)\}$

Opgave 5.3

Teken de bijbehorende Venn-diagrammen, en bewijs

a. $A - (B - C) = A - (B - (A \cap C))$

b. $(A - B) - C = A - (B \cup C)$

c. $A - B = A - (A \cap B)$

d. $A - B = (A \cup B) - B$

e. $(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$

Opgave 5.4

Bestudeer de volgende uitspraken. Geef in geval van algemene juistheid een bewijs, geef anders een tegenvoorbeeld.

a. $A - B = (A \cup C) - (B \cup C)$

b. $A - B = (A \cap C) - (B \cap C)$

c. $(A - B) \cup C = (A \cup C) - (B \cup C)$

d. $(A - B) \cap C = (A \cap C) - (B \cap C)$

e. $(A \Delta B) \cup C = (A \cup C) \Delta (B \cup C)$

Opgave 5.5

Voor een verzameling X met eindig veel elementen, geven we met $\#X$ het aantal elementen van X aan. Alle in deze opgave voorkomende verzamelingen worden geacht eindig veel elementen te bezitten.

a. Beredeneer dat $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$.

b. Gebruik het resultaat van a. om aan te tonen dat

$$\#(A \cup B \cup C) = \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C).$$

Opgave 5.6

Bewijs dat voor verzamelingen A en B geldt

$$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B).$$

Opgave 5.7

a. Bewijs dat voor verzamelingen A en B geldt

$$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B).$$

b. Geef een voorbeeld van twee verzamelingen A en B waarvoor niet geldt dat

$$\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B).$$

Opgave 5.8

Bestudeer de volgende uitspraken. Geef in geval van algemene juistheid een bewijs, geef anders een tegenvoorbeeld.

a. $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$

b. $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$

Opgave 5.9

Bewijs dat voor verzamelingen A, B en C geldt

a. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

b. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

c. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

d. $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

Opgave 5.10

Laten A en B deelverzamelingen van U zijn. Laat $D \subseteq (U \times U)$ gegeven zijn door $D = \{(u, u) |\ u \in U\}$ (D heet de *diagonaal* van $U \times U$).

Bewijs: $A \cap B = \emptyset$ dan en slechts dan als $(A \times B) \cap D = \emptyset$.

Opgave 5.11

Bewijs dat

$$\bigcup_{i \in \mathbf{N}} B_i \ = \ \mathbf{R}$$

waarbij voor iedere $i \in \mathbf{N}$ de deelverzameling B_i van $\mathbf{R}$ gedefinieerd is door

$$B_i = \{x \in \mathbf{R}| - i < x \wedge x < i\}.$$