Hoofdstuk 7

Volledige inductie

Van een deelverzameling V van de verzameling $\mathbf{N}$ van alle natuurlijke getallen veronderstellen we het volgende:

(i) $0 \in V$
(ii) $\forall k \in \mathbf{N}\langle k \in V \to k+1 \in V\rangle$

Dan is $V = \mathbf{N}$. Men ziet dit als volgt in:

$0 \in V$, want dat is gegeven in (i).
Dan ook $1 \in V$ wegens (ii).
Dan ook $2 \in V$ wegens (ii).
Dan ook $3 \in V$ wegens (ii).
En zo voort.

Hiermee is bewezen dat 1, 2 en 3 elementen van V zijn, verder nog niets. Maar ik zal ongetwijfeld zo voortgaand kunnen bewijzen dat 1000 een element van V is. Als iemand mij een getal noemt, kan ik (misschien moet ik het aan mijn opvolgers overlaten) laten zien dat dat getal tot V behoort. Daarmee is echter nog niet bewezen dat $V = \mathbf{N}$.

Daarvoor is nodig dat $\forall n \in \mathbf{N}\langle n \in V\rangle$ wordt bewezen. Maar dit is onmogelijk met de ons bekende bewijsmethoden: we willen gebruik maken van de nog niet geformuleerde eigenschap dat elk natuurlijk getal te bereiken is door te beginnen met 0 en vanaf daar een eindig aantal keren de opvolger te nemen. Omdat we dit principe willen gebruiken om de geldigheid van predicaten over natuurlijke getallen te bewijzen, formuleren we dit principe in de taal van predicaten. We noemen dit het *principe van volledige inductie*, en vatten dit op als een *axioma*, een basisprincipe waarvan we de geldigheid aannemen en dat we altijd mogen gebruiken. Het gebruik van dit principe noemen we *volledige inductie*, of kortweg *inductie*.

Principe van volledige inductie:
Zij P een predikaat, gedefinieerd op $\mathbf{N}$, waarvoor geldig zijn:

- $P(0)$, en
- $\forall k \in \mathbf{N}\langle P(k) \rightarrow P(k+1)\rangle$.

Dan geldt $\forall n \in \mathbf{N}\langle P(n)\rangle$.

Om hiermee te bewijzen dat een bewering $P(n)$ waar is voor alle $n \in \mathbf{N}$ moet je dus twee dingen doen:

- bewijs dat $P(0)$ waar is, en
- neem voor willekeurige $k \in \mathbf{N}$ aan dat $P(k)$ waar is, en bewijs dat dan ook $P(k+1)$ waar is.

De eerste stap heet wel de *basisstap*, de tweede stap de *inductiestap*. De aanname dat $P(k)$ waar is heet de *inductiehypothese*.

Als eerste voorbeeld bewijzen we met behulp van dit principe van volledige inductie dat inderdaad $V = \mathbf{N}$ voor een verzameling V die voldoet aan (i) en (ii). We definiëren

$$P(n) \equiv (n \in V).$$

Vanwege (i) geldt nu $P(0)$ en is aan de basisstap voldaan. Neem voor willekeurige $k \in \mathbf{N}$ aan dat $P(k)$ waar is, oftewel dat $k \in V$. Volgens (ii) geldt dan $k+1 \in V$, oftewel $P(k+1)$. Hiermee is de inductiestap bewezen. Volgens het principe van volledige inductie is nu inderdaad bewezen dat $P(n)$ waar is voor alle $n \in \mathbf{N}$, oftewel dat $\forall n \in \mathbf{N}\langle n \in V\rangle$. Hieruit concluderen we dat inderdaad $V = \mathbf{N}$.

Bij de volgende stellingen gaat het niet alleen om de stelling zelf, maar vooral om de manier waarop het bewijs gegeven wordt met behulp van het principe van volledige inductie.

Stelling 7.1 Voor elk natuurlijk getal n geldt $\displaystyle\sum_{m=0}^{n} m = n(n+1)/2$

Bewijs:

Zij $P(n)$ de uitspraak $\displaystyle\sum_{m=0}^{n} m = n(n+1)/2$.

Basisstap:

Voor $n = 0$ staat er $0 = (0 * 1)/2$, en dit is waar.

Dus $P(0)$ is waar, en de basisstap is voltooid.

Inductiestap:

Neem nu aan dat $P(k)$ waar is (de inductiehypothese).

Dat wil zeggen $\sum_{m=0}^{k} m = k(k+1)/2$.

Volgens de betekenis van notatie $\sum$ en de inductiehypothese is nu

$$\sum_{m=0}^{k+1} m = (\sum_{m=0}^{k} m) + k + 1 = k(k+1)/2 + k + 1.$$

Dit is gelijk aan $(k+1)(k+2)/2$ zodat inderdaad $P(k+1)$ geldt.

Hiermee is de inductiestap voltooid.

Nu is voldaan aan beide eisen van het principe van volledige inductie, zodat we mogen concluderen dat $P(n)$ geldt voor alle natuurlijke getallen n.

Einde Bewijs.

Stelling 7.2 Zij r een reëel getal waarvoor $r > -1$. Dan geldt voor elk natuurlijk getal n de ongelijkheid $(1+r)^n \geq 1 + n \cdot r$.

Bewijs:

Zij $P(n)$ de uitspraak $((1+r)^n \geq 1 + n \cdot r)$

1 $1 + r > 0$ wegens $r > -1$
2 $P(0)$ is waar, immers $(1+r)^0 = 1$ en $1 + 0 \cdot r = 1$
3 $P(k) \rightarrow P(k+1)$, immers
  3.1 Stel $P(k)$ is waar
  3.2 $(1+r)^{k+1} = (1+r)^k(1+r)$ (betekenis van machten)
  3.3 $(1+r)^k(1+r) \geq (1+kr)(1+r)$ wegens 1 en 3.1
  3.4 $(1+kr)(1+r) \geq 1 + (k+1)r$ want
    $(1+kr)(1+r) = 1 + kr + r + kr^2 =$
    $1 + (k+1)r + kr^2 \geq 1 + (k+1)r$
  3.5 $(1+r)^{k+1} \geq 1 + (k+1)r$ wegens 3.2, 3.3 en 3.4
  3.6 regel 3.5 is precies de uitspraak $P(k+1)$, dus regel 3 is waar

Met het principe van volledige inductie volgt nu uit 2 en 3 dat voor iedere n in $\mathbf{N}$ de uitspraak $P(n)$ waar is, dus is de stelling waar.

Einde Bewijs.

In het inleidende hoofdstuk hebben we aantal voorbeelden gezien van bewijzen met behulp van een *invariant*. Zo'n invariant is een bepaalde eigenschap. Daarbij was de aanname dat

- de invariant aan het begin geldt, en dat

- als de invariant geldt en er wordt vervolgens een stap gedaan, dan geldt na afloop van die stap de invariant weer.

De conclusie die we dan trokken was dat de invariant na het uitvoeren van een willekeurig eindig aantal stappen altijd geldt. Destijds hebben we dat als principe geformuleerd en aannemelijk gemaakt; nu kunnen we de geldigheid van dit invariantenprincipe bewijzen met volledige inductie. We gaan met inductie naar n bewijzen dat na n stappen de invariant geldig is. Voor $n = 0$ geldt dit volgens de eerste aanname, daarmee is de basisstap bewezen. Vervolgens vragen we ons af of de invariant geldt na $n + 1$ stappen. Het uitvoeren van $n + 1$ stappen kunnen we zien als het uitvoeren van n stappen en daarna nog één stap. Volgens de inductiehypothese moge we aannemen dat na n stappen inderdaad de invariant geldt. Volgens de tweede aanname geldt dan dat na het uitvoeren van nog één stap, dus na in totaal $n + 1$ stappen, de invariant weer geldt. Volgens het principe van volledige inductie is hiermee bewezen dat voor elke n geldt dat de invariant na het uitvoeren van n stappen geldt, precies wat we wilden bewijzen.

We gaan nu met volledige inductie een bekende stelling bewijzen over priemgetallen.

Een natuurlijk getal $p \geq 2$ heet een *priemgetal* als zijn enige delers 1 en p zelf zijn.

Stelling 7.3 Ieder natuurlijk getal $q \geq 2$ is een priemgetal, of is een produkt van priemgetallen.

Bewijs:

Zij $P(n)$ de uitspraak: voor alle natuurlijke getallen k die voldoen aan $2 \leq k \leq n + 2$ geldt dat k een priemgetal of een produkt van priemgetallen is.

Basisstap: $P(0)$ is waar, want het enige getal k dat voldoet aan $2 \leq k \leq 0 + 2$ is $k = 2$ en dat is een priemgetal.

Inductiestap:

Neem aan dat $P(x)$ waar is.

We moeten bewijzen dat $P(x + 1)$ waar is, oftewel dat voor alle natuurlijke getallen k die voldoen aan $2 \leq k \leq x + 3$ geldt dat k een priemgetal of een produkt van priemgetallen is.

Vanwege $P(x)$ hoeven we dit alleen maar te bewijzen voor $k = x + 3$.

Neem dus aan dat $P(x)$ geldt, we moeten nu bewijzen dat $x+3$ een priemgetal of een produkt van priemgetallen is.

Stel dat $x + 3$ geen priemgetal is.

Dan heeft $x + 3$ een deler y die ongelijk is aan 1 en ongelijk aan $x + 3$.

Dan is dus $x + 3 = y * z$ waarbij $y \neq 1$ en $y \neq x + 3$.

Dus geldt $2 \leq y \leq x + 2$.

Vanwege $x + 3 = y * z$ geldt dan ook $2 \leq z \leq x + 2$.

Nu weten we door de inductiehypothese $P(x)$ dat y en z beide priemgetallen of produkten van priemgetallen zijn.

Dus is $x + 3 = y * z$ ook een produkt van priemgetallen.

Uit het voorgaande concluderen we dat $x + 3$ een priemgetal of een produkt van priemgetallen is, hetgeen precies is wat we wilden bewijzen.

Einde Bewijs.

Merk op dat we het bovenstaande bewijs ook kunnen interpreteren als een andere vorm van volledige inductie op de uitspraak $Q(n)$ die luidt: "$n + 2$ is een priemgetal of een produkt van priemgetallen", namelijk via het principe

Zij Q een predikaat, gedefinieerd op $\mathbf{N}$, waarvoor:

- $Q(0)$ is waar, en
- voor elke $k \in \mathbf{N}$ geldt:
  als $Q(x)$ waar is voor alle $x \leq k$ dan is $Q(k + 1)$ waar.

Dan geldt $\forall n \in \mathbf{N}\langle Q(n)\rangle$.

Men noemt dit wel *sterke volledige inductie*, alhoewel daar geen enkele reden voor bestaat, immers dit komt neer op "gewone" volledige inductie voor de uitspraak $P(n)$, luidend "voor alle $k \leq n$ geldt $Q(k)$".

Ook kent men *volledige inductie vanaf* m via het principe

Zij R een predikaat, gedefinieerd op natuurlijke getallen $\geq m$, waarvoor

- $R(m)$ is waar, en
- voor elke $k \geq m$ geldt:
  als $Q(k)$ waar is dan is ook $Q(k + 1)$ waar.

Dan is $R(y)$ waar voor alle natuurlijke getallen $y \geq m$.

Dit principe spaart alleen wat schrijfwerk en doet daarmee een bewijs eenvoudiger ogen. Je kunt echter altijd hetzelfde bewijs geven met 'gewone' volledige inductie waarbij $P(n)$ gedefinieerd is als $R(n + m)$. Toch zijn dit soort hulpmiddelen waarmee je bewijzen wat korter kunt maken of stroomlijnen zeer waardevol: bij het zoeken naar een bewijs wil je je kunnen concentreren op het echte probleem, en niet op de notatie er om heen.

Er zijn mensen die er de voorkeur aan geven niet de stap van n naar $n + 1$ te maken maar van $n - 1$ naar n. De inductiestap ziet er dan als volgt uit:

> Neem voor willekeurige $n > 0$ aan dat $P(n - 1)$ geldt.
>
> Bewijs dat dan ook $P(n)$ geldt.

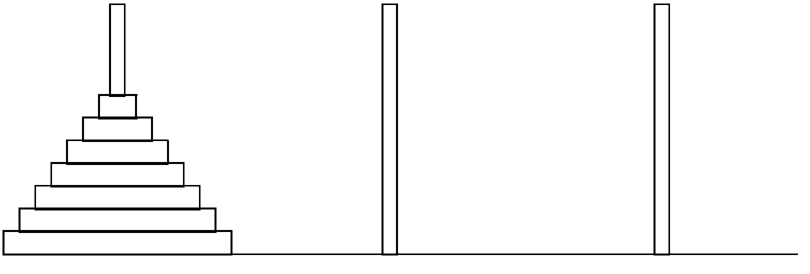
De sterke variant hiervan luidt:

> Neem aan dat $P(k)$ geldt voor elke $k \in \mathbf{N}$ met $k < n$.
>
> Bewijs dat dan ook $P(n)$ geldt.

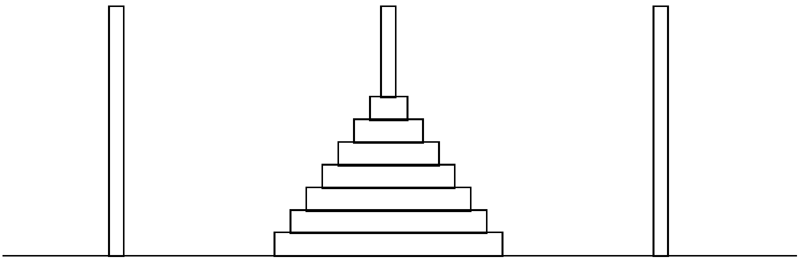
Het aardige van deze laatste vorm is dat je de basisstap niet meer afzonderlijk na hoeft te gaan: dit is namelijk het speciale geval van de inductiestap waarbij $n = 0$. In dat geval is er geen enkele aanname, want er is geen enkele $k \in \mathbf{N}$ met $k < n$, maar je moet wel bewijzen dat $P(n)$ oftewel $P(0)$ geldt. Dat is precies de basistap.

Ruwweg kunnen we zeggen dat inductie betekent dat als je wilt bewijzen dat een eigenschap voor elk natuurlijk getal geldt, je bij het bewijs daarvan desgewenst gebruik mag maken van de aanname dat diezelfde eigenschap voor kleinere getallen al geldt.

De verschijningsvormen kunnen heel verschillend zijn. In de meeste opgaven bij dit hoofdstuk wordt gevraagd: 'Bewijs dat voor elk natuurlijk getal $n \cdots$' en gaat dit het handigst met inductie naar n. Soms moet je iets bewijzen over n zonder dat je verder iets over n weet en moet je het ook voor elke n doen zonder dat dat er heel expliciet bij staat. Als je bijvoorbeeld iets over eindige verzamelingen moet bewijzen, kan het handig zijn om dat te doen door met inductie naar n te bewijzen dat de gewenste eigenschap voor elke verzameling met n elementen geldt. Het kan zelfs voorkomen dat inductie een handige methode is om iets te bewijzen wat slechts over één specifiek getal n gaat. Het kan makkelijker zijn om de algemene bewering voor elke willekeurige n te bewijzen met inductie dan alleen maar de bewering over dat ene specifieke getal rechtstreeks te bewijzen. We gaan hier nu een voorbeeld van geven: de *torens van Hanoi*.



Er zijn hier drie palen, en er zijn zeven schijven in oplopende grootte met een gat in het midden, die precies over de palen geschoven kunnen worden. In het begin liggen alle zeven schijven om de meest linkse paal, van onder naar boven gerangschikt van groot naar klein, zoals in het plaatje is aangegeven. De bedoeling is nu om deze hele stapel van schijven over te hevelen naar de middelste paal, zoals in het volgende plaatje is aangegeven:



Hierbij moeten de volgende spelregels in acht worden genomen:

- per stap kan slechts één schijf verplaatst worden, en wel de bovenste schijf van de stapel rond de ene paal naar een andere paal;
- een schijf mag nooit op een kleinere schijf worden gelegd.

De opdracht is nu om te laten zien dat

- je in 127 stappen de hele stapel rond de linkerpaal kunt overhevelen naar de middelste paal, en
- dat het niet in minder dan 127 stappen kan.

Hoewel deze opdracht betrekking heeft op de gegeven situatie met zeven schijven, ligt het voor de hand om eerst eenvoudiger instanties te bekijken met minder schijven. Hierbij volgen we een heel algemeen principe voor het aanpakken van een moeilijk probleem: probeer eerst eenvoudiger instanties van het probleem goed te begrijpen.

Laten we dus eens beginnen met één schijf. Die kunnen we in één stap van de linkerpaal naar de middelste paal overhevelen. Dat is wel erg makkelijk: na één stap zijn we klaar. Ietsje lastiger wordt het met twee schijven. Als eerste stap moeten we dan de bovenste schijf van de linkerpaal naar de middelste of rechterpaal verplaatsen. Laten we de rechterpaal kiezen. Vervolgens kunnen we de onderste schijf van de linkerpaal naar de middelste paal verplaatsen, en tenslotte kunnen we de kleinste schijf die we rond de rechterpaal geparkeerd hadden naar het midden brengen, en zijn we klaar. Hier hebben we drie stappen voor nodig gehad. Als we nu gaan spelen met drie of vier schijven beginnen we het volgende patroon te ontdekken: als ik een stapel van n van links naar het midden wil verplaatsen, moet ik eerst de bovenste $n-1$ naar de rechterpaal overhevelen, dan de onderste schijf naar het midden verplaatsen, en tenslotte de hele stapel van $n-1$ op de rechterpaal naar het midden overhevelen. Als ik het aantal stappen dat ik voor het verplaatsen van n schijven nodig heb $f(n)$ noem, zie ik uit deze observatie dat $f(1) = 1$ en $f(n) = f(n-1) + 1 + f(n-1)$. Invullen van kleine waarden: $f(1) = 1, f(2) = 3, f(3) = 7, f(4) = 15, f(5) = 31, f(6) = 63, \ldots$ doet het patroon opdoemen dat $f(n) = 2^n - 1$. Op grond hiervan proberen we het volgende met inductie naar n te bewijzen:

> Als we volgens bovenstaande spelregels een stapel van n schijven rond de linkerpaal willen overhevelen naar de middelste paal, kan dat in $2^n - 1$ stappen, en kan het niet in minder dan $2^n - 1$ stappen.

Bewijs:

Basisstap:

Voor $n = 1$ kun je die ene schijf in $2^n - 1 = 1$ stap naar het midden verplaatsen, en het kan niet in minder stappen. De bewering is dus waar voor $n = 1$.

Inductiestap:

We moeten twee dingen bewijzen: dat het kan in $2^n - 1$ stappen, en dat het niet kan in minder dan $2^n - 1$ stappen.

Dat het kan is als volgt in te zien.

Verplaats eerst de bovenste $n - 1$ schijven van de linkerpaal naar de rechterpaal in $2^{n-1} - 1$ stappen. Volgens de inductiehypothese is een dergelijke verplaatsing mogelijk naar de middelste paal, maar door de rechterpaal en de middelste paal elkaars rol in te laten nemen is dit ook mogelijk van de linkerpaal naar de rechterpaal. Vervolgens wordt de onderste schijf van links naar het midden verplaatst. Tenslotte worden de $n - 1$ schijven van de rechterpaal naar de middelste paal verplaatst in $2^{n-1} - 1$ stappen. Dit kan volgens de inductiehypothese door daarin de linkerpaal en de rechterpaal van rol te laten verwisselen. Op deze wijze is de volledige stapel van n schijven van links naar het midden verplaatst; het hiervoor benodigde aantal stappen was $(2^{n-1} - 1) + 1 + (2^{n-1} - 1) = 2 * 2^{n-1} - 1 = 2^n - 1$.

We moeten nog laten zien dat het niet in minder stappen kan. Het is duidelijk dat de grootste schijf tenminste één keer verplaatst zal moeten worden. Deze kan alleen maar verplaatst worden volgens de spelregels als alle andere schijven rond de paal geplaatst zijn waar de grootste schijf niet vandaan komt en ook niet naar toe gaat. Volgens de inductiehypothese zijn voor het verplaatsen van de andere $n-1$ schijven naar een andere paal tenminste $2^{n-1}-1$ stappen nodig. Tenslotte zal na de laatste keer dat de grootste schijf verplaatst wordt, de hele stapel van $n - 1$ kleinere weer naar het midden moeten worden overgeheveld. Ook hier zijn volgens de inductiehypothese tenminste $2^{n-1} - 1$ stappen nodig. In totaal is het minimale aantal hiervoor benodigde stappen dus $(2^{n-1} - 1) + 1 + (2^{n-1} - 1) = 2^n - 1$.

Einde Bewijs.

Het oorspronkelijke probleem voor zeven schijven is nu opgelost door deze bewering die we net hebben bewezen voor elke $n \geq 1$, toe te passen voor $n = 7$.

Het is zelfs met deze redenering in te zien dat het verplaatsen van de hele stapel van n schijven van de linkerpaal naar de middelste paal slechts op precies één manier kan in $2^n - 1$ stappen, en wel volgens de manier die in het bewijs is aangegeven en eenvoudig in een algoritme kan worden omgezet.

7.1 Inductieve definities

Tot nu toe hebben we inductie gebruikt om uitspraken over natuurlijke getallen te bewijzen. De achterliggende gedachte is dat elk natuurlijk getal te bereiken is door te beginnen met 0 en vanaf daar een eindig aantal keer de opvolger te nemen. Ditzelfde principe kunnen we ook gebruiken om afbeeldingen f van $\mathbf{N}$ naar een verzameling A te definiëren. Daartoe definiëren we $f(0)$ apart, en geven we een definitie van $f(n+1)$ waarin gebruikt mag worden van $f(n)$. Volgens bovenstaand principe is daarmee $f(n)$ vastgelegd voor elk natuurlijk getal n, en is de afbeelding f daarmee geheel gedefinieerd. Een dergelijke definitie van een afbeelding noemen we een *inductieve definitie*. Op deze manier wordt bij het definiëren van $f(n+1)$ de definitie van dezelfde afbeelding f aangeroepen. Een dergelijke definitie die zichzelf weer aanroept heet ook wel een *recursieve definitie*, net zoals in een programmeertaal een methode of procedure die zichzelf aanroept ook *recursief* heet.

We geven een aantal voorbeelden.

Wanneer we x^n willen definiëren voor natuurlijke getallen n, dan kan dat het duidelijkst door te stellen

$$x^0 = 1 \text{ en voor elk natuurlijk getal } n \text{ is } x^{n+1} = x^n x.$$

Een ander voorbeeld:

$$0! = 1 \text{ en voor elk natuurlijk getal } n \text{ is } (n+1)! = (n+1)(n!).$$

Met dit laatste is voor elk natuurlijk getal n de waarde $n!$ gedefinieerd, uitgesproken als *n faculteit* (Engels: *n factorial*).

Omdat een afbeelding f van $\mathbf{N}$ naar een verzameling A gegeven wordt door het definiëren van een rij van waarden $f(0), f(1), f(2), \ldots$, wordt een afbeelding waarvan het domein $\mathbf{N}$ is ook wel een (oneindige) *rij* genoemd (Engels: *sequence*); een afbeelding waarvan het domein $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ is voor zekere $n \in \mathbf{N}$ wordt wel een *eindige rij* genoemd. Voor eindige en oneindige rijen wordt vaak de notatie f_n gekozen in plaats van $f(n)$, waarmee minder haakjes hoeven te worden geschreven.

Net zoals we bij het geven van bewijzen met volledige inductie een 'sterke' variant hadden waarbij we de geldigheid van $P(k)$ mogen aannemen voor elke k met $k < n+1$, mogen bij het geven van de definitie van $f(n+1)$ niet alleen de waarde van $f(n)$ bekend veronderstellen, maar ook de waarde van $f(k)$ voor elke k met $k < n+1$. Het komt er op neer dat we bij het definiëren van een afbeedling toegepast op een willekeurig natuurlijk getal gebruik mogen maken van diezelfde afbeelding toegepast op kleinere getallen.

Een zeer bekende, op deze manier inductief gedefinieerde rij getallen is de zogenaamde *rij van Fibonacci*, die gedefinieerd is door

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \text{ en } a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \text{ voor } n \in \mathbf{N}.$$

Na de twee eerste elementen die beide de waarde 1 hebben is elk element in deze rij dus de som van zijn twee voorgangers. Het verhaal gaat dat dit proces geïnspireerd is door de manier waarop konijnen zich vermenigvuldigen, maar je moet wel enige weinig realistische aanames doen om met konijnenpopulaties precies op deze getallen uit te komen.

We schrijven het beginstuk van deze rij op in een tabel:

n:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
a_n:	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

n:	14	15	16	17	18	19	20	21	22
a_n:	610	987	1597	2584	4181	6765	10946	17711	28657

De waarden in deze rij heten wel *fibonaccigetallen*. Hiervan zijn bijzonder veel eigenschappen bekend, waarvan we in de volgende stelling een noemen. Weer gaat het hier meer om de manier waarop het bewijs wordt gegeven dan om het resultaat op zich.

Stelling 7.4 Voor elk natuurlijk getal n geldt

$$a_{n+1}^2 - a_n * a_{n+2} = (-1)^{n+1}.$$

Bewijs:

We schrijven $P(n)$ voor de bewering

$$a_{n+1}^2 - a_n * a_{n+2} = (-1)^{n+1},$$

en gaan met volledige inductie bewijzen dat $P(n)$ geldt voor elk natuurlijk getal n.

Basisstap: $a_1^2 - a_0 * a_2 = 1^2 - 1 * 2 = -1 = (-1)^1$, dus $P(0)$ geldt.

Inductiestap: Stel dat $P(n)$ geldt. We moeten bewijzen dat $P(n+1)$ geldt, oftewel

$$a_{n+2}^2 - a_{n+1} * a_{n+3} = (-1)^{n+2}.$$

Door het tweemaal toepassen van de definitie van de rij van Fibonacci krijgen we:

$$\begin{array}{lll}
a_{n+2}^2 - a_{n+1} * a_{n+3} & & \\
\quad = & a_{n+2}^2 - a_{n+1} * (a_{n+2} + a_{n+1}) & (\text{want } a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1}) \\
\quad = & a_{n+2} * (a_{n+1} + a_n) - a_{n+1} * (a_{n+2} + a_{n+1}) & (\text{want } a_{n+2} = a_{n+1} + a_n) \\
\quad = & a_{n+2} * a_n - a_{n+1} * a_{n+1} & (\text{rekenen}) \\
\quad = & -(a_{n+1}^2 - a_{n+2} * a_n) & (\text{rekenen}) \\
\quad = & -((-1)^{n+1}) & (\text{inductiehypothese}) \\
\quad = & (-1)^{n+2} & (\text{rekenen}).
\end{array}$$

Hiermee is het gevraagde bewezen.

Einde Bewijs.

Bij het vinden van een dergelijk bewijs is het de kunst om zodanig de inductieve definitie in te vullen (in dit geval dus twee keer), dat een uitdrukking verkregen wordt waarop de inductiehypothese toegepast kan worden.

De volgende stelling geeft een *gesloten uitdrukking* voor de fibonaccigetallen, dat wil zeggen een uitdrukking waarmee de fibonaccigetallen helemaal vast liggen zonder een beroep op inductie te doen. De uitdrukking ziet er nogal ingewikkeld uit, daarom geven we eerst de afleiding en dan pas de uitdrukking zelf.

We proberen oplossingen te vinden van het type $a_n = s^n$. Vullen we dit in in de vergelijking $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, zonder ons te bekommeren om a_0 en a_1, dan vinden we

$$s^{n+2} = s^{n+1} + s^n.$$

Delen we (let op de mogelijkheid $s = 0$) door s^n, dan komt er

$$s^2 = s + 1, \quad \text{oftewel} \quad s^2 - s - 1 = 0.$$

Deze vierkantsvergelijking in s kunnen we oplossen met de bekende *abc*-formule, en we vinden voor s twee mogelijkheden:

$$s_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{en} \quad s_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

We zien nu dat $a_n = s_1^n$ oplevert $a_0 = 1$ en $a_1 = s_1$,
en dat $a_n = s_2^n$ oplevert $a_0 = 1$ en $a_1 = s_2$.

Geen van beide mogelijkheden geeft dus wat we willen, namelijk $a_0 = 1$ en $a_1 = 1$.
Maar we hebben nog een pijl op onze boog: we kunnen proberen om de twee mogelijkheden te combineren tot

$$a_n = c \cdot s_1^n + d \cdot s_2^n,$$

waarin c en d constanten zijn.
Immers dan blijft voldaan aan $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.
Om nu $a_0 = 1$ en $a_1 = 1$ te krijgen, moeten c en d voldoen aan het stelsel lineaire vergelijkingen

$$\begin{array}{ccccc} c & + & d & = & 1 \\ c \cdot s_1 & + & d \cdot s_2 & = & 1 \end{array}$$

Zoals men gemakkelijk narekent, wordt de oplossing van dit stelsel gegeven door

$$c = -\frac{s_1}{s_2 - s_1} \quad \text{en} \quad d = \frac{s_2}{s_2 - s_1},$$

en aangezien $s_2 - s_1 = -\sqrt{5}$, krijgen we uit deze rekenpartij

$$a_n = c \cdot s_1^n + d \cdot s_2^n = \frac{s_1^{n+1} - s_2^{n+1}}{\sqrt{5}}.$$

Door hierin weer de definities van s_1 en s_2 in te vullen en te schrijven $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{5}\sqrt{5}$ krijgen we de volgende stelling.

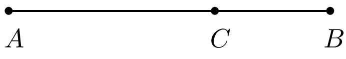
Stelling 7.5 Voor elk natuurlijk getal n geldt

$$a_n = \frac{1}{5}\sqrt{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right).$$

Van deze stelling kan een bewijs met volledige inductie worden gegeven, gebruik makend van $(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1$ en $(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1$. Dit laten we aan de lezer over.

Voor grote waarden van n ligt s_2^{n+1} heel dicht bij 0, want $s_2 = -0{,}618034\ldots$. In dat geval is $\frac{1}{5}\sqrt{5} * s_1^{n+1}$ dus al een goede benadering van a_n. Zo is bijvoorbeeld $a_9 = 55$, en afgerond op 5 cijfers na de komma is $\frac{1}{5}\sqrt{5} * s_1^{10} = 55{,}00364$.

Het getal $s_1 = 1{,}618034\ldots$ staat bekend als de *gulden snede*, en wordt wel aangeduid door de griekse letter τ. Meetkundig is het bijzondere eraan, dat een verdeling van een segment in twee stukken die zich verhouden als $\tau : 1$ de eigenschap heeft dat ook de verhouding van het hele segment tot het grootste stuk $\tau : 1$ is:



$AC : CB = AB : AC$ geeft $\tau : 1 = (\tau + 1) : \tau$, dus $\tau^2 = \tau + 1$.

Deze zelfde verhouding komen we bij benadering tegen als verhouding van twee opeenvolgende fibonaccigetallen.

7.2 Binomiaalcoëfficiënten

Als n en m natuurlijke getallen zijn met $m \leq n$, op hoeveel manieren kun je dan een uit m elementen bestaande deelverzameling maken van een verzameling met n elementen? Het antwoord op deze vraag schrijven we als $\binom{n}{m}$, uit te spreken als n *over* m of n *boven* m. Deze getallen heten *binomiaalcoëfficiënten*, en zijn het onderwerp van deze sectie.

Als $m = 0$ is er maar één zo'n deelverzameling, namelijk de lege verzameling. Ook als $m = n$ is er maar één zo'n deelverzameling, namelijk de hele verzameling. We hebben dus voor elk natuurlijk getal n:

$$\binom{n}{0} = 1 \quad \text{en} \quad \binom{n}{n} = 1.$$

Veronderstel nu dat we $\binom{k}{m}$ kennen voor zekere k en alle m met $0 \leq m \leq k$. Om dan $\binom{k+1}{r+1}$ te berekenen voor zekere r met $0 \leq r < k$ kunnen we de volgende redenering houden.

> Neem een verzameling van $k + 1$ elementen. Neem daarin een element e apart (dit kan, want $k + 1 \geq 1$), en kijk naar de deelverzamelingen die e bevatten en naar de deelverzamelingen die e niet bevatten.
>
> Het aantal uit $r+1$ elementen bestaande deelverzamelingen dat e wel bevat is precies $\binom{k}{r}$, er zijn immers precies k elementen ongelijk aan e en elke gevraagde deelverzameling wordt verkregen door daar precies r elementen uit te kiezen.
>
> Het aantal uit $r+1$ elementen bestaande deelverzamelingen dat e niet bevat is precies $\binom{k}{r+1}$, want zo'n verzameling wordt verkregen door precies $r+1$ elementen te kiezen uit de k elementen ongelijk aan e.
>
> In totaal heeft de verzameling van $k + 1$ elementen dus precies $\binom{k}{r} + \binom{k}{r+1}$ deelverzamelingen met precies $r + 1$ elementen, we hebben dus laten zien dat
>
> $$\binom{k+1}{r+1} = \binom{k}{r} + \binom{k}{r+1}.$$

Samenvattend kunnen we de volgende stelling formuleren.

Stelling 7.6 Voor elk natuurlijk getal n geldt:

$$\binom{n}{0} = 1 \quad \text{en} \quad \binom{n}{n} = 1.$$

Voor natuurlijke getallen n, m met $m < n$ geldt:

$$\binom{n+1}{m+1} = \binom{n}{m} + \binom{n}{m+1}.$$

Het aardige van deze stelling is dat we dit nu ook als de definitie van binomiaalcoëfficiënten kunnen opvatten: als we de oorspronkelijke definitie vergeten, en we hebben alleen maar Stelling 7.6, dan ligt daarmee voor elk tweetal natuurlijke getallen n, m met $m < n$ de waarde van $\binom{n}{m}$ vast. We kunnen de volgende tabel opstellen:

m / n	0	1	2	3	4	5	.	.
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
.	.	.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	.	.	.

Door in deze tabel de rijen ten opzichte van elkaar te verschuiven wordt de symmetrie beter zichtbaar en krijgt men een driehoekige tabel, de bekende *driehoek van Pascal*:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
. & & . & & . & & . & & . & & . & & .
\end{array}$$

Op de rand van de driehoek staat steeds het getal 1, elk ander getal is de som van de twee er onmiddellijk boven staande getallen. Voor $0 \leq m \leq n$ vinden we $\binom{n}{m}$ in de driehoek op de $(n+1)$-ste rij van boven en daarvan het $(m+1)$-ste getal van links. Naar onderen breidt de driehoek zich onbeperkt uit.

Er is nog een andere manier om $\binom{n}{m}$ te berekenen, rechtstreeks uit de oorspronkelijke definitie.

Veronderstel dat $1 \leq m \leq n$. Uit de verzameling met n elementen kunnen we m elementen een voor een pakken. Voor het eerste element zijn er n mogelijkheden, voor het tweede element nog $n-1$, voor het derde nog $n-2$, ... , voor het m-de element blijven er tenslotte $n-m+1$ mogelijkheden over, zodat het totale aantal mogelijkheden om achtereenvolgens m elementen te pakken gelijk is aan

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1).$$

We kunnen deze uitdrukking ook compacter schrijven als $n!/(n-m)!$.
We hebben nu uitgerekend hoe groot het aantal mogelijkheden is, als we op de volgorde van de elementen letten. Voor een verzameling doet de volgorde van zijn elementen er echter niet toe, zodat we het berekende aantal nog moeten delen door $m!$, zijnde het aantal mogelijkheden om m elementen op een rij te zetten. Deze redenering leidt ons dus tot de uitkomst

$$\text{Als } 0 \leq m \leq n, \text{ dan is } \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Het is eenvoudig na te gaan dat deze formule ook klopt met de feiten als $m = 0$ of $n = 0$.

Bovenstaand resultaat is gemakkelijk te toetsen aan de eerder afgeleide betrekking in Stelling 7.6. Daarvoor is geen volledige inductie nodig, het komt simpelweg neer op het gelijknamig maken van breuken die moeten worden opgeteld:

$$\begin{array}{rcl} \binom{n+1}{m+1} & = & \frac{(n+1)!}{(m+1)!(n-m)!} \\ & = & \frac{n!*(n+1)}{(m+1)!(n-m)!} \\ & = & \frac{n!*(m+1)}{(m+1)!(n-m)!} + \frac{n!*(n-m)}{(m+1)!(n-m)!} \\ & = & \frac{n!}{m!(n-m)!} + \frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!} \\ & = & \binom{n}{m} + \binom{n}{m+1}. \end{array}$$

De binomiaalcoëfficiënten zijn van bijzonder nut bij allerlei rekenwerk. Zo geldt bijvoorbeeld het *binomium van Newton*: voor elk natuurlijk getal n geldt

$$(x+y)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x^m y^{n-m},$$

te bewijzen met volledige inductie naar n, gebruikmakend van Stelling 7.6. Hieruit zien we dan weer door $x = 1$ en $y = 1$ te nemen dat

$$2^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m},$$

iets wat ons niet zal verbazen, omdat we nu eigenlijk met de som in het rechterlid tellen hoeveel deelverzamelingen een verzameling met n elementen heeft. In sectie 5.2 hebben we al gezien dat dat precies 2^n is.

7.3 Opgaven

In de volgende opgaven slaat de variabele n op natuurlijke getallen.

Opgave 7.1

Bewijs dat voor iedere n geldt $\sum_{k=0}^{n} 4k^3 = n^4 + 2n^3 + n^2$.

Opgave 7.2

Bewijs dat voor iedere $n \geq 1$ en iedere reële $a \neq 1$ geldt

$$\sum_{k=1}^{n} a^k = (a - a^{n+1})/(1-a).$$

Opgave 7.3

Bewijs dat voor iedere n het getal $n^3 + 2n$ deelbaar is door 3.

Opgave 7.4

Gegeven is een natuurlijk getal n. Bewijs dat $\sum_{k=0}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$

Opgave 7.5

Gegeven is een natuurlijk getal n. Bewijs dat $\sum_{k=0}^{n} k^3 = (\sum_{k=0}^{n} k)^2$

Opgave 7.6

Gegeven is een natuurlijk getal $n > 1$. Bewijs dat $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}$

(Aanwijzing: gebruik $(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) * (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 1$.)

Opgave 7.7

Gegeven is een natuurlijk getal $n > 0$. Bewijs dat $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

Opgave 7.8

Gegeven is een natuurlijk getal n. Bewijs dat $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$

Opgave 7.9

Laat a_k het k-de Fibonaccigetal zijn. Bewijs dat

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_{n+2} - 1$$

voor elk natuurlijk getal n.

Opgave 7.10

Laat a_k het k-de Fibonaccigetal zijn. Bewijs dat

$$\sum_{k=0}^{n} a_{2k} = a_{2n+1}$$

voor elk natuurlijk getal n.

Opgave 7.11

Gegeven zijn de getallen $b_0, b_1, b_2, \ldots$ die voldoen aan

$$b_0 = 2, \quad b_1 = 1,$$

$$b_{n+2} = b_{n+1} + 2b_n \text{ voor elke } n \geq 0.$$

Bewijs dat voor ieder natuurlijk getal n geldt dat

$$b_n = 2^n + (-1)^n.$$

Opgave 7.12

Bewijs Stelling 7.5.

Opgave 7.13

Bewijs dat

$$n\binom{n-1}{k} = (k+1)\binom{n}{k+1}$$

voor natuurlijke getallen n, k met $n > k$.

Opgave 7.14

Bewijs dat

$$\binom{n}{r}\binom{r}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}$$

voor natuurlijke getallen n, k, r met $n \geq r \geq k$.

Opgave 7.15

Bewijs het binomium van Newton met behulp van Stelling 7.6.

Opgave 7.16

Gegeven zijn twee gehele getallen a_0 en a_1 met $a_1 > 0$ en $a_1 > a_0$. Voor $i = 0, \ldots, 98$ is gedefinieerd $a_{i+2} = 3a_{i+1} - 2a_i$. Bewijs dat $a_100 \geq 2^{100} - 1$.

(Aanwijzing: bewijs dat voor elke $n \geq 0$ geldt: $a_{n+1} \geq 2^{n+1} - 1 \wedge a_{n+1} \geq a_n + 2^n$.)