TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

Tentamen TI1300 en IN1305-A (Redeneren en) Logica

21 Januari 2011, 8.30–11.30 uur

LEES DEZE OPMERKINGEN AANDACHTIG DOOR VOORDAT JE BEGINT!

- Dit tentamen bestaat uit 15 meerkeuzevragen in totaal goed voor **4 punten**, en 3 open vragen in totaal goed voor **5 punten**. Gebruik deze informatie om je tijd verstandig te verdelen.
- Het gebruik van dictaat, aantekeningen of andere bronnen is tijdens dit tentamen **niet toegestaan**.
- Dit tentamen is **identiek voor IN1305-A en TI1300**.
- Wat betreft de **meerkeuzevragen**:
  - Er is voor iedere vraag maar één goed antwoord.
  - Markeer je antwoorden **eerst** op dit tentamen en schrijf als je zeker van je antwoorden bent de antwoorden over op het antwoordformulier.
  - **Let op** dat de volgorde van de antwoorden op het antwoordformulier niet altijd A-B-C-D is!
  - Alle meerkeuzevragen tellen even zwaar.
  - Vul op het meerkeuzeformulier je studienummer zowel met cijfers in als met blokjes.
  - Zet je **handtekening** op je meerkeuzeformulier.
- Wat betreft de **open vragen**:
  - Formuleer je antwoord in correct Nederlands of Engels en **schrijf leesbaar**.
  - Zorg, als je kladpapier gebruikt, voor voldoende tijd om je antwoord over te schrijven. Lever **geen kladpapier** in.
  - Lees elke vraag goed door en geef **alle informatie** waar om gevraagd wordt.
  - **Beargumenteer je antwoord altijd volledig**: laat niets aan mijn interpretatie over.
  - Controleer voordat je je antwoorden inlevert, of op ieder blaadje je naam en studienummer staat en geef het aantal ingeleverde bladen aan op (tenminste) de eerste pagina.
- Totaal aantal pagina's (exclusief dit titelblad): 3.

Meerkeuzevragen

1. Zij A, B, C en D verzamelingen zodat $D = (A \cap B) \cup (B \cap C)$. Welke uitspraak is waar?
   - A. $D \subseteq (A \cap B)$.
   - B. $(D \cap C^c) \subseteq (A \cap B)$.
   - C. $D \subseteq (B - C)^c$.
   - D. $(A \cap C) \subseteq D^c$.

2. Zij gegeven een redenering met één of meer premissen en een conclusie. Als de conclusie een contradictie is, welke uitspraak is dan waar?
   - A. De redenering is ongeldig, als alle premissen contingenties zijn.
   - B. Als tenminste één premisse een tautologie is, is de redenering geldig.
   - C. De redenering is geldig, als tenminste één premisse een contradictie is.
   - D. Als de redenering ongeldig is, moet tenminste één premisse een tautologie zijn.

3. Zij A en B formules uit $PROP$, waarvoor geldt dat $A \models B$. Welke uitspraak is dan waar?
   - A. $\neg B \models A$.
   - B. $\models A \vee B$.
   - C. $B \models \neg A$.
   - D. $\models A \to B$.

4. Zij A en B verzamelingen waarvoor geldt $A \subseteq B$. Wat kunnen we dan **niet** met zekerheid zeggen?
   - A. Als $B = \emptyset$ dan $A = \emptyset$.
   - B. Er is geen element van A dat niet in B zit.
   - C. $|A| < |B|$.
   - D. Als $A \neq \emptyset$ dan $B \neq \emptyset$.

5. Stel dat $\Gamma \subseteq PROP$ en $F \in PROP$ zodanig zijn dat precies één tak in een boom voor de bewering $\Gamma \models F$ niet sluit. Wat kunnen we dan met zekerheid zeggen?
   - A. Er kunnen meerdere tegenvoorbeelden voor de bewering zijn.
   - B. $\Gamma \models \neg F$.
   - C. F is een contradictie.
   - D. $\Gamma = \emptyset$.

6. Stel dat in een tak van een boom volgens de boommethode voor de predicatenlogica de volgende formules voorkomen (waarbij de verantwoording voor het gemak is weggelaten):

$$\begin{array}{ll} & \vdots \\ i. & B(b) \\ j. & \exists x A(x) \\ k. & \neg(\forall x P(x) \vee \neg Q(b)) \\ l. & \forall x(P(x) \to Q(c)) \end{array}$$

   De letters i–l (en hieronder m) geven regelnummers aan. Op welke van de volgende manieren mag, op grond van de formules hierboven, deze tak worden vervolgd?

A.	$m.$	$A(c)$	$\exists$-regel, j
B.	$m.$	$P(c) \to Q(c)$	$\forall$-regel, l
C.	$m.$	$\forall x(\neg P(x) \vee Q(c))$	$\to$-regel, l
D.	$m.$	$\neg\forall x P(x) \wedge Q(b)$	$\vee$-regel, k

7. Zij A en B verzamelingen en laat $\mathscr{P}(X)$ de machtsverzameling van verzameling X aanduiden. Beschouw nu de volgende bewering.

   Bewering. $\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B) = \mathscr{P}(A \cup B)$.

   Deze bewering is onwaar. Welke verzamelingen vormen een tegenvoorbeeld?

   A. $A = \{0\}$ en $B = \{0, 1\}$.

   B. $A = \{\emptyset\}$ en $B = \emptyset$.

   C. $A = \{0\}$ en $B = \{1\}$.

   D. $A = \{0, 1\}$ en $B = \{0, 1\}$.

8. Beschouw de formule $F = ((p \to q) \vee (\neg r \wedge s))$. Welke van de volgende expressies drukt de waarheidswaarde van deze formule uit als functie van de waarheidswaarden van de erin voorkomende propositievariabelen?

   A. $\max(\max(1 - v(p), v(q)), \min(1 - v(r), v(s)))$.

   B. $\min(\max(v(p), 1 - v(q)), \max(1 - v(r), v(s)))$.

   C. $\max(\min(1 - v(p), v(q)), \min(1 - v(r), v(s)))$.

   D. $\min(\min(v(p), 1 - v(q)), \max(1 - v(r), v(s)))$.

9. Zij A en B formules uit $PROP$. Beschouw de volgende bewering.

   Bewering. *Voor alle formules A en B geldt: $A \models B$ of $\neg A \models B$.*

   Deze bewering is onwaar. Maar in slechts één van de volgende situaties weten we zeker dat er sprake zal zijn van een tegenvoorbeeld. Welke situatie is dat?

   A. A is een contingentie en B is een contradictie.

   B. A is een tautologie en B is een contingentie.

   C. A is een contradictie en B is een contingentie.

   D. A is een contingentie en B is een tautologie.

10. Zij gegeven eerste-ordetaal K met 1-plaatsige predicaatsymbolen A en B en 2-plaatsig predicaatsymbool L. Zij ook gegeven de structuur $\mathcal{A} = \langle D; R_0, R_1, R_2 \rangle$, waar $D = \{d_0, d_1, d_2, d_3\}$, $R_0 = A^{\mathcal{A}} = \{d_0, d_1\}$, $R_1 = B^{\mathcal{A}} = \{d_1, d_2\}$ en $R_2 = L^{\mathcal{A}} = \{(d_0, d_0), (d_3, d_0), (d_0, d_1), (d_1, d_0), (d_1, d_2), (d_2, d_1), (d_2, d_0)\}$. Welke van de volgende formules is waar in $\mathcal{A}$?

    A. $\forall x((\neg A(x) \to B(x)) \vee L(x, x))$.

    B. $\forall x(A(x) \to \forall y(\neg A(y) \vee L(x, y)))$.

    C. $\forall x((A(x) \wedge \neg B(x)) \to \forall y L(y, x))$.

    D. $\forall x \forall y \forall z((L(x, y) \wedge L(y, z))) \to L(x, z))$.

11. We breiden de taal K van de vorige vragen uit naar de taal K' waarin ook zijn opgenomen het 2-plaatsig functiesymbool f en de namen a en b. Welke van de volgende uitspraken is onwaar?

    A. $(f(x, y) = z) \in LIT$.

    B. $\neg L(x, f(b, y)) \in ATOM$.

    C. $\neg(a = f(a, a)) \in LIT$.

    D. $L(f(a, z), f(b, y)) \in ATOM$.

12. Beschouw opnieuw de taal K' van de vorige vraag, en ook $F = L(f(a, f(b, y)), f(x, y))$. Welke van de volgende uitspraken is onwaar?

    A. $F \in FORM$.

    B. $F \in ATOM$.

    C. $F \in TERM$.

    D. $F \in LIT$.

13. Laat F een formule in CNV zijn, met precies 2 conjunctieleden. Als in alle conjunctieleden complementaire literalen voorkomen, wat kunnen we dan concluderen over F?
    - A. F is onvervulbaar.
    - B. F is een contradictie.
    - C. F is een contingentie.
    - D. F is een tautologie.

14. Zij A en B formules uit $PROP$. Beschouw de volgende bewering.

    Bewering. *Als* $A \models B$ *dan* $\models A \vee B$.

    Deze bewering is onwaar. Welke formules vormen een tegenvoorbeeld?
    - A. $A = p \vee \neg p$ en $B = p \wedge \neg p$.
    - B. $A = p \wedge \neg p$ en $B = p \vee \neg p$.
    - C. $A = p$ en $B = \neg p$.
    - D. $A = q$ en $B = p \rightarrow q$.

15. Beschouw het volgende stelsel recurrente betrekkingen met randvoorwaarde:

$$\begin{aligned} f(p_i) &= 0 && \text{voor } i \in \mathbb{N} \\ f(\neg A) &= f(A) && \text{voor } A \in PROP \\ f((A \star B)) &= f(A) + f(B) + 1 && \text{voor } A, B \in PROP \text{ en } \star \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\} \end{aligned}$$

    Welke waarde kent de functie $f : PROP \rightarrow \mathbb{N}$ die door dit stelsel wordt gedefinieerd toe aan elke formule in $PROP$?
    - A. Het aantal haakjes in de formule.
    - B. Het aantal 2-plaatsige connectieven in de formule.
    - C. Het aantal propositievariabelen in de formule.
    - D. Het aantal connectieven in de formule.

Open vragen

1. (10 punten) **Boommethode (voor zowel IN1305-A als TI1300)**

   Beantwoord met behulp van de boommethode de vraag of de volgende bewering waar of onwaar is. Geef duidelijk antwoord en leg uit hoe je antwoord volgt uit je boom. Als je antwoordt dat de bewering onwaar is, geef dan een tegenvoorbeeld dat dit aantoont (dat mag in de vorm van een plaatje) en leg uit hoe dit tegenvoorbeeld aantoont dat de bewering onwaar is.

   Bewering. $\forall x A(x) \rightarrow \forall x B(x) \models \exists x (B(x) \rightarrow A(x))$.

2. (10 punten) **Fitch (voor zowel IN1305-A als TI1300)**

   Bewijs in het **niet-uitgebreide** systeem voor natuurlijke deductie van Fitch de volgende stelling.

   Stelling. $A \vee B \vdash \neg B \rightarrow (A \vee C)$.

3. (10 punten) **Verzamelingen (voor zowel IN1305-A als TI1300)** Bepaal of de volgende bewering waar of onwaar is. Geef een duidelijk antwoord. Als je denk dat de bewering waar is, geef dan een bewijs (géén Venn-diagram!). Als je antwoordt dat de bewering onwaar is, geef dan een tegenvoorbeeld dat dit aantoont (in de vorm van *specifieke, concrete verzamelingen*) en leg uit hoe dit tegenvoorbeeld aantoont dat de bewering onwaar is.

   Bewering. *Voor alle verzamelingen* A *en* B *geldt:* $A \subseteq B$ *of* $A \subseteq B^c$.

Einde tentamenopgaven