TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

Tentamen TI1300 en IN1305-A
(Redeneren en) Logica

21 Januari 2011, 8.30–11.30 uur

LEES DEZE OPMERKINGEN AANDACHTIG DOOR VOORDAT JE BEGINT!

- Dit tentamen bestaat uit 15 meerkeuzevragen in totaal goed voor **4 punten**, en 3 open vragen in totaal goed voor **5 punten**. Gebruik deze informatie om je tijd verstandig te verdelen.
- Het gebruik van dictaat, aantekeningen of andere bronnen is tijdens dit tentamen **niet toegestaan**.
- Dit tentamen is **identiek voor IN1305-A en TI1300**.
- Wat betreft de **meerkeuzevragen**:
  - Er is voor iedere vraag maar één goed antwoord.
  - Markeer je antwoorden **eerst** op dit tentamen en schrijf als je zeker van je antwoorden bent de antwoorden over op het antwoordformulier.
  - **Let op** dat de volgorde van de antwoorden op het antwoordformulier niet altijd A-B-C-D is!
  - Alle meerkeuzevragen tellen even zwaar.
  - Vul op het meerkeuzeformulier je studienummer zowel met cijfers in als met blokjes.
  - Zet je **handtekening** op je meerkeuzeformulier.
- Wat betreft de **open vragen**:
  - Formuleer je antwoord in correct Nederlands of Engels en **schrijf leesbaar**.
  - Zorg, als je kladpapier gebruikt, voor voldoende tijd om je antwoord over te schrijven.
    Lever **geen kladpapier** in.
  - Lees elke vraag goed door en geef **alle informatie** waar om gevraagd wordt.
  - **Beargumenteer je antwoord altijd volledig**: laat niets aan mijn interpretatie over.
  - Controleer voordat je je antwoorden inlevert, of op ieder blaadje je naam en studienummer staat en geef het aantal ingeleverde bladen aan op (tenminste) de eerste pagina.
- Totaal aantal pagina's (exclusief dit titelblad): 8.

Meerkeuzevragen

1. Zij A, B, C en D verzamelingen zodat $D = (A \cap B) \cup (B \cap C)$. Welke uitspraak is waar?
   - A. $D \subseteq (A \cap B)$.
   - **B.** $(D \cap C^c) \subseteq (A \cap B)$**.**
   - C. $D \subseteq (B - C)^c$.
   - D. $(A \cap C) \subseteq D^c$.

Antwoord: Het goede antwoord is met een Venn-diagram eenvoudig aan te wijzen.

A Dit is incorrect, want $(B \cap C) - A \subseteq D$, maar $(B \cap C) - A \not\subseteq A \cap B$.

B Dit is correct.

C Dit is incorrect, want $(A \cap B) - C \subseteq D$, maar $(A \cap B) - C \not\subseteq (B - C)^c$.

D Dit is incorrect, want $(A \cap C) \cap B \subseteq A \cap C$, maar $(A \cap C) \cap B \not\subseteq D^c$.

2. Zij gegeven een redenering met één of meer premissen en een conclusie. Als de conclusie een contradictie is, welke uitspraak is dan waar?
   - A. De redenering is ongeldig, als alle premissen contingenties zijn.
   - B. Als tenminste één premisse een tautologie is, is de redenering geldig.
   - **C. De redenering is geldig, als tenminste één premisse een contradictie is.**
   - D. Als de redenering ongeldig is, moet tenminste één premisse een tautologie zijn.

Antwoord:

A Als alle premissen contingenties zijn en de conclusie een contradictie, kan er een tegenvoorbeeld bestaan, maar het hoeft niet. Het kan namelijk best zo zijn, dat, hoewel alle premissen soms waar (en soms onwaar) zijn, ze niet allemaal *tegelijkertijd* waar zijn.

B Als tenminste één premisse een tautologie is en de conclusie een contradictie, kan er een tegenvoorbeeld bestaan, maar het hoeft niet.

C Als tenminste één premisse een contradictie is, kan er geen tegenvoorbeeld bestaan (want daarin zijn alle premissen waar), en is de redenering dus geldig.

D De redenering kan ook ongeldig zijn als geen enkele premisse een tautologie is.

3. Zij A en B formules uit $PROP$, waarvoor geldt dat $A \models B$. Welke uitspraak is dan waar?
   - A. $\neg B \models A$.
   - B. $\models A \vee B$.
   - C. $B \models \neg A$.
   - **D.** $\models A \to B$**.**

Antwoord:

A Als B volgt uit A hoeft A niet uit $\neg B$ te volgen. Een tegenvoorbeeld is $A = q$ en $B = p \to q$.

B Ook dit is onwaar, hetzelfde tegenvoorbeeld $A = q$ en $B = p \to q$ toont dit aan.

C Dit is onwaar, zoals opnieuw het tegenvoorbeeld $A = q$ en $B = p \to q$ laat zien.

D Dit is correct. Het is de deductiestelling uit het dictaat *Logica*, p. 44.

Bewijs. Er is gegeven dat A en B zodanig zijn dat $A \models B$. Neem nu een willekeurige valuatie, zeg w. We moeten laten zien dat $w(A \to B) = 1$. Er geldt dat $w(A \to B) = \max(1 - w(A), w(B))$. We beschouwen twee mogelijkheden:

$w(A) = 0$**:** Nu is $\max(1 - w(A), w(B)) = \max(1 - 0, w(B)) = \max(1, w(B)) = 1$, ongeacht $w(B)$.

$w(A) = 1$**:** Omdat $w(A) = 1$ geldt volgens de premisse dat $w(B) = 1$, dus is $\max(1 - w(A), w(B)) = \max(1 - 1, 1) = 1$.

In beide gevallen, dus in het algemeen, geldt dat $w(A \to B) = 1$. Omdat w een willekeurige valuatie is, geldt voor alle valuaties dat $v(A \to B) = 1$, dus dat $\models A \to B$. QED

4. Zij A en B verzamelingen waarvoor geldt $A \subseteq B$. Wat kunnen we dan **niet** met zekerheid zeggen?
   A. Als $B = \emptyset$ dan $A = \emptyset$.
   B. Er is geen element van A dat niet in B zit.
   C. $|A| < |B|$**.**
   D. Als $A \neq \emptyset$ dan $B \neq \emptyset$.

Antwoord:

A Als er geen elementen in B zitten, kunnen er ook geen elementen in A zitten, anders is $A \not\subseteq B$.

B Er is inderdaad geen element van A dat niet in B zit, anders is $A \not\subseteq B$.

C Als $A = B$ geldt wel $A \subseteq B$, maar niet $|A| < |B|$.

D Als er elementen in A zitten, moeten die ook in B zitten, anders is $A \not\subseteq B$.

5. Stel dat $\Gamma \subseteq PROP$ en $F \in PROP$ zodanig zijn dat precies één tak in een boom voor de bewering $\Gamma \models F$ niet sluit. Wat kunnen we dan met zekerheid zeggen?
   A. Er kunnen meerdere tegenvoorbeelden voor de bewering zijn.
   B. $\Gamma \models \neg F$.
   C. F is een contradictie.
   D. $\Gamma = \emptyset$.

Antwoord: Het correcte antwoord is A. Een boom voor $\Gamma = \{p \vee (r \wedge \neg r)\}$ en $F = q$ toont dit aan. Precies één tak sluit niet in deze boom, maar er zijn twee tegenvoorbeelden: valuaties v met $v(p) = v(q) = v(\neg r) = 1$ en w met $w(p) = w(q) = w(r) = 1$.

6. Stel dat in een tak van een boom volgens de boommethode voor de predicatenlogica de volgende formules voorkomen (waarbij de verantwoording voor het gemak is weggelaten):

$$\begin{array}{ll} & \vdots \\ i. & B(b) \\ j. & \exists x A(x) \\ k. & \neg(\forall x P(x) \vee \neg Q(b)) \\ l. & \forall x(P(x) \to Q(c)) \end{array}$$

De letters i–l (en hieronder m) geven regelnummers aan. Op welke van de volgende manieren mag, op grond van de formules hierboven, deze tak worden vervolgd?

A.	$m.$	$A(c)$	$\exists$-regel, j
B.	$m.$	$P(c) \to Q(c)$	$\forall$-**regel,** l
C.	$m.$	$\forall x(\neg P(x) \vee Q(c))$	$\to$-regel, l
D.	$m.$	$\neg\forall x P(x) \wedge Q(b)$	$\vee$-regel, k

Antwoord: Antwoord A is niet juist omdat geen *nieuwe* naam wordt gebruikt: c komt al voor in deze tak, namelijk in formule l. Het correct antwoord is B: als de implicatie in formule l geldt voor *alle* x, dan ook voor c (ook al komt die naam al eerder voor). Antwoord C is onjuist omdat de $\to$-regel op een echte subformule van formule l wordt toegepast, en dat is niet toegestaan. Antwoord D is onjuist omdat er $\neg\neg Q(b)$ moet staan en niet $Q(b)$.

7. Zij A en B verzamelingen en laat $\mathscr{P}(X)$ de machtsverzameling van verzameling X aanduiden. Beschouw nu de volgende bewering.

Bewering. $\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B) = \mathscr{P}(A \cup B)$.

Deze bewering is onwaar. Welke verzamelingen vormen een tegenvoorbeeld?

A. $A = \{0\}$ en $B = \{0,1\}$.
B. $A = \{\emptyset\}$ en $B = \emptyset$.
C. $A = \{0\}$ **en** $B = \{1\}$**.**
D. $A = \{0,1\}$ en $B = \{0,1\}$.

Antwoord: Bij antwoorden A, B en D geldt dat de ene verzameling deelverzameling van de ander is. Als voor 2 verzamelingen E en F geldt dat $E \subseteq F$, is $\mathscr{P}(E) \subseteq \mathscr{P}(F)$ (bewijs dit eens!), zodat $\mathscr{P}(E) \cup \mathscr{P}(F) = \mathscr{P}(F)$ (bewijs dit ook eens!). Bovendien geldt als $E \subseteq F$ dat $E \cup F = F$ (bewijs ook dit eens!), zodat ook $\mathscr{P}(E \cup F) = \mathscr{P}(F)$. De drie paren verzamelingen bij antwoorden A, B en D vormen dus geen tegenvoorbeeld: ze maken de linker- en de rechterkant van de gelijkheid aan elkaar gelijk. Het goede antwoord is dus C: dan geldt $\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}\}$, maar $\mathscr{P}(A \cup B) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$.

8. Beschouw de formule $F = ((p \to q) \vee (\neg r \wedge s))$. Welke van de volgende expressies drukt de waarheidswaarde van deze formule uit als functie van de waarheidswaarden van de erin voorkomende propositievariabelen?

A. $\max(\max(1 - v(p), v(q)), \min(1 - v(r), v(s)))$**.**
B. $\min(\max(v(p), 1 - v(q)), \max(1 - v(r), v(s)))$.
C. $\max(\min(1 - v(p), v(q)), \min(1 - v(r), v(s)))$.
D. $\min(\min(v(p), 1 - v(q)), \max(1 - v(r), v(s)))$.

Antwoord: Het correcte antwoord is A. Je moet deze waarheidsfuncties kennen.

9. Zij A en B formules uit $PROP$. Beschouw de volgende bewering.

Bewering. *Voor alle formules* A *en* B *geldt:* $A \models B$ *of* $\neg A \models B$.

Deze bewering is onwaar. Maar in slechts één van de volgende situaties weten we zeker dat er sprake zal zijn van een tegenvoorbeeld. Welke situatie is dat?

A. A **is een contingentie en** B **is een contradictie.**
B. A is een tautologie en B is een contingentie.
C. A is een contradictie en B is een contingentie.
D. A is een contingentie en B is een tautologie.

Antwoord: Een tegenvoorbeeld bestaat een paar formules A en B die aantonen dat de bewering onwaar is. Omdat de bewering een disjunctie is, moet een tegenvoorbeeld laten zien dat **beide disjuncten onwaar** zijn.

A Als nu A een contingentie is en B een contradictie, zijn er valuaties die A waar maken en B onwaar, en ook valuaties die A onwaar maken (en dus $\neg A$ waar) en B onwaar. Zowel $A \models B$ als $\neg A \models B$ zijn dus noodzakelijkerwijs onwaar: A is het correcte antwoord.

B Als A een tautologie is, is $\neg A \models B$ altijd waar, ongeacht B, want dan kan een tegenvoorbeeld voor $\neg A \models B$ niet optreden—dat is namelijk een valuatie die $\neg A$ waar moet maken en als A een tautologie is, bestaat zo'n valuatie niet. Deze situatie kan dus geen tegenvoorbeeld zijn.

C Als A een contradictie is, bestaat er geen tegenvoorbeeld voor $A \models B$, want dat is een valuatie die A waar maakt (en B onwaar), wat niet kan als A een contradictie is.

D Als tenslotte A een contingentie is en B een tautologie, kan er voor $A \models B$ noch $\neg A \models B$ een tegenvoorbeeld bestaan, omdat geen valuatie B onwaar kan maken, wat een tegenvoorbeeld zou moeten doen.

10. Zij gegeven eerste-ordetaal K met 1-plaatsige predicaatsymbolen A en B en 2-plaatsig predicaatsymbool L. Zij ook gegeven de structuur $\mathcal{A} = \langle D; R_0, R_1, R_2\rangle$, waar $D = \{d_0, d_1, d_2, d_3\}$, $R_0 = A^{\mathcal{A}} = \{d_0, d_1\}$, $R_1 = B^{\mathcal{A}} = \{d_1, d_2\}$ en $R_2 = L^{\mathcal{A}} = \{(d_0, d_0), (d_3, d_0), (d_0, d_1), (d_1, d_0), (d_1, d_2), (d_2, d_1), (d_2, d_0)\}$. Welke van de volgende formules is waar in $\mathcal{A}$?

A. $\forall x((\neg A(x) \to B(x)) \vee L(x, x))$.
B. $\forall x(A(x) \to \forall y(\neg A(y) \vee L(x, y)))$.
C. $\forall x((A(x) \wedge \neg B(x)) \to \forall y L(y, x))$**.**
D. $\forall x\forall y\forall z((L(x, y) \wedge L(y, z))) \to L(x, z))$.

Antwoord:

A Deze formule zegt dat alle x eigenschap A of eigenschap B hebben, of een relatie met zichzelf. Dat is niet het geval, want d_3 heeft eigenschap A noch B, en ook geen relatie met zichzelf.

B Hier staat dat alle elementen met eigenschap A een relatie hebben met alle elementen met eigenschap A. Dat is niet waar, want $(d_1, d_1) \notin R_2$.

C Deze formule is waar: voor alle elementen met eigenschap A en niet B (dat is object d_0) geldt dat alle objecten er een relatie mee hebben.

D Deze formule drukt uit dat de relatie L transitief is: als de relatie geldt tussen x en y, en tussen y en z, dan geldt hij ook tussen x en z. Dat is in deze structuur niet waar, want er geldt bijvoorbeeld wel dat $(d_0, d_1) \in R_2$ en dat $(d_1, d_2) \in R_2$, maar niet dat $(d_0, d_2) \in R_2$.

11. We breiden de taal K van de vorige vragen uit naar de taal K' waarin ook zijn opgenomen het 2-plaatsig functiesymbool f en de namen a en b. Welke van de volgende uitspraken is onwaar?

    A. $(f(x, y) = z) \in LIT$.

    B. $\neg L(x, f(b, y)) \in ATOM$**.**

    C. $\neg(a = f(a, a)) \in LIT$.

    D. $L(f(a, z), f(b, y)) \in ATOM$.

Antwoord:

A Dit is waar. Een formule van de vorm $(t_1 = t_2)$, waar de t_i termen zijn, is een atomaire formule. Deze formule zit dus in $ATOM$, dus ook in LIT, dus ook in $FORM$.

B Dit is niet waar. In $ATOM$ zitten alleen formules van de form $P(t_1, \ldots, t_n)$ en $(t_1 = t_2)$, waar P een n-plaatsig predicaatsymbool is, en waar de t_i termen zijn. De formule $\neg L(x, f(b, y))$ zit wel in $FORM$, en ook in LIT, maar niet in $ATOM$.

C Ook dit is waar. De formule zit weliswaar niet in $ATOM$, maar wel in LIT en dus in $FORM$.

D Dit is ook waar. De formule is een atomaire formule.

12. Beschouw opnieuw de taal K' van de vorige vraag, en ook $F = L(f(a, f(b, y)), f(x, y))$. Welke van de volgende uitspraken is onwaar?

    A. $F \in FORM$.

    B. $F \in ATOM$.

    C. $F \in TERM$**.**

    D. $F \in LIT$.

Antwoord: Formule F is (dus) geen term. Alle andere drie de verzamelingen $ATOM$, LIT en $FORM$ zijn verzamelingen formules. Formule F is een atomaire formule en zit dus in $ATOM$, en omdat $ATOM \subseteq LIT \subseteq FORM$, zit F ook in LIT en $FORM$. Het is helemaal geen term; termen verwijzen naar objecten in het domein waarover we uitspraken doen in de vorm van formules. Deze rij symbolen F is zo'n formule, en kan waar of onwaar zijn (hij is waar als de f van enerzijds a en anderzijds de f van b en y in relatie L tot de f van x en y staat), maar niet naar een object in het domein verwijzen.

13. Laat F een formule in CNV zijn, met precies 2 conjunctieleden. Als in alle conjunctieleden complementaire literalen voorkomen, wat kunnen we dan concluderen over F?

    A. F is onvervulbaar.

    B. F is een contradictie.

    C. F is een contingentie.

    D. F is een tautologie.

Antwoord: De beide conjunctieleden zijn disjuncties. Als in een disjunctie complementaire literalen voorkomen, is de disjunctie een tautologie. Dan is dus de conjunctie van 2 tautologieën ook een tautologie: antwoord D. (Het feit dat er 'precies 2' staat is overigens van geen belang.)

14. Zij A en B formules uit $PROP$. Beschouw de volgende bewering.

    Bewering. *Als* $A \models B$ *dan* $\models A \vee B$.

    Deze bewering is onwaar. Welke formules vormen een tegenvoorbeeld?

    A. $A = p \vee \neg p$ en $B = p \wedge \neg p$.

    B. $A = p \wedge \neg p$ en $B = p \vee \neg p$.

    C. $A = p$ en $B = \neg p$.

    D. $A = q$ en $B = p \rightarrow q$.

> **Antwoord:** Een tegenvoorbeeld voor een implicatie maakt het antecedent waar en het consequent onwaar.
>
> A Deze formules maken het antecedent niet waar.
>
> B Hier volgt wel B uit A, maar is het consequent niet onwaar.
>
> C Hier is het consequent waar, en het antecedent niet waar.
>
> D Dit is het correcte antwoord: het antecedent is waar, want als q waar is, is ook $p \rightarrow q$ waar, maar het consequent is onwaar, want $(p \rightarrow q) \vee q$ is geen tautologie.

15. Beschouw het volgende stelsel recurrente betrekkingen met randvoorwaarde:

$$
\begin{aligned}
f(p_i) &= 0 && \text{voor } i \in \mathbb{N} \\
f(\neg A) &= f(A) && \text{voor } A \in PROP \\
f((A \star B)) &= f(A) + f(B) + 1 && \text{voor } A, B \in PROP \text{ en } \star \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}
\end{aligned}
$$

    Welke waarde kent de functie $f : PROP \rightarrow \mathbb{N}$ die door dit stelsel wordt gedefinieerd toe aan elke formule in $PROP$?

    A. Het aantal haakjes in de formule.

    B. Het aantal 2-plaatsige connectieven in de formule.

    C. Het aantal propositievariabelen in de formule.

    D. Het aantal connectieven in de formule.

> **Antwoord:** Het correcte antwoord is C.
>
> A Het aantal haakjes van $(A \star B)$ is het aantal haakjes van A plus dat van B plus 2.
>
> B Correct.
>
> C het aantal propositievariabelen in p_i is 1.
>
> D Het aantal connectieven van $\neg A$ is het aantal connectieven van A plus 1.

Open vragen

1. (10 punten) **Boommethode (voor zowel IN1305-A als TI1300)**

   Beantwoord met behulp van de boommethode de vraag of de volgende bewering waar of onwaar is. Geef duidelijk antwoord en leg uit hoe je antwoord volgt uit je boom. Als je antwoordt dat de bewering onwaar is, geef dan een tegenvoorbeeld dat dit aantoont (dat mag in de vorm van een plaatje) en leg uit hoe dit tegenvoorbeeld aantoont dat de bewering onwaar is.

Bewering. $\forall x A(x) \to \forall x B(x) \models \exists x(B(x) \to A(x))$.

Antwoord: Onwaar natuurlijk. Een tegenvoorbeeld is een structuur waarin $B(a)$ waar is en $A(a)$ onwaar. Dan geldt niet $\forall x A(x)$, dus is het antecedent van de premisse onwaar en dus de premisse waar. Maar de conclusie is onwaar, want er bestaat geen object dat, als het in B zit, ook in A zit. Object a zit wel in B, maar *niet* in A.

2. (10 punten) **Fitch (voor zowel IN1305-A als TI1300)**
Bewijs in het **niet-uitgebreide** systeem voor natuurlijke deductie van Fitch de volgende stelling.

Stelling. $A \lor B \vdash \neg B \to (A \lor C)$.

Antwoord:

1	$\mid A \lor B$	hypothese 1
2	$\mid\ \mid \neg B$	hypothese 2
3	$\mid\ \mid A \lor B$	rei, 1
4	$\mid\ \mid\ \mid A$	hypothese 3
5	$\mid\ \mid\ \mid A$	rei, 4
6	$\mid\ \mid\ \mid B$	hypothese 4
7	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid \neg A$	hypothese 5
8	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid B$	rei, 6
9	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid \neg B$	rei, 2
10	$\mid\ \mid\ \mid \neg\neg A$	$\neg$-intro, 7, 8, 9
11	$\mid\ \mid\ \mid A$	$\neg$-elim, 10
12	$\mid\ \mid A$	$\lor$-elim, 3, 5, 11
13	$\mid\ \mid A \lor C$	$\lor$-intro, 12
14	$\mid \neg B \to (A \lor C)$	$\to$-intro, 2, 13

3. (10 punten) **Verzamelingen (voor zowel IN1305-A als TI1300)** Bepaal of de volgende bewering waar of onwaar is. Geef een duidelijk antwoord. Als je denk dat de bewering waar is, geef dan een bewijs (géén Venn-diagram!). Als je antwoordt dat de bewering onwaar is, geef dan een tegenvoorbeeld dat dit aantoont (in de vorm van *specifieke, concrete verzamelingen*) en leg uit hoe dit tegenvoorbeeld aantoont dat de bewering onwaar is.

Bewering. *Voor alle verzamelingen A en B geldt:* $A \subseteq B$ *of* $A \subseteq B^c$.

Antwoord: Dit is natuurlijk niet in het algemeen waar, want als de verzamelingen overlappen is dit niet waar. Een tegenvoorbeeld wordt bijvoorbeeld gegeven door de verzamelingen $A = \{0, 1\}$ en $B = \{1, 2\}$ in universum $U = \{0, 1, 2\}$. Nu geldt niet dat $A \subseteq B$ want $0 \notin B$, maar ook niet dat $A \subseteq B^c$ want $1 \notin B^c$.

Merk op dat ik hierboven zei "als de verzamelingen overlappen." Het is inderdaad zo dat als de verzamelingen niet overlappen de uitspraak wel waar is.

Stelling. *Zij A en B verzamelingen. Als* $A \cap B = \emptyset$, *dan geldt:* $A \subseteq B$ *of* $A \subseteq B^c$.

Bewijs. Stel dat $A \cap B = \emptyset$, dus er zijn geen objecten die element van zowel A als B zijn. We maken een gevalsonderscheid:

$A \subseteq B$**:** Nu is natuurlijk ($A \subseteq B$ of $A \subseteq B^c$) waar.

$A \not\subseteq B$**:** Te bewijzen is nu dat $A \subseteq B^c$ waar is (begrijp je waarom dit nu te bewijzen is?). Omdat $A \not\subseteq B$ moet er een element van A zijn dat niet in B zit. Omdat bovendien $A \cap B = \emptyset$, zijn er geen elementen van A die wel in B zitten. Met andere woorden, alle elementen van A zitten niet in B, dus in B^c: dus $A \subseteq B^c$.

QED

Je kunt dit bewijs ook met een gevalsonderscheid op het andere disjunct doen. Als $A \subseteq B^c$ is natuurlijk ($A \subseteq B$ of $A \subseteq B^c$) waar. Als $\neg(A \subseteq B^c)$, moet je bewijzen dat $A \subseteq B$ waar is.

Als je $A \vee B$ moet bewijzen, kun je dat doen door $\neg A \to B$ te bewijzen, waar $A \vee B$ equivalent mee is. Dat komt precies door zo'n gevalsonderscheid, en dat kan op twee manieren: Als A waar is, is $A \vee B$ uiteraard waar. Als $\neg A$ waar is, moet je aantonen dat $A \vee B$ waar is. Aantonen dat A waar is en dan concluderen dat $A \vee B$ waar is, gaat niet, want je hebt aangenomen dat $\neg A$ waar is. Dat betekent dat je moet aantonen dat B waar is. Dan kun je concluderen dat $A \vee B$ ook waar is, en heb je eigenlijk bewijzen dat $\neg A \to B$ waar is. Andersom kun je ook $\neg B \to A$ bewijzen om $A \vee B$ te concluderen.