Hoofdstuk 1

Wat is Logica?

Het woord *logica* wordt in uiteenlopende betekenissen gebruikt. Daarom bespreken we eerst in paragraaf 1.1 wat wij in dit boek onder logica zullen verstaan. Vervolgens zal in paragraaf 1.2 een aantal voorbeelden van logische redeneringen worden gepresenteerd en zal op informele wijze worden onderzocht wanneer een redenering logisch geldig is. Tenslotte geven we in paragraaf 1.3 een beknopt overzicht van de geschiedenis van de logica.

1.1 Het onderwerp van logica

Het woord *logica* is afgeleid van het Griekse woord 'logikos', *de taal, het spreken* of *de menselijke rede betreffend*, dat weer afstamt van 'logos', *woord, rede* of *begrip*. Volgens Van Dale's Groot Woordenboek der Nederlandse Taal (12$^{\mathrm{e}}$ druk, 1992) luidt de eerste betekenis van logica:

> *wetenschap die zich met de wetten van het denken bezighoudt.*

De logica als wetenschappelijke discipline wordt tegenwoordig verdeeld in de *wijsgerige* en de *formele* logica.

In de wijsgerige logica houdt men zich bezig met de filosofische grondslagen en de begrenzingen van het menselijk logisch denken. Voorbeelden van fundamentele vragen op dit onderzoeksgebied zijn: 'Wat is een logische redenering?', 'Wanneer is een redenering logisch correct?', 'Wat is de reikwijdte van het menselijk denken?', 'Zijn er verschillende logica's mogelijk?', 'Waarin onderscheidt zich een logische redenering in een normatieve wetenschap, bijvoorbeeld de rechtswetenschap, van een logische redenering in een empirische wetenschap zoals bijvoorbeeld de natuurkunde?' en 'Wat is de empirische betekenis van een conclusie van een redenering?'.

In de formele logica, ook wel *mathematische* of *symbolische* logica genoemd, bestudeert men vooral de structuur van gegeven logica's of logische systemen. Hierbij wordt bij voorkeur gebruik gemaakt van mathematische methoden.

Men definieert bijvoorbeeld zeer nauwkeurig wat *beweringen* zijn en wanneer een bewering *waar*, *onwaar*, *algemeen geldig* of *onvervulbaar* is. Ook zal men de *redeneerregels*, op grond waarvan men uit een aantal premissen bepaalde conclusies mag trekken, exact willen beschrijven (*premisse*: reeds afgeleide bewering, letterlijk: voorafgaande stelling; *conclusie*: bewering geconcludeerd uit de premissen).

Uit het bovenstaande blijkt, dat de formele logica zich vooral bezig houdt met de *technische* aspecten van het (menselijke) logisch redeneren. De uitwerking van de eventuele filosofische implicaties van resultaten in de formele logica behoort dan weer tot de wijsgerige logica. In dit boek zullen we ons uitsluitend bezighouden met formele logica. Anders gezegd, wij zullen onder logica verstaan: *formele logica*.

1.2 Logische redeneringen

In deze paragraaf zullen we voorbeelden geven van logische redeneringen. Ook zullen we de vraag proberen te beantwoorden wat een redenering correct maakt. Beschouw om te beginnen de volgende zinnen:

(1.1) Als het regent, dan wordt de stoep nat.

Het regent.

Derhalve wordt de stoep nat.

Niemand zal moeite hebben om in deze zinnen een correcte redenering te herkennen. Immers, zo redeneren we, *als* we de eerste twee zinnen van (1.1) voor waar aannemen, *dan* kunnen we er niet onderuit om de derde zin te accepteren en dus voor waar aan te nemen. Blijkbaar speelt het begrip *waarheid* een rol bij het beoordelen of een redenering correct is. Om deze rol wat nader te bestuderen, bekijken we een ander stel zinnen dat wellicht een redenering vormt:

(1.2) Als het regent, dan wordt de stoep nat.

De stoep wordt nat.

Derhalve regent het.

Kunnen we nu (1.2) als een correcte redenering beschouwen? Laten we om deze vraag te beantwoorden, dezelfde procedure toepassen als we bij (1.1) hebben gedaan. We moeten ons dus de vraag stellen of we, indien we de eerste twee zinnen van (1.2) voor waar aannemen, gedwongen zijn om ook de derde zin voor waar aan te nemen. Welnu, dat zijn we niet! Immers, het kan heel goed mogelijk zijn dat onze buurman de stoep aan het schrobben is, zodat deze inderdaad nat wordt zonder dat het regent. Precies om deze reden vormen de zinnen (1.2) geen correcte redenering.

Om onze bevindingen precies te kunnen formuleren zullen we wat terminologie invoeren. In redenering (1.1) noemt men de eerste twee uitspraken de *premissen* van de redenering en de derde de *conclusie*. Een correcte redenering zullen we voortaan een *logisch geldige* redenering noemen.

We zijn nu in staat om ons verworven inzicht omtrent het logisch geldig zijn van een redenering als volgt te formuleren:

> *Een redenering is logisch geldig indien men gedwongen is om de conclusie voor waar aan te nemen, wanneer men de premissen voor waar aanneemt.* (∗)

Op dit punt aangekomen vraagt de lezer zich wellicht af of dit betekent dat een redenering alleen logisch geldig kan zijn indien de premissen waar zijn. De volgende redenering laat zien dat dit niet het geval is:

(1.3) Als mensen vleugels hebben, dan kunnen dieren spreken.

Mensen hebben vleugels.

Derhalve kunnen dieren spreken.

Volgens het zojuist door ons geformuleerde criterium (∗) is dit een logisch geldige redenering. Immers, we zijn gedwongen om de conclusie van (1.3) te accepteren, *indien* we de premissen ervan accepteren. Er wordt niet van ons verwacht *dat* we de premissen accepteren!

Vergelijken we redenering (1.3) met redenering (1.1), dan valt het op dat deze dezelfde *vorm* bezitten. Gebruikmakend van het symbool $\therefore$ dat *derhalve* betekent, kunnen we deze vorm als volgt duidelijk maken:

(1.4) Als p, dan q.

p.

$\therefore\ q$.

Het maakt niet uit wat we voor p en q invullen: zolang we voor beide voorkomens van p dezelfde bewering invullen en dat ook voor q doen, blijft de redenering logisch geldig. De belangrijke les die we hieruit leren, is dat de logische geldigheid van een redenering een eigenschap is van de vorm en niet van de inhoud ervan. Dit maakt het mogelijk om regels te formuleren op grond waarvan men, op logisch geldige wijze, conclusies kan afleiden uit gegeven premissen. Deze regels worden *afleidingsregels* genoemd.

De afleidingsregel die in (1.4) is gebruikt, noemt men *modus ponens*. Volgens deze regel mag men uit premissen van de vorm *Als p, dan q* en p de conclusie q afleiden. Schematisch kan men deze regel als volgt weergeven:

$$\frac{\text{Als } p, \text{ dan } q \qquad p}{q} \qquad \textit{modus ponens}$$

Let op het verschil tussen een redenering en een afleidingsregel: een redenering is een reeks beweringen eindigende met een conclusie, terwijl een afleidingsregel bepaalt op grond van welke beweringen een conclusie mag worden getrokken.

Door afleidingsregels toe te passen kunnen *afleidingen* worden geconstrueerd. Een afleiding kan worden beschouwd als een redenering waarin iedere redeneerstap wordt gerechtvaardigd door de toepassing van een afleidingsregel. Afleidingsregels zijn dus het cement van een afleiding. Er zijn in de loop van de tijd verschillende systemen bedacht om afleidingen te construeren. In dit boek worden enkele hiervan besproken.

Redeneringen van het type (1.4) behoren tot het domein van de *propositielogica* die we uitgebreid in deel I zullen bestuderen. De volgende redenering behoort tot het gebied van de zogenaamde *predicatenlogica* (zie deel II):

(1.5) Alle mensen zijn sterfelijk.
Socrates is een mens.
$\therefore$ Socrates is sterfelijk.

Deze redenering voldoet aan onze test ($*$) voor logische geldigheid. De vorm van deze redenering is echter duidelijk anders dan die van bijvoorbeeld (1.1). Om wat meer greep te krijgen op de vorm van (1.5), geven we een redenering die er een variant van is.

(1.6) Alle mieren zijn onsterfelijk.
Socrates is een mier.
$\therefore$ Socrates is onsterfelijk.

Merk op dat de redenering logisch geldig is, terwijl de premissen onwaar zijn! De redeneringen (1.5) en (1.6) hebben beide de volgende vorm:

(1.7) Alle x die A zijn, zijn ook B.
s is A.
$\therefore$ s is B.

Substitueren we voor A overal 'mens', voor B 'sterfelijk' en voor s 'Socrates', dan hebben we onze oorspronkelijke redenering (1.5) weer terug. Evident blijft (1.7) logisch geldig ongeacht wat we voor A, B en s invullen. Ook hier wordt bevestigd dat de logische geldigheid van een redenering een eigenschap is van de vorm van die redenering.

1.3 Beknopte geschiedenis

Het onderzoek van het menselijk redeneren heeft een eeuwenlange traditie, die aanvankelijk vooral steunde op de logische geschriften van Aristoteles zoals die zijn verzameld in zijn 'Organon' (organon: werktuig).

Gedurende de vroege Middeleeuwen werden deze geschriften in de Arabische wereld uitvoerig bestudeerd en van commentaar voorzien. In het oosten (Bagdad) gebeurde dit onder andere door Al-Farabi (†950) en Avicenna (†1037) en in het westen (Cordoba) door Averroes (†1198). In de late Middeleeuwen werd dit, mede dankzij de latijnse vertaling van de geschriften van Aristoteles, voortgezet in de middeleeuwse christelijke scholastiek. De weerslag hiervan is onder andere te vinden in de geschriften van William van Ockham ('Summa Logicae', ca. 1326) en Walter Burleigh (†1349).

Het vaak herdrukte werk 'Logique ou l'Art de Penser' (1662), geschreven door A. Arnauld en P. Nicole heeft, vooral door de hierin gebruikte vierdeling: 'Réflexions sur les Idées', 'Sur les Jugements', 'Du Raisonnement' en 'De la Méthode', een grote invloed gehad.

De opbloei van de experimentele natuurwetenschap na de renaissance heeft in hoge mate de studie van natuurwetenschappelijke methoden gestimuleerd. Hierdoor ontstond de inductieve logica of de methodologie van de empirische wetenschappen als een nieuwe tak van de logica. Het eerste begin hiervan vindt men in de geschriften van Baco van Verulam (†1626), onder andere in zijn 'Novum Organum'; een verdere systematische ontwikkeling vindt men onder andere bij John Stuart Mill ('A System of Logic, Ratiocinative and Inductive', 1843), Wilhelm Wundt ('Logik', 1880 – 1883) en Christian Sigwart ('Logik', 1873 – 1887, heruitgave 1923).

Leibnitz' ideeën omtrent een 'Ars Combinatoria', een ontwerp van een universele symbolentaal voor het beschrijven van het menselijk redeneren, evenals de 'Wissenschaftslehre' (1837) van Bernard Bolzano vormen een aanzet tot de ontwikkeling van de mathematische logica.

In de negentiende eeuw werd door wiskundigen als Gottlob Frege, George Boole en Guiseppe Peano een begin gemaakt met de studie van de logica met behulp van wiskundige methoden. Vanaf dat moment kan men dus spreken van mathematische logica.

Na de ontwikkeling van een geschikte wiskundige notatie werd de mathematische logica al spoedig gebruikt voor de fundering van de wiskunde. Een eerste poging hiertoe was Frege's boek 'Grundgesetze der Arithmetik begriffschriftlich abgeleitet' (1891 en 1903). Deze faalde echter jammerlijk omdat Bertrand Russell aantoonde dat in Frege's systeem een contradictie (de beroemde paradox van Russell) afleidbaar was.

Een aantal jaren later gaven Bertrand Russell en Alfred North Whitehead in hun 'Principia Mathematica' (1910 – 1913) aan op welke wijze de wiskunde met behulp van de mathematische logica gefundeerd kan worden zonder dat dit leidt tot contradicties. Door de gecompliceerdheid ervan heeft de 'Principia Mathematica' echter niet iedereen kunnen overtuigen.

Latere funderingen van de wiskunde met behulp van de mathematische logica (of als onderdeel van de mathematische logica) vindt men in de school van de Duitse wiskundige David Hilbert en bij Paul Bernays, John von Neumann, Jacques Herbrand, Kurt Gödel, Alonzo Church, Stephen C. Kleene, Willard V.O. Quine, Alfred Tarski en en de Nederlandse logicus Evert W. Beth.

Mijlpalen in de ontwikkeling van de mathematische logica zijn de ontwikkeling van Tarski's semantiek voor formele talen ('Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen', 1933 – 1936), het werk over de vervulbaarheid van formules door Thoralf Skolem ('Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer

Sätze nebst einem Theoreme über dichte Mengen', 1920), de onderzoekingen over bewijstheorie van Herbrand (in zijn proefschrift 'Recherches sur la théorie de la démonstration', 1930), de volledigheidsstelling van Gödel die de gelijkwaardigheid van waarheid en bewijsbaarheid uitdrukt ('Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls', 1930), de onvolledigheidsstelling van de rekenkunde eveneens van Gödel ('Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I', 1931), het bewijs van de onbeslisbaarheid van de predicatenlogica door Church (1936), en het bewijs van de consistentie van de rekenkunde door Gerhard Gentzen (1936).

Van de resultaten na de Tweede Wereldoorlog vermelden we nog de non-standaardanalyse van Abraham Robinson, waarin een logische fundering wordt gegeven voor het gebruik van infinitesimale grootheden in de analyse, en het bewijs van de onafhankelijkheid van het keuze-axioma en de continuümhypothese door Paul Cohen.

Op dit moment is de formele logica een bloeiende internationaal beoefende wetenschap met eigen tijdschriften en congressen. Het vakgebied bevat een groot aantal deelgebieden zoals bewijstheorie, modeltheorie, recursietheorie, algoritmentheorie, axiomatische verzamelingenleer en typentheorie.

Na de Tweede Wereldoorlog heeft zich, onder invloed van de ontwikkelingen in de informatica en door de vele toepassingen van informatica in andere vakgebieden, zelfs een nieuwe tak van de logica ontwikkeld, namelijk de *toegepaste logica*. In de toegepaste logica onderzoekt men bijvoorbeeld hoe formele methoden uit de logica kunnen worden ingezet voor de grondslagen van de informatica of bij de ontwikkeling van bewijsbaar correcte computerprogramma's.

Tegenwoordig worden formele methoden die ontleend zijn aan de logica, niet alleen gebruikt in de wiskunde, de informatica, en de 'artificial intelligence', maar bijvoorbeeld ook in de biologie, de taalkunde en de rechtswetenschap.