Hoofdstuk 3

Semantiek van de Propositielogica

In dit hoofdstuk wordt de semantiek (betekenistheorie) van de propositielogica behandeld. In de paragrafen 3.1 en 3.2 worden de noties *valuatie*, *model* en *logisch gevolg* ingevoerd. Deze begrippen worden in paragraaf 3.3 toegepast om redeneringen, gegeven in het Nederlands, op hun geldigheid te toetsen.

3.1 Valuaties

De 'objecten' die door de formules van onze objecttaal $\mathcal{P}$ aangeduid worden, zijn beweringen die waar of onwaar kunnen zijn. Door dit uitgangspunt beperken we ons tot een bepaald soort logica, namelijk de *klassieke tweewaardige* propositielogica. 'Klassiek' omdat we aannemen dat iedere bewering een waarheidswaarde heeft en 'tweewaardig' omdat we uitgaan van twee waarheidswaarden, namelijk *waar* en *onwaar*. Deze waarden worden ook wel aangeduid met respectievelijk 1 en 0, en worden *Booleaanse* waarden genoemd. De verzameling $\{0, 1\}$ wordt genoteerd als $\mathbb{B}$.

De vraag is hoe we de waarheidswaarde van een formule $F \in PROP$ kunnen bepalen. Ter vergelijking kijken we naar de analyse: ook hier hebben we te maken met formules. Beschouw bijvoorbeeld de formule $x^2 + 3xy + 5y^3$. Van deze formule kunnen we alleen de waarde bepalen als we de waarden van x en y weten. Zijn deze waarden bekend dan kunnen we de bijbehorende waarde van de formule uitrekenen, aangezien we kunnen vermenigvuldigen en optellen.

Keren we terug naar de propositielogica, dan treffen we daar in feite dezelfde situatie aan. Beschouw bijvoorbeeld de formule

$$F = p \vee (q \to r). \tag{3.1}$$

We kunnen ook in dit geval alleen iets over de waarde van F zeggen, indien we de waarden van p, q en r kennen. Een verschil met de analyse is dat we hier te maken hebben met waarheidswaarden. Ook de operaties zijn anders. Er is

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Tabel 3.1: Waarheidstafels van de logische connectieven.

nu sprake van connectieven. We moeten dus ook weten hoe deze connectieven werken op waarheidswaarden.

Als we de waarheidswaarde van een willekeurige formule $F \in PROP$ willen berekenen, dienen we de waarheidswaarden van alle propositiesymbolen die in F voorkomen, te kennen. Omdat we onze aanpak zo algemeen mogelijk willen houden, introduceren we een functie die waarheidswaarden toekent aan *alle* propositiesymbolen. Zo'n functie wordt een *valuatie* of *interpretatie* genoemd. Een valuatie zal ons in staat stellen om aan iedere formule, ongeacht welke propositiesymbolen daarin voorkomen, een waarheidswaarde toe te kennen.

3.1.1 Definitie **Valuatie**
Een valuatie *is een functie v die aan ieder propositiesymbool p van $\mathcal{P}$ een waarheidswaarde $v(p) \in \mathbb{B}$ toekent.*

Stel nu dat een bepaalde valuatie v gegeven is, waarvoor geldt dat:

$$\begin{aligned} v(p) &= 0, \\ v(q) &= 1, \\ v(r) &= 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Hoe kunnen we dan de waarheidswaarde van formule 3.1 uitrekenen? We weten immers nog niet hoe de logische connectieven op waarheidswaarden werken. De zogenaamde *waarheidstafels* geven het antwoord op deze vraag. Waarheidstafels kan men vergelijken met de tafels voor het vermenigvuldigen. De waarheidstafels van de logische connectieven kan men aantreffen in tabel 3.1. Aan het einde van deze paragraaf volgt een toelichting op deze tafels.

Nu zijn we in staat om de waarheidswaarde van formule (3.1) met betrekking tot een valuatie die aan (3.2) voldoet, te evalueren. Immers, in rij 3 van de tafel voor de implicatie $\rightarrow$ (kolom 6 in tabel 3.1) kunnen we aflezen dat de waarheidswaarde van $(q \rightarrow r)$ gelijk moet zijn aan 0. Combineren we dit resultaat met de rest van de formule met gebruikmaking van de tafel voor de disjunctie $\vee$ (kolom 5, rij 1), dan vinden we dat de waarheidswaarde van de gehele formule gelijk is aan 0. We moeten wel bedenken dat dit resultaat afhankelijk is van de gekozen valuatie. Een andere valuatie geeft in het algemeen een andere uitkomst!

Het berekenen van de waarheidswaarde van een gegeven formule met betrekking tot een gegeven valuatie v kan recursief worden gedefinieerd als een functie $v^+ : PROP \to \mathbb{B}$. De naamgeving v^+ duidt op het feit dat deze functie kan worden beschouwd als een *uitbreiding* van de functie v. Hierop komen we terug na definitie 3.1.3. Ten behoeve van de recursieve definitie (zie stelling 2.4.1) geven we eerst een getaltheoretische beschrijving van de logische connectieven.

3.1.2 DEFINITIE **Waarheidsfuncties connectieven**

$$\begin{array}{rcl} f_\neg(x) & = & (1-x), \\ f_\wedge(x,y) & = & \mathsf{min}\,(x,y), \\ f_\vee(x,y) & = & \mathsf{max}\,(x,y), \\ f_\to(x,y) & = & \mathsf{max}\,(1-x,y), \\ f_\leftrightarrow(x,y) & = & \begin{cases} 1 & \textit{als } x = y, \\ 0 & \textit{anders.} \end{cases} \end{array}$$

In de uitdrukking $1 - x$ wordt de waarde van x als een natuurlijk getal beschouwd, verder geven de functies min *en* max *respectievelijk het minimum en het maximum van hun argumentwaarden die daarbij eveneens als natuurlijke getallen worden beschouwd.*

Het is eenvoudig in te zien dat de functies f overeenstemmen met de waarheidstafels uit tabel (3.1). De volgende definitie geeft de recursieve beschrijving van de waarheidsfunctie v^+.

3.1.3 DEFINITIE **Waarheidswaarde van formules**
Zij v een gegeven valuatie. Aan iedere formule $F \in PROP$ wordt door de functie $v^+ : PROP \to \mathbb{B}$ een waarheidswaarde *$v^+(F) \in \mathbb{B}$ toegekend in overeenstemming met de volgende recurrente betrekkingen:*

$$\begin{array}{rcl} v^+(p_i) & = & v(p_i), \\ v^+(\neg A) & = & f_\neg(v^+(A)), \\ v^+(A \star B) & = & f_\star(v^+(A), v^+(B)). \end{array}$$

Uit stelling 2.4.1 volgt dat $v^+(F)$ voor alle $F \in PROP$ eenduidig is gedefinieerd. Uit de definitie blijkt dat voor gegeven v en F de waarde $v^+(F)$ volledig wordt bepaald door de waarheidswaarden die v toekent aan de propositiesymbolen p_i $(i \in \mathbb{N})$. Verder stemmen de functies v^+ en v overeen op propositiesymbolen. Hieruit volgt dat de functie v^+ opgevat kan worden als een *uitbreiding* van v. Omdat v^+ vastligt zodra v is gegeven, zullen we in het vervolg het superscript $+$ in v^+ weglaten.

3.1.4 VOORBEELD Berekening van $v(F)$.

1. Zij F de formule (3.1), en v een valuatie die voldoet aan (3.2), dan geldt:

$$\begin{aligned} v(F) &= v(p \vee (q \rightarrow r)), \\ &= f_\vee(v(p), v(q \rightarrow r)), \\ &= f_\vee(0, f_\rightarrow(v(q), v(r))), \\ &= f_\vee(0, f_\rightarrow(1,0)), \\ &= f_\vee(0,0), \\ &= 0. \end{aligned}$$

2. Zij $F = [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow [p \rightarrow r]$, en laat v als volgt voor de atomen gedefinieerd zijn: $v(p) = 0$, $v(q) = 1$ en $v(r) = 0$. De waarde $v(F)$ wordt als volgt berekend.

$$\begin{aligned} v(F) &= v([(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow [p \rightarrow r]), \\ &= f_\rightarrow(v((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)), v(p \rightarrow r)), \\ &= f_\rightarrow(f_\wedge(v(p \rightarrow q), v(q \rightarrow r)), v(p \rightarrow r)), \\ &= f_\rightarrow(f_\wedge(f_\rightarrow(v(p), v(q)), f_\rightarrow(v(q), v(r))), f_\rightarrow(v(p), v(r))), \\ &= f_\rightarrow(f_\wedge(f_\rightarrow(0,1), f_\rightarrow(1,0)), f_\rightarrow(0,0)), \\ &= f_\rightarrow(f_\wedge(1,0), 1), \\ &= f_\rightarrow(0,1), \\ &= 1. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Uit deze berekeningen —die voor andere formules uit *PROP* volkomen analoog verlopen— blijkt dat de waarheidswaarde van een formule $F \in PROP$ slechts afhankelijk is van de waarheidswaarden van de in F voorkomende propositiesymbolen.

3.1.5 STELLING **Valuatiestelling**
Zij $F \in PROP$. Als v en w valuaties zijn zodanig dat $v(p) = w(p)$ voor ieder propositiesymbool p dat in F voorkomt, dan geldt dat $v(F) = w(F)$.

BEWIJS Door middel van eenvoudige structurele inductie over *PROP*. $\blacksquare$

A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Tabel 3.2: De waarheidstafel van $\oplus$.

Uit de waarheidstafels in tabel 3.1 kan men afleiden dat $A \wedge B$ en $B \wedge A$ steeds dezelfde waarheidswaarde hebben. Dus $v(A \wedge B) = v(B \wedge A)$ voor alle $A, B \in PROP$. Zo geldt ook $v(A \vee B) = v(B \vee A)$.

Verder volgt uit de waarheidstafel voor de disjunctie $\vee$, dat dit voegwoord de betekenis heeft van een *inclusief of*. Immers, $v(A \vee B) = 1$ dan en slechts dan als $v(A) = 1$ en $v(B) = 0$, of als $v(A) = 0$ en $v(B) = 1$, òf als $v(A) = v(B) = 1$.

De *exclusieve of*, ook wel de *xor* genaamd en genoteerd als $\oplus$, kan gedefinieerd worden zodat $v(A \oplus B) = 1$ dan en slechts dan als $v(A) = 1$ en $v(B) = 0$, òf als $v(A) = 0$ en $v(B) = 1$. In de overige gevallen geldt $v(A \oplus B) = 0$. Zie tabel 3.2.

Bij de formele interpretatie van de implicatie $\rightarrow$ is het gebruik ervan in de wiskunde gevolgd. Dat dit niet altijd in overeenstemming is met het gebruik van 'als ... dan' in de omgangstaal, bleek al in paragraaf 2.1. Beschouw bijvoorbeeld de reeds eerder genoemde bewering

(3.3) Als Amsterdam de hoofdstad van Nederland is, dan is zeven een priemgetal.

In de objecttaal $\mathcal{P}$ kan men deze bewering aanduiden door $p \rightarrow q$, waarin p en q respectievelijk de beweringen 'Amsterdam is de hoofdstad van Nederland' en 'Zeven is een priemgetal' aanduiden. Ten aanzien van de situatie in de wereld geldt nu dat $v(p) = v(q) = 1$. Dit betekent dat $v(p \rightarrow q) = 1$. Formeel kwalificeren we bewering (3.3) dus als waar, terwijl we deze in de omgangstaal echter als onzinnig zouden bestempelen.

Tot slot laten we aan de hand van enkele eenvoudige wiskundige uitspraken zien, dat de materiële implicatie het gebruik van het voegwoord 'als ... dan' in de wiskunde op een juiste manier weergeeft. Beschouw de volgende wiskundige uitspraak over natuurlijke getallen.

(3.4) Als n deelbaar is door 4, dan is n deelbaar door 2.

Merk allereerst op dat deze uitspraak waar is voor alle natuurlijke getallen n. Laat p en q respectievelijk de volgende beweringen aanduiden: 'n is deelbaar door 4' en 'n is deelbaar door 2'.

Voor $n = 4$ geldt dat zowel p als q waar zijn. Nemen we $n = 6$, dan is p onwaar, maar q waar. Indien we bijvoorbeeld $n = 13$ nemen, dan zijn zowel p als q onwaar. In al deze gevallen is uitspraak (3.4) waar, zoals we reeds geconstateerd hebben. Dit is in overeenstemming met de waarheidstafel voor de implicatie: $v(A \to B) = 1$ indien $v(A) = 0$ of $v(B) = 1$.

De volgende uitspraak over natuurlijke getallen is niet waar:

(3.5) Als n deelbaar is door 2, dan is n deelbaar door 4.

Immers, 6 is deelbaar door 2, maar niet door 4. Ook dit is in overeenstemming met de waarheidstafel: $v(A \to B) = 0$ indien $v(A) = 1$ en $v(B) = 0$.

Een bekende wiskundige redeneervorm is de *redenering uit het ongerijmde*. Deze redeneervorm is gebaseerd op het feit dat uit de waarheidstafel voor de implicatie volgt dat $v(A) = 0$ indien $v(A \to B) = 1$ en $v(B) = 0$.

Stel men wil de bewering $\neg p$ bewijzen, en men weet dat $p \to q$ en $\neg q$ waar zijn. Het bewijs van $\neg p$ uit het ongerijmde verloopt dan aldus. Stel dat p *waar* is. In combinatie met het gegeven dat $p \to q$ waar is, volgt hieruit dat q waar is. Het andere gegeven stelt echter dat $\neg q$ waar is, in tegenspraak met het zojuist geconstateerde. De aanname dat p waar is, moet dus onjuist zijn, zodat $\neg p$ het geval moet zijn.

De waarheidstafel voor de implicatie voorspelt inderdaad dat deze redenering correct is. Er is gegeven dat $v(p \to q) = v(\neg q) = 1$. Hieruit volgt dat $v(q) = 0$. Uit de waarheidstafel volgt dat $v(p) = 0$ indien $v(p \to q) = 1$ en $v(q) = 0$. Maar dit betekent dat $v(\neg p) = 1$. Schematisch is dit de volgende redeneervorm:

(3.6) $p \to q$

$\neg q$

$\therefore\ \neg p$

3.2 Model en logisch gevolg

In deze paragraaf zullen we een aantal belangrijke begrippen definiëren. Daarbij staat de notie valuatie die in de vorige paragraaf is geïntroduceerd, centraal.

3.2.1 Definitie **Model, tautologie en logisch gevolg**

1. *Een* model *van een formule $F \in PROP$ is een valuatie v zodanig dat $v(F) = 1$. Men noemt F* vervulbaar *als F een model heeft. Als v een model is voor F, zegt men ook dat F* vervuld *wordt door v.*

2. *Een* model *van een verzameling* $\Gamma \subseteq PROP$ *is een valuatie* v *zodanig dat* $v(F) = 1$ *voor alle* $F \in \Gamma$. *Per definitie is iedere valuatie een model van de lege verzameling. Men noemt* Γ vervulbaar *als* Γ *een model heeft. Als* v *een model is voor* Γ, *dan zegt men ook dat* Γ vervuld *wordt door* v.

3. *Een formule* F *wordt een* tautologie *genoemd, notatie* $\models F$, *als iedere valuatie* v *een model van* F *is. Men noemt* F *ook* algemeen geldig.

4. *Een formule* F *is een* logisch gevolg *van een verzameling* $\Gamma \subseteq PROP$, *notatie* $\Gamma \models F$, *als ieder model van* Γ *tevens een model van* F *is.*

Vaak noteert men $\{A_1, \ldots, A_n\} \models F$ als $A_1, \ldots, A_n \models F$. Hierbij is de volgorde van de formules $A_1, \ldots, A_n$ irrelevant, zoals ook uit de definitie van de notie logisch gevolg blijkt. $\emptyset \models F$ is equivalent met $\models F$.

De definitie van het begrip logisch gevolg stemt overeen met de in §1.2 ontwikkelde intuïtie betreffende de logische geldigheid van een redenering. Hebben we een redenering van de vorm $\Gamma, \therefore F$, waarin Γ de verzameling premissen voorstelt en F de conclusie, dan is deze redenering logisch geldig, dan en slechts dan als F een logisch gevolg is van Γ. Dus als ieder model van de premissen tevens een model van de conclusie is, ofwel als de waarheid van de premissen met betrekking tot een willekeurige valuatie de waarheid van de conclusie forceert.

Ingeval de redenering niet logisch geldig is, dan moet er een valuatie bestaan die een model is voor de premissen, maar die de conclusie onwaar maakt. Zo'n valuatie wordt een *tegenvoorbeeld* genoemd.

3.2.2 Definitie **Logisch geldige redenering en tegenvoorbeeld**
Zij $\Gamma \subset PROP$ *en* $F \in PROP$.

1. *De redenering* $\Gamma, \therefore F$ *is* logisch geldig, *dan en slechts dan als* $\Gamma \models F$.

2. *Een* tegenvoorbeeld *voor de redenering* $\Gamma, \therefore F$ *is een valuatie* v *zodanig dat* v *een model is voor* Γ, *maar niet voor* F.

3.2.3 Voorbeeld Logisch gevolg en vervulbaarheid.

1. $A, \neg A \models B$.
   Bewijs: Er is geen enkele valuatie v die model is van zowel A als $\neg A$, dus alle valuaties die model zijn van zowel A als $\neg A$, zijn een model van B.

2. $\Gamma = \{p \rightarrow q, \neg p, q\}$ is een vervulbare verzameling.
   Bewijs: Een valuatie v waarvoor $v(p) = 0$ en $v(q) = 1$, vervult Γ. ∎

p	q	r	$p\to q$	$q\to r$	$(p\to q)\to(q\to r)$	$p\wedge r$	F
0	0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Tabel 3.3: Waarheidstafel voor $F = [(p\to q)\to(q\to r)]\to(p\wedge r)$.

Met behulp van waarheidstabellen is eenvoudig na te gaan of een formule een tautologie is. Zij $F \in PROP$ een formule die n propositiesymbolen $q_1, \ldots, q_n$ bevat. We hebben gezien dat de waarheidswaarde van F slechts afhankelijk is van de waarheidswaarden van $q_1, \ldots, q_n$ (zie voorbeeld 3.1.5). Totaal zijn er 2^n verschillende rijtjes $v(q_1), \ldots, v(q_n)$ bestaande uit nullen en enen. Hieruit volgt dat F een tautologie is als $v(F) = 1$ voor al deze rijtjes $v(q_1), \ldots, v(q_n)$. We kunnen al deze rijtjes $v(q_1), \ldots, v(q_n)$ op systematische wijze weergeven in een waarheidstafel voor F. We zullen dit aan een voorbeeld illustreren.

3.2.4 VOORBEELD Waarheidstafel van een formule.
Tabel 3.3 is een waarheidstafel voor de formule $F = [(p\to q)\to(q\to r)]\to(p\wedge r)$. Omdat F alleen de propositiesymbolen p, q en r bevat, hebben we in de waarheidstafel te maken met $2^3 = 8$ rijen. De tabel bevat naast de drie kolommen voor de waarheidswaarden van p, q en r en een kolom voor de waarheidswaarden van F, vier hulpkolommen voor de waarheidswaarden van de subformules $p\to q$, $q\to r$, $(p\to q)\to(q\to r)$ en $p\wedge r$. Uit deze waarheidstafel van F, volgt dat F geen tautologie is. Immers, de kolom van F bestaat niet alleen uit enen. Er zijn dus valuaties mogelijk waarvoor $v(F) = 0$. Zo'n valuatie hebben we een *tegenvoorbeeld* genoemd. Een tegenvoorbeeld is af te lezen uit een rij waarvoor $v(F) = 0$. Zo is een valuatie waarvoor $v(p) = v(q) = v(r) = 0$ (zoals in rij 1), een tegenvoorbeeld voor F. ∎

Op dezelfde wijze waarop we waarheidstafels kunnen gebruiken om na te gaan of een formule een tautologie is, kunnen we nagaan of een formule het logisch gevolg is van een (eindige) verzameling formules. Zij $F \in PROP$ en $\Gamma \subseteq PROP$ en laat $q_1, \ldots, q_n$ de enige propositiesymbolen zijn die in F of in de formules in Γ voorkomen. In dit geval zijn er weer 2^n rijtjes $v(q_1), \ldots, v(q_n)$ van

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$p \to r$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Tabel 3.4: Waarheidstafel voor de formules $p \to q$, $q \to r$ en $p \to r$.

p	q	$p \to q$	$\neg p$	$\neg q$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	1	1	0	0

Tabel 3.5: Waarheidstafel voor de formules $p \to q$, $\neg p$ en $\neg q$.

nullen en enen. Hieruit volgt dat $\Gamma \models F$, indien voor alle rijtjes $v(q_1), \ldots, v(q_n)$ geldt dat als $v(A) = 1$ voor alle $A \in \Gamma$, dan ook $v(F) = 1$. In termen van waarheidstafels: $\Gamma \models F$ als voor alle rijen waarvoor geldt dat de formules uit Γ een '1' hebben, ook F een '1' heeft.

3.2.5 VOORBEELD Waarheidstafels en logisch gevolg.
De waarheidstafel in tabel 3.4 laat zien dat $p \to q, q \to r \models p \to r$. Duidelijk is dat in de rijen 1, 2, 4 en 8 waarvoor de beide formules $p \to q$ en $q \to r$ een '1' hebben, ook de formule $p \to r$ een '1' bezit. ■

3.2.6 VOORBEELD Tegenvoorbeeld.
Als we met behulp van een waarheidstafel proberen om na te gaan of

$$\begin{array}{ll} (3.7) & p \to q \\ & \neg p \\ & \therefore\ \neg q \end{array}$$

een logische geldig redenering is, krijgen we de waarheidstafel als in tabel 3.5. Uit de tafel blijkt dat de redenering niet logisch geldig is. Immers de tweede

A	B	$\neg B$	$A \to B$	$A \vee \neg B$	$\neg A$
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	1	0

Tabel 3.6: Waarheidstafel voor de formules $A \to B$, $A \vee \neg B$ en $\neg A$.

rij geeft een situatie waarvoor de premissen waar zijn, maar de conclusie niet. Zoals we uit de genoemde rij kunnen aflezen, wordt zo'n situatie gerealiseerd door een valuatie die voldoet aan $v(p) = 0$ en $v(q) = 1$. Een dergelijke valuatie is dus een *tegenvoorbeeld* voor de redenering. ∎

De methode van de waarheidstafels is ook te gebruiken om na te gaan of formules die *metavariabelen* bevatten, tautologieën zijn. Zo kan men ook redeneringen waarin de formules metavariabelen bevatten, op hun logische geldigheid testen. Dit laatste wordt geïllustreerd in het volgende voorbeeld.

3.2.7 VOORBEELD Tegenvoorbeeld voor een redenering met metavariabelen. Beschouw de volgende redenering:

(3.8) $A \to B$

$A \vee \neg B$

$\therefore\ \neg A$

Tabel 3.6 laat zien dat deze redenering niet logisch geldig is voor willekeurige $A, B \in PROP$. Immers, in rij 4 zijn de twee premissen waar, maar is de conclusie onwaar. Een valuatie v en twee proposities A en B zodanig dat $v(A) = v(B) = 1$ vormen een tegenvoorbeeld voor de redenering. Dergelijke v, A en B zijn eenvoudig te vinden: neem willekeurige propositiesymbolen p en q, kies een valuatie met $v(p) = v(q) = 1$, en stel $A = p$ en $B = q$.

Aangezien de tabel ook rijen bevat waarin het niet het geval is dat alle premissen waar zijn en de conclusie onwaar is —in deze tabel de rijen 1, 2 en 3—, zijn er substituties van A en B te geven zodanig dat de redenering logisch geldig is. Als men bijvoorbeeld neemt $A = p \wedge \neg p$ en $B = p \vee \neg p$ voor een willekeurig propositiesymbool p, dan geldt voor alle valuaties v dat $v(A) = 0$ en $v(B) = 1$. Dit betekent dat van tabel 3.6 alleen rij 2 overblijft. Voor *deze* keuze van A en B is de redenering logisch geldig.

We zien dat er keuzen voor A en B zijn, die de redenering logisch geldig maken, en die dat niet doen. Als iedere keuze voor A en B de redenering logisch geldig maakt, dan is er sprake van een geldig redeneerschema. ∎

3.3 Redeneringen

In deze paragraaf laten we aan de hand van een aantal voorbeelden zien, hoe de correctheid van een redenering in de Nederlandse taal gecontroleerd kan worden met behulp van de tot nu toe ontwikkelde logische concepten.

Daartoe worden eerst de premissen en de conclusie van de redenering zo goed mogelijk omgezet in een reeks formules $P_1, \ldots, P_n, C \in PROP$. Hoe dit kan worden gedaan, is uiteengezet in hoofdstuk 2, voorbeeld 2.2.7. De redenering in de Nederlandse taal is correct dan en slechts dan als $P_1, \ldots, P_n \models C$.

3.3.1 Voorbeeld Contrôle van Nederlandstalige redeneringen.

1. De redenering luidt:

   (a) Karel is ijverig $\boxed{\text{of}}$ intelligent.

   (b) $\boxed{\text{Als}}$ Karel slaagt, $\boxed{\text{dan}}$ is hij intelligent.

   (c) Karel slaagt $\boxed{\text{niet}}$ $\boxed{\text{en}}$ hij is toch ijverig.

   (d) Dus Karel is $\boxed{\text{niet}}$ intelligent.

   Na vertaling in de propositielogica verkrijgt men de volgende premissen en conclusie:

   (a) $P_1 = k \vee i$

   (b) $P_2 = s \rightarrow i$

   (c) $P_3 = \neg s \wedge k$

   (d) $C \ = \neg i$

   Met een waarheidstafel is eenvoudig na te gaan dat de redenering niet logisch geldig is. Een valuatie met $v(k) = v(i) = 1$ en $v(s) = 0$ is een tegenvoorbeeld. Deze is immers een model voor de verzameling premissen $\{P_1, P_2, P_3\}$, maar niet voor de conclusie C.

2. Beschouw de onderstaande redenering:

   (a) $\boxed{\text{Als}}$ Jan komt, $\boxed{\text{dan}}$ regent het $\boxed{\text{niet}}$.

   (b) Het regent.

   (c) Dus Jan komt $\boxed{\text{niet}}$.

   Na vertaling luiden de premissen en de conclusie:

   (a) $P_1 = k \rightarrow \neg r$

(b) $P_2 = r$

(c) $C \ = \neg k$

Met behulp van een waarheidstafel is eenvoudig na te gaan dat de redenering logisch geldig is. Het is ook direct in te zien. Immers uit $v(k \rightarrow \neg r) = 1$ en $v(r) = 1$ volgt $v(\neg k) = 1$.

3. De volgende redenering lijkt veel op de vorige, maar is onjuist.

   (a) $\boxed{\text{Als}}$ het $\boxed{\text{niet}}$ regent, $\boxed{\text{dan}}$ komt Jan.

   (b) Het regent.

   (c) Dus Jan komt $\boxed{\text{niet}}$.

   De premissen en de conclusie luiden nu:

   (a) $P_1 = \neg r \rightarrow k$

   (b) $P_2 = r$

   (c) $C \ = \neg k$

   Het is eenvoudig te verifiëren dat een valuatie die voldoet aan $v(r) = v(k) = 1$ een tegenvoorbeeld voor de redenering is. ■

3.4 Opgaven

1. Zij $A, B, C \in PROP$ en zij gegeven dat $v(A) = v(C) = 1$ en $v(B) = 0$. Bereken dan de waarheidswaarden van de volgende proposities met betrekking tot v.

   (a) $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$.

   (b) $\neg A \rightarrow (B \vee C)$.

   (c) $(A \wedge C) \rightarrow B$.

   (d) $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$.

   (e) $((A \wedge B) \vee (A \rightarrow (A \rightarrow (C \rightarrow A)))) \rightarrow C$.

   (f) $B \rightarrow (A \rightarrow (A \rightarrow (\neg B \rightarrow (C \rightarrow B))))$.

2. Zij $A, B \in PROP$. Maak een waarheidstafel voor elk van de volgende proposities. Ga vervolgens na of de betreffende propositie een *tautologie* is. Geef een tegenvoorbeeld (inclusief substituties voor A en B) als dit niet zo is.

   (a) $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$.

(b) $B \rightarrow (A \rightarrow B)$.

(c) $(\neg A \wedge \neg B) \leftrightarrow \neg(A \vee B)$.

(d) $\neg(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$.

3. Ga met behulp van een waarheidstafel na of de volgende redenering *logisch geldig* is voor iedere keuze van $A, B, C \in PROP$:

$$A \rightarrow B, \neg C \rightarrow \neg B, \neg A \rightarrow A, \ \therefore \ C.$$

4. Vertaal de volgende redenering in de *propositielogica* en ga vervolgens na of deze *logisch geldig* is.

   Als Thea slaapt en Arie gaat gillen, dan wordt Peter wakker.
   Ofwel Thea slaapt niet, ofwel Arie gaat gillen.
   Derhalve wordt Peter wakker als Thea slaapt.

5. Bewijs de valuatiestelling (3.1.5).