Hoofdstuk 4

Stellingen over de Propositielogica

In dit hoofdstuk wordt een aantal uiteenlopende eigenschappen van de propositielogica behandeld. In §4.1 wordt het begrip *meta-stelling* geïntroduceerd en worden een aantal meta-stellingen bewezen. Vervolgens wordt in §4.2 een algebraïsche kijk op de propositielogica gegeven. Tenslotte wordt in §4.3 de notie *normaalvorm* gepresenteerd.

4.1 Metataal en meta-stellingen

In paragraaf 2.2 hebben we het onderscheid tussen objecttaal en metataal geïntroduceerd. Een formule als $((p \wedge q) \to p)$ behoort zoals we hebben gezien tot de objecttaal $\mathcal{P}$. Maar tot welke taal behoort de volgende uitdrukking?

$$\models ((p \wedge q) \to p). \tag{4.1}$$

Deze uitdrukking kan niet in $\mathcal{P}$ thuishoren aangezien het symbool $\models$ niet tot het alfabet van $\mathcal{P}$ behoort. Het antwoord op de vraag kan dus alleen nog maar luiden dat uitdrukking (4.1) tot de metataal behoort. Dit vooronderstelt echter dat $\models$ een symbool is van de metataal en dat bovendien alle formules van de objecttaal tevens tot de metataal behoren. In feite is onze metataal dus een (forse) uitbreiding van de objecttaal.

Wat (4.1) uitdrukt, is dat de objecttalige formule $((p \wedge q) \to p)$ een tautologie is. In de metataal kunnen we dus eigenschappen van formules van de objecttaal vastleggen. Uitdrukkingen uit de metataal die niet tot de objecttaal behoren, noemt men *metabeweringen*. Als een metabewering, zoals (4.1), bovendien waar is, noemt men deze een *meta-stelling*.

Een ander aspect van de metataal dat we tegenkwamen, is het feit dat er in de metataal variabelen, de zogenaamde *metavariabelen*, worden gebruikt. We hebben niet alleen de letters $A, B, \ldots$ gebruikt als metavariabelen voor formules uit $PROP$, maar we hebben ook Γ gebruikt als metavariabele voor deelverzamelingen van $PROP$. We hebben zelfs $\star$ gebruikt als metavariabele

metatalig connectief	afkorting van
$\sim$	niet
&	en
$\bigvee$	of
$\Rightarrow$	als ... dan
$\Leftrightarrow$	dan en slechts dan als

Tabel 4.1: De connectieven van de metataal.

voor de tweeplaatsige connectieven van $\mathcal{P}$. Kortom, we kunnen in de metataal verschillende typen metavariabelen gebruiken.

We willen de metataal vanwege het praktische gemak nog verder uitbreiden. Beschouw bijvoorbeeld de meta-stelling:

$$\text{Als} \quad \models A \quad \text{en} \quad \models B, \quad \text{dan} \quad \models A \wedge B. \tag{4.2}$$

Het is vervelend om vaak *Als ... dan* en *en* te moeten schrijven. Daarom willen we voor deze metatalige voegwoorden metatalige connectieven introduceren. Deze zijn opgenomen in tabel 4.1. Merk op dat er voor ieder connectief van de objecttaal een ermee corresponderend connectief uit de metataal bestaat. Om geen verwarring te zaaien zijn hiervoor andere symbolen gebruikt. Men dient zich wel te realiseren dat de metatalige connectieven *afkortingen* zijn van de voegwoorden zoals deze in de *wiskunde* worden gebruikt! Voor deze metatalige connectieven zullen we dezelfde precedentieregels gebruiken als voor de objecttalige.

Met gebruik van de metatalige connectieven kan meta-stelling (4.2) nu als volgt worden weergegeven:

$$\models A \quad \& \quad \models B \quad \Rightarrow \quad \models A \wedge B.$$

Hoe deze en andere meta-stellingen kunnen worden bewezen, laten we zien in het volgende voorbeeld. Let er in deze bewijzen op dat er vaak een beroep moet worden gedaan op de begrippen uit definitie 3.2.1.

4.1.1 VOORBEELD Meta-stellingen.

1. $\models A \quad \& \quad \models B \quad \Rightarrow \quad \models A \wedge B$.
   Bewijs: Uit $\models A$ en $\models B$ volgt dat voor alle valuaties v geldt $v(A) = v(B) = 1$. Hieruit volgt dat voor alle v geldt $v(A \wedge B) = 1$, ofwel $\models A \wedge B$.

2. $A \models B \quad \Rightarrow \quad \models A \rightarrow B$ (*deductiestelling*).
   Bewijs: Uit $A \models B$ volgt dat voor iedere valuatie v geldt: als $v(A) = 1$

dan $v(B) = 1$. Dit betekent dat er geen valuatie v bestaat zodanig dat $v(A) = 1$ en $v(B) = 0$. Derhalve moet voor alle valuaties v gelden dat $v(A \to B) = 1$, zodat $\models A \to B$. ∎

Dat niet alle metabeweringen ook meta-stellingen zijn volgt uit:

4.1.2 VOORBEELD Tegenvoorbeeld.
De metabewering:

$$\models A \vee B \quad \Rightarrow \quad \models A \quad \bigvee \quad \models B$$

is geen meta-stelling. We kunnen namelijk bepaalde $A, B \in PROP$ kiezen zodanig dat wel geldt $\models A \vee B$, maar niet $\models A$ en ook niet $\models B$. Stel namelijk $A = p$ en $B = \neg p$ voor een atoom p. Dan geldt zeker $\models p \vee \neg p$, maar er geldt niet $\models p$ en ook niet $\models \neg p$. Immers, er bestaan valuaties v waarvoor $v(p) = 1$ (zodat $v(\neg p) = 0$), maar ook valuaties v waarvoor $v(p) = 0$ (zodat $v(\neg p) = 1$). De keuze $A = p$ en $B = \neg p$ wordt een *tegenvoorbeeld* voor de metabewering genoemd. ∎

In de volgende stelling zijn een aantal 'nuttige' tautologieën bij elkaar gezet.

4.1.3 STELLING **Tautologieën**
Zij $A, B \in PROP$. De volgende formules zijn tautologieën:

1. $A \vee \neg A$ (tertium non datur *of* wet van de uitgesloten derde).
2. $(A \to B) \leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$ (contrapositie).
3. $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$ (wet van De Morgan).
4. $\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$ (wet van De Morgan).
5. $(A \to B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$.
6. $\neg(A \to B) \leftrightarrow (A \wedge \neg B)$.
7. $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow [(A \to B) \wedge (B \to A)]$.
8. $\neg(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow [\neg(A \to B) \vee \neg(B \to A)]$.

BEWIJS Al deze tautologieën kunnen met behulp van waarheidstafels worden bewezen. Men kan ze echter ook bewijzen door een beroep te doen op de definitie van het begrip tautologie in termen van valuaties. Bij wijze van voorbeeld zullen we tautologie 6 op beide manieren bewijzen.

A	B	$\neg B$	$(A \to B)$	$\neg(A \to B)$	$A \wedge \neg B$	F
0	0	1	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1

Tabel 4.2: $F = \neg(A \to B) \leftrightarrow (A \wedge \neg B)$ is een tautologie.

De waarheidstafel van tautologie 6 vindt men in tabel 4.2. Uit deze tafel blijkt dat de kolom van de betreffende formule alleen enen bevat. Dit betekent dat zij een tautologie is. Het tweede bewijs bezit het karakter van een berekening en ziet er als volgt uit:

$$
\begin{aligned}
v(\neg(A \to B)) = 1 \quad & \Leftrightarrow \quad v(A \to B) = 0, \\
& \Leftrightarrow \quad v(A) = 1 \quad \& \quad v(B) = 0, \\
& \Leftrightarrow \quad v(A) = 1 \quad \& \quad v(\neg B) = 1, \\
& \Leftrightarrow \quad v(A \wedge \neg B) = 1.
\end{aligned}
$$

Aangezien dit voor alle valuaties v opgaat, is $\neg(A \to B) \leftrightarrow (A \wedge \neg B)$ een tautologie. ■

In de volgende definitie introduceren we de relatie $\approx$ in de metataal. Deze relatie geldt tussen twee formules van $\mathcal{P}$, indien deze uitwisselbaar zijn. Dergelijke formules worden equivalent genoemd.

4.1.4 Definitie **Equivalentie van formules**
Twee formules $A, B \in PROP$ noemt men equivalent*, notatie $A \approx B$, als geldt $\models A \leftrightarrow B$.*

Dus de equivalentie van twee formules A en B kan worden aangetoond door te bewijzen dat $A \leftrightarrow B$ een tautologie is. De relatie $\approx$ blijkt een speciaal soort relatie te zijn: een *equivalentierelatie*.

4.1.5 Definitie **Equivalentierelatie**
Een relatie $R \subseteq D \times D$ is een equivalentierelatie *dan en slechts dan als:*

1. *R* reflexief *is, ofwel voor alle $a \in D$ geldt aRa;*
2. *R* symmetrisch *is, ofwel voor alle $a, b \in D$ geldt: als aRb, dan bRa; en*
3. *R* transitief *is, ofwel voor alle $a, b, c \in D$ geldt: als aRb en bRc, dan aRc.*

4.1.6 VOORBEELD Equivalentierelatie.
Definieer de relatie $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ als volgt: xRy geldt dan en slechts dan als x en y na deling door 7 dezelfde rest hebben. Er geldt dan bijvoorbeeld $7R35$, $3R24$, en $18R25$. Ga zelf na dat deze relatie R een equivalentierelatie is.

4.1.7 STELLING *De relatie $\approx$ is een equivalentierelatie.*

BEWIJS Dit volgt onmiddellijk uit:

1. $\approx$ is reflexief, want voor elke $A \in PROP$ geldt $\models A \leftrightarrow A$, zodat $A \approx A$.
2. $\approx$ is symmetrisch, want voor alle $A, B \in PROP$ geldt

$$\begin{array}{ccccc} A \approx B & \Leftrightarrow & \models A \leftrightarrow B & \Leftrightarrow \\ \models B \leftrightarrow A & \Leftrightarrow & B \approx A. \end{array}$$

3. $\approx$ is transitief, want voor alle $A, B, C \in PROP$ geldt

$$\models A \leftrightarrow B \quad \& \quad \models B \leftrightarrow C \quad \Rightarrow \quad \models A \leftrightarrow C.$$

Waarmede de stelling is bewezen. ∎

4.1.8 VOORBEELD Equivalente formules.
De resultaten van stelling 4.1.3 kunnen ook in termen van de relatie $\approx$ worden geformuleerd. Dit levert bijvoorbeeld voor nummer 3 en 5:

1. $(A \wedge B) \approx \neg(\neg A \vee \neg B)$,
2. $(A \rightarrow B) \approx (\neg A \vee B)$. ∎

Voor het leveren van een bewijs is het soms nodig subformules van een formule te vervangen door andere formules. Dit vervangen noemt men naar analogie met de wiskunde *substitueren*. In feite hebben we tot nog toe stilzwijgend verondersteld hoe formules te substitueren voor metavariabelen. We zullen nu een geschikte notatie invoeren.

De substitutie van de formule C voor alle voorkomens van het propositiesymbool p in de formule A wordt genoteerd als $A[p{:=}C]$. Dat is dus de formule die men verkrijgt door alle voorkomens van p in A te vervangen door C. De substitutie-operatie voegt aan de formule A de formule $A[p{:=}C]$ toe en kan dus beschouwd worden als een functie $S^p_C : PROP \rightarrow PROP$ met als functiewaarde $S^p_C(A) = A[p{:=}C]$. We kunnen $[p{:=}C]$ ook opgevatten als een *postfixoperator*, een operator die ná zijn operand wordt geschreven.

4.1.9 Definitie **Substitutie**
Zij $A, B, C \in PROP$, en p en q propositiesymbolen. De substitutie-*operatie* $[p:=C]$ *is als volgt recursief gedefinieerd:*

$$\begin{array}{rcl} q[p:=C] & = & \begin{cases} C & \textit{als } q = p, \\ q & \textit{als } q \neq p, \end{cases} \\ (\neg A)[p:=C] & = & \neg\,(A[p:=C]), \\ (A \star B)[p:=C] & = & (A[p:=C]) \;\star\; (B[p:=C]). \end{array}$$

Merk op dat we in de definitie haakjes hebben moeten gebruiken om aan te geven wat het argument is voor de operator $[p:=C]$. Merk ook op dat we eigenlijk moeten aantonen dat $F[p:=C] \in PROP$ als gegeven is dat $F, C \in PROP$ en p een propositiesymbool is. We laten dit echter aan de lezer over.

4.1.10 Stelling **Substitutiestelling**
Voor alle formules $F, C, D \in PROP$ en propositiesymbolen p geldt:

$$C \approx D \quad \Rightarrow \quad F[p:=C] \approx F[p:=D].$$

Bewijs Het bewijs wordt geleverd met behulp van structurele inductie over $PROP$ met betrekking tot de formule F. Hiertoe onderscheiden we de volgende gevallen:

1. $F = q$ waarbij q een propositiesymbool is.

   (a) Als $q = p$, dan $F[p:=C] = C$ en $F[p:=D] = D$. Aangezien gegeven is dat $C \approx D$, volgt dat $F[p:=C] \approx F[p:=D]$.

   (b) Als $q \neq p$, dan $F[p:=C] = F[p:=D] = q$, zodat geldt $F[p:=C] \approx F[p:=D]$.

2. $F = \neg A$ voor zekere $A \in PROP$. De inductieveronderstelling luidt dat $A[p:=C] \approx A[p:=D]$. Dit betekent dat voor alle valuaties v geldt: $v(A[p:=C]) = v(A[p:=D])$. Hieruit volgt:

$$\begin{array}{rcl} v(F[p:=C]) & = & v(\neg(A[p:=C])), \\ & = & f_\neg(v(A[p:=C])), \\ & = & f_\neg(v(A[p:=D])), \\ & = & v(\neg(A[p:=D])), \\ & = & v(F[p:=D]), \end{array}$$

   zodat $F[p:=C] \approx F[p:=D]$.

3. $F = (A \star B)$ voor zekere $A, B \in PROP$. De inductieveronderstelling luidt dat $A[p{:=}C] \approx A[p{:=}D]$ en $B[p{:=}C] \approx B[p{:=}D]$. Dit betekent dat voor alle valuaties v het volgende geldt: $v(A[p{:=}C]) = v(A[p{:=}D])$ en $v(B[p{:=}C]) = v(B[p{:=}D])$. Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} v(F[p{:=}C]) &= v((A[p{:=}C]) \star (B[p{:=}C])), \\ &= f_\star(v(A[p{:=}C]), v(B[p{:=}C])), \\ &= f_\star(v(A[p{:=}D]), v(B[p{:=}D])), \\ &= v((A[p{:=}D]) \star (B[p{:=}D])), \\ &= v(F[p{:=}D]), \end{aligned}$$

zodat $F[p{:=}C] \approx F[p{:=}D]$.

Hiermede is de stelling bewezen. ∎

4.1.11 VOORBEELD Substitutie.
Zij $F = p \rightarrow q$, $C = q \rightarrow p$ en $D = \neg q \vee p$, zodat volgens stelling 4.1.3(5) geldt dat $C \approx D$. Uit de substitutiestelling volgt dat $F[p{:=}C] = (q \rightarrow p) \rightarrow q \approx (\neg q \vee p) \rightarrow q = F[p{:=}D]$. ∎

4.1.12 VOORBEELD Toepassing substitutie.
Zij $C = p \rightarrow q$ en $D = \neg p \vee q$, zodat volgens stelling 4.1.3(5) geldt dat $C \approx D$. Zij vervolgens $F = [(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow q)]$, en laat G verkregen zijn door in F het eerste en het derde voorkomen van C door D te vervangen. G is dus de formule $[(\neg p \vee q) \wedge p] \rightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \vee q)]$.

Door de substitutiestelling op een slimme wijze toe te passen, kan men laten zien dat $F \approx G$. Zij namelijk $M = [(r \wedge p) \rightarrow [(p \rightarrow q) \wedge r]$, en zij r een propositiesymbool dat verschillend is van p en q, dan volgt door toepassing van definitie 4.1.9 dat $F = M[r{:=}C]$ en $G = M[r{:=}D]$. De substitutiestelling is nu direct toepasbaar. ∎

Uit het bovenstaande voorbeeld blijkt hoe de substitutiestelling in de praktijk wordt gebruikt. Als men in een formule F een aantal voorkomens van een subformule C vervangt door een formule D waarvoor $D \approx C$, dan geldt voor de resulterende formule G dat $G \approx F$. Dit gebruik van de substitutiestelling wordt, naast het toepassen van een substitutie-operatie $[p{:=}C]$, ook *substitutie* genoemd.

4.2 Algebraïsche eigenschappen

Uit de wiskunde weten wij dat de operaties som, product en unaire min, bepaalde eigenschappen bezitten. Zo geldt bijvoorbeeld dat $--a = a$, $a+b = b+a$

en $a(b+c) = ab+ac$. Men noemt dergelijke eigenschappen *algebraïsch*. Ook de logische connectieven voldoen aan een aantal algebraïsche eigenschappen. In de volgende stelling staan de meest bekende bij elkaar.

4.2.1 STELLING *Voor alle $A, B, C \in PROP$ geldt:*

1. *Commutativiteit.*

   $(A \wedge B) \approx (B \wedge A)$,
   $(A \vee B) \approx (B \vee A)$.

2. *Associativiteit.*

   $A \wedge (B \wedge C) \approx (A \wedge B) \wedge C$,
   $A \vee (B \vee C) \approx (A \vee B) \vee C$.

3. *Distributiviteit.*

   $A \wedge (B \vee C) \approx (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$,
   $A \vee (B \wedge C) \approx (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.

4. *Wetten van De Morgan.*

   $\neg(A \wedge B) \approx (\neg A \vee \neg B)$,
   $\neg(A \vee B) \approx (\neg A \wedge \neg B)$.

5. *Idempotentie.*

   $(A \wedge A) \approx A$,
   $(A \vee A) \approx A$.

6. *Dubbele negatie.*

   $\neg\neg A \approx A$.

7. *Absorptie.*

   $(A \vee \neg A) \vee B \approx (A \vee \neg A)$,
   $(A \wedge \neg A) \wedge B \approx (A \wedge \neg A)$,
   $(A \vee \neg A) \wedge B \approx B$,
   $(A \wedge \neg A) \vee B \approx B$.

BEWIJS Als voorbeeld bewijzen we de tweede wet van De Morgan. De overige bewijzen laten we aan de lezer over. Voor alle valuaties v geldt:

$$\begin{aligned}
v(\neg(A \vee B)) = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad v(A \vee B) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad v(A) = v(B) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad v(\neg A) = v(\neg B) = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad v(\neg A \wedge \neg B) = 1.
\end{aligned}$$

Hieruit volgt $\models \neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$, zodat $\neg(A \vee B) \approx (\neg A \wedge \neg B)$. ∎

4.3 Normaalvormen

In de wiskunde definieert men voor vergelijkingen of formules vaak een standaardvorm. Zo'n standaardvorm noemt men ook wel een *normaalvorm*. Een bekend voorbeeld hiervan is de vierkantsvergelijking, waarvan de normaalvorm luidt: $ax^2 + bx + c = 0$.

Ook in de logica kent men normaalvormen van formules, onder andere de zogenaamde *conjunctieve normaalvorm* (CNV) en de *disjunctieve normaalvorm* (DNV). Het zal blijken dat men aan een formule in de conjunctieve normaalvorm gemakkelijk kan zien of deze een tautologie is en aan een formule in de disjunctieve normaalvorm of deze onvervulbaar is.

4.3.1 DEFINITIE **Normaalvormen**
Zij $F \in PROP$, dan zegt men dat:

1. *F in* conjunctieve normaalvorm *(CNV) staat als F de volgende vorm bezit:*

   $$C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_n,$$

   waarin iedere C_i $(1 \leq i \leq n)$ een disjunctie van literalen L_{ij} $(1 \leq j \leq m_i)$ is (zie definitie 2.2.2):

   $$C_i = L_{i1} \vee L_{i2} \vee \ldots \vee L_{im_i}.$$

   De formules C_i noemt men de conjunctieleden *van F.*

2. *F in* disjunctieve normaalvorm *(DNV) staat als F de volgende vorm bezit:*

   $$D_1 \vee D_2 \vee \ldots \vee D_n,$$

   waarin iedere D_i $(1 \leq i \leq n)$ een conjunctie van literalen L_{ij} $(1 \leq j \leq m_i)$ is:

   $$D_i = L_{i1} \wedge L_{i2} \wedge \ldots \wedge L_{im_i}.$$

   De formules D_i noemt men de disjunctieleden *van F.*

Merk op dat een formule F in CNV algemeen geldig is dan en slechts dan als ieder conjunctielid C_i een paar literalen p en $\neg p$ bevat (dit mag voor ieder conjunctielid een ander paar zijn). Analoog geldt: een formule F in DNV is onvervulbaar dan en slechts dan als ieder disjunctielid D_i een paar literalen p en $\neg p$ bevat.

4.3.2 Voorbeeld Formules in CNV.

1. $p \vee \neg p$,
2. $(p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg r)$.

De eerste formule is algemeen geldig, de tweede niet. ∎

4.3.3 Voorbeeld Formules in DNV.

1. $p \wedge \neg p$,
2. $(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg r)$,
3. $(p \wedge \neg p \wedge q) \vee (q \wedge \neg q \wedge r)$.

De eerste en de derde formule zijn onvervulbaar. De tweede formule is vervulbaar. Zo is bijvoorbeeld een valuatie v waarvoor $v(p) = v(q) = 1$ en $v(r) = 0$ een model. ∎

4.3.4 Stelling *Voor iedere formule $F \in PROP$ bestaat er een formule F^c in conjunctieve normaalvorm en een formule F^d in disjunctieve normaalvorm zodanig dat $F \approx F^c$ en $F \approx F^d$.*

Bewijs We zullen deze stelling bewijzen door te laten zien hoe een formule in conjunctieve normaalvorm kan worden omgezet. Deze methode kan eenvoudig worden aangepast om disjunctieve normaalvormen te verkrijgen.

CNV-algoritme

> Herschrijf iedere subformule van F onder gebruikmaking van de volgende equivalenties (van links naar rechts) totdat de formule in CNV staat:

$$\begin{array}{rcl}
A \rightarrow B & \approx & \neg A \vee B \\
\neg(A \rightarrow B) & \approx & A \wedge \neg B \\
\neg(A \wedge B) & \approx & \neg A \vee \neg B \\
\neg(A \vee B) & \approx & \neg A \wedge \neg B \\
A \leftrightarrow B & \approx & (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \\
\neg(A \leftrightarrow B) & \approx & \neg(A \rightarrow B) \vee \neg(B \rightarrow A) \\
\neg\neg A & \approx & A \\
A \vee (B \wedge C) & \approx & (A \vee B) \wedge (A \vee C) \\
(A \wedge B) \vee C & \approx & (A \vee C) \wedge (B \vee C)
\end{array}$$

Uit stelling 4.1.3 en de substitutiestelling (4.1.10) volgt dat iedere herschrijving met behulp van één van de bovenstaande equivalenties een formule oplevert die equivalent is met de oorspronkelijke. Verder is het niet moeilijk om in te zien dat dit algoritme altijd een CNV oplevert. Immers, als dat niet zo was, dan zou nog minstens éénmaal een herschrijving kunnen worden uitgevoerd. ∎

4.3.5 VOORBEELD Normaalvormen.

1. Een CNV van $p \to (q \to p)$ kan als volgt worden verkregen:

$$\begin{aligned} p \to (q \to p) &\approx p \to (\neg q \vee p), \\ &\approx \neg p \vee (\neg q \vee p), \\ &\approx p \vee \neg p \vee \neg q. \end{aligned}$$

   Merk op dat het resultaat ook in DNV staat.

2. Een DNV van $(p \vee \neg q) \to r$ kan als volgt worden verkregen:

$$\begin{aligned} (p \vee \neg q) \to r &\approx \neg (p \vee \neg q) \vee r, \\ &\approx (\neg p \wedge \neg\neg q) \vee r, \\ &\approx (\neg p \wedge q) \vee r. \end{aligned}$$

   Om deze formule in CNV te krijgen moet nog de volgende herschrijving worden uitgevoerd:

$$(\neg p \wedge q) \vee r \approx (\neg p \vee r) \wedge (q \vee r). \qquad \blacksquare$$

4.4 Opgaven

1. Bewijs dat de relatie R uit voorbeeld 4.1.6 inderdaad een equivalentierelatie is.

2. Bewijs de gevallen 3, 4(a) en 7 van stelling 4.2.1.

3. Zij $A, B \in PROP$. Ga voor elk van de volgende metabeweringen na of deze juist dan wel onjuist is. Geef in het eerste geval een bewijs; geef in het tweede geval voorbeelden van proposities A en B waarvoor de bewering onjuist is.

   (a) $\models A \wedge B \quad \Rightarrow \quad \models A \quad \& \quad \models B$.

   (b) $\models \neg A \quad \Rightarrow \quad \sim \models A$.

(c) $\sim\ \models A \quad \Rightarrow \quad \models \neg A$.

(d) $\models A \quad \bigvee \quad \models B \quad \Rightarrow \quad \models A \vee B$.

(e) $\models A \to B \quad \Rightarrow \quad [\ \models A \quad \Rightarrow \quad \models B\ ]$.

(f) $[\ \models A \quad \Rightarrow \quad \models B\ ] \quad \Rightarrow \quad \models A \to B$.

(g) $\models A \vee B \quad \& \quad \sim\ \models A \quad \Rightarrow \quad \models B$.

(h) $\models A \vee B \quad \& \quad \models \neg A \quad \Rightarrow \quad \models B$.

(i) $\models A \quad \Rightarrow \quad \models A \to A$.

(j) $\models A \vee \neg A \quad \Rightarrow \quad \models A$.

(k) $A \models (B \to A) \quad \Leftrightarrow \quad B \models (A \to A)$.

4. Geef het algoritme om formules in DNV te brengen.

5. Zij A, B, C, D propositiesymbolen. Breng de volgende formules in DNV en CNV.

   (a) $A \to (A \wedge B)$.

   (b) $(A \wedge B) \to C$.

   (c) $(\neg A \to B) \to (C \to \neg D)$.

   (d) $A \to (B \to (C \leftrightarrow \neg D))$.

6. Hoe kan men aan een formule in CNV zien of deze een tautologie is? En hoe kan men aan een formule in DNV zien of deze niet vervulbaar is?