Hoofdstuk 5

De Boommethode voor de Propositielogica

In dit hoofdstuk behandelen we een methode waarmee op een effectieve wijze kan worden nagegaan of een redenering logisch geldig is. Deze methode staat bekend als de *boommethode* en is een variant van de zogenaamde *tableaumethode* van de Nederlandse logicus E.W. Beth. De boommethode is een *semantische* methode, waarmee wordt bedoeld dat deze is gebaseerd op semantische concepten.

In §5.1 behandelen we de theorie waarop de boommethode is gebaseerd, en in §5.2 wordt de methode zelf uit de doeken gedaan.

5.1 De onderbouwing van de boommethode

De boommethode is een methode waarmee men kan nagaan of een formule F het logisch gevolg is van een verzameling formules Γ. De eerste stelling in deze paragraaf reduceert deze vraag tot het onvervulbaar zijn van de verzameling $\Gamma \cup \{\neg F\}$ (stelling 5.1.1). Met behulp van de stellingen die hierop volgen, kan het probleem van de onvervulbaarheid van een verzameling complexe formules worden gereduceerd tot de vraag van het onvervulbaar zijn van verzameling(en) van meer eenvoudige formules (corollarium 5.1.5).

5.1.1 Stelling *Zij $\Gamma \subseteq PROP$ en $F \in PROP$, dan geldt:*

$$\Gamma \models F \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma \cup \{\neg F\} \text{ is niet vervulbaar.}$$

Bewijs

($\Rightarrow$) Zij v een valuatie. Dan zijn er twee mogelijkheden:

- Er is een $A \in \Gamma$ met $v(A) = 0$. Maar dan is v zeker geen model voor $\Gamma \cup \{\neg F\}$.

- Voor alle $A \in \Gamma$ is $v(A) = 1$, ofwel v is een model voor Γ. Uit $\Gamma \models F$ volgt nu dat v ook een model is voor F. Dit betekent dat $v(\neg F) = 0$ en dat wederom v geen model is voor $\Gamma \cup \{\neg F\}$.

Hieruit volgt dat geen enkele v een model is voor $\Gamma \cup \{\neg F\}$, zodat deze verzameling onvervulbaar is.

($\Leftarrow$) Zij v een model voor Γ. In combinatie met het gegeven dat $\Gamma \cup \{\neg F\}$ onvervulbaar is, levert dit $v(\neg F) = 0$. Dit betekent dat $v(F) = 1$, zodat v een model is voor F. We concluderen dat $\Gamma \models F$. ■

De bovenstaande stelling geeft ons een methode om na te gaan of $\Gamma \models F$. Deze methode luidt: Ga na of de verzameling $\Gamma \cup \{\neg F\}$ vervulbaar is. Is de verzameling *niet* vervulbaar, dan geldt inderdaad $\Gamma \models F$. Is deze verzameling *wel* vervulbaar, dan geldt *niet* $\Gamma \models F$.

Om te bepalen of een verzameling vervulbaar is, komen de volgende stellingen van pas. Deze vertellen ons precies wanneer een valuatie v een gegeven verzameling formules vervult, of, anders gezegd, wanneer v een model is voor die verzameling. In deze stellingen wordt dit probleem herleid tot de vraag of v een verzameling (of verzamelingen) van meer eenvoudige formules vervult.

5.1.2 STELLING *Zij $\Gamma \subseteq PROP$, $A, B \in PROP$ en $A \approx B$. Zij verder v een valuatie. Dan geldt:*

$$v \textit{ vervult } \Gamma \cup \{A\} \quad \Leftrightarrow \quad v \textit{ vervult } \Gamma \cup \{B\}.$$

BEWIJS

($\Rightarrow$) Stel v vervult $\Gamma \cup \{A\}$. Dit betekent dat $v(A) = 1$ en $v(F) = 1$ voor alle $F \in \Gamma$. Aangezien $A \approx B$, volgt hieruit dat ook $v(B) = 1$. Derhalve is v een model voor $\Gamma \cup \{B\}$.

($\Leftarrow$) Op dezelfde wijze. ■

5.1.3 STELLING *Zij $\Gamma \subseteq PROP$ en $A, B \in PROP$. Zij verder v een valuatie. Dan geldt:*

$$v \textit{ vervult } \Gamma \cup \{A \vee B\} \quad \Leftrightarrow \quad v \textit{ vervult } \Gamma \cup \{A\} \textit{ of } \Gamma \cup \{B\}.$$

BEWIJS

($\Rightarrow$) Stel v vervult $\Gamma \cup \{A \vee B\}$. Dit betekent dat $v(A \vee B) = 1$ en $v(F) = 1$ voor alle $F \in \Gamma$. Hieruit volgt dat $v(A) = 1$ of $v(B) = 1$. Derhalve, is v een model voor $\Gamma \cup \{A\}$ of $\Gamma \cup \{B\}$.

($\Leftarrow$) Omgekeerd, als v een model is voor $\Gamma \cup \{A\}$ of $\Gamma \cup \{B\}$, dan geldt dat $v(F) = 1$ voor alle $F \in \Gamma$, en dat $v(A) = 1$ of $v(B) = 1$. Uit het laatste volgt dat $v(A \vee B) = 1$. Derhalve is v een model voor $\Gamma \cup \{A \vee B\}$. ∎

Het bewijs van de volgende stelling, dat volkomen analoog is aan het bewijs van de stellingen 5.1.2 en 5.1.3, wordt aan de lezer overgelaten.

5.1.4 STELLING *Zij $\Gamma \subseteq PROP$ en $A, B \in PROP$. Zij verder v een valuatie. Dan geldt:*

$$v \textit{ vervult } \Gamma \cup \{A \wedge B\} \quad \Leftrightarrow \quad v \textit{ vervult } \Gamma \cup \{A, B\}.$$

Uit de stellingen 5.1.2, 5.1.3 en 5.1.4 volgt direct wanneer een verzameling formules *onvervulbaar* is. De resultaten zijn bijeen gezet in het volgende corollarium.

5.1.5 COROLLARIUM *Zij $\Gamma \subseteq PROP$, $A, B, C, D \in PROP$ en $A \approx B$. Dan geldt:*

1. $\Gamma \cup \{A\}$ *is onvervulbaar* $\Leftrightarrow$ $\Gamma \cup \{B\}$ *is onvervulbaar.*
2. $\Gamma \cup \{C \vee D\}$ *is onvervulbaar* $\Leftrightarrow$ $\Gamma \cup \{C\}$ *en* $\Gamma \cup \{D\}$ *zijn beide onvervulbaar.*
3. $\Gamma \cup \{C \wedge D\}$ *is onvervulbaar* $\Leftrightarrow$ $\Gamma \cup \{C, D\}$ *is onvervulbaar.*

5.1.6 VOORBEELD Vervulbare en onvervulbare verzamelingen.

1. De verzameling $\{p, \neg p\}$ is onvervulbaar.
2. De verzameling $\{p, q, r\}$ wordt vervuld door een valuatie v waarvoor $v(p) = v(q) = v(r) = 1$.
3. De verzameling $\Gamma = \{p \to q, q, r\}$ is vervulbaar. Door toepassing van de stellingen uit deze paragraaf kan dit op systematische wijze worden geverifieerd. Zie hiervoor figuur 5.1. Het plaatje kan als volgt worden gelezen. Γ is vervulbaar dan en slechts dan als Γ_1 vervulbaar is (stelling 5.1.2). Γ_1, op haar beurt, is vervulbaar dan en slechts dan als Γ_2 of Γ_3 vervulbaar is (stelling 5.1.3). Nu wordt Γ_2 vervuld door een valuatie v waarvoor $v(p) = 0$, $v(q) = 1$ en $v(r) = 1$. Hieruit volgt dus dat Γ vervuld wordt door v. Echter, ook Γ_3 is vervulbaar. Neem bijvoorbeeld een valuatie w waarvoor $w(q) = w(r) = 1$. Dit alles betekent dat Γ vervuld wordt door v en door w.

$$\Gamma = \{p \rightarrow q, q, r\}$$
$$\Gamma_1 = \{\neg p \vee q, q, r\}$$

of

$\Gamma_2 = \{\neg p, q, r\}$ vervulbaar

$\Gamma_3 = \{q, r\}$ vervulbaar

Figuur 5.1: $\Gamma = \{p \rightarrow q, q, r\}$ is vervulbaar.

$$\Gamma = \{p \rightarrow q, q \rightarrow r, \neg(p \rightarrow r)\}$$
$$\Gamma_1 = \{\neg p \vee q, q \rightarrow r, \neg(p \rightarrow r)\}$$
$$\Gamma_2 = \{\neg p \vee q, \neg q \vee r, \neg(p \rightarrow r)\}$$
$$\Gamma_3 = \{\neg p \vee q, \neg q \vee r, p \wedge \neg r\}$$
$$\Gamma_4 = \{\neg p \vee q, \neg q \vee r, p, \neg r\}$$

of

$\Gamma_5 = \{\neg p, \neg q \vee r, p, \neg r\}$ niet vervulbaar

$\Gamma_6 = \{q, \neg q \vee r, p, \neg r\}$

of

$\Gamma_7 = \{q, \neg q, p, \neg r\}$ niet vervulbaar

$\Gamma_8 = \{q, r, p, \neg r\}$ niet vervulbaar

Figuur 5.2: $\Gamma = \{p \rightarrow q, q \rightarrow r, \neg(p \rightarrow r)\}$ is niet vervulbaar.

4. Bewijs dat $p \to q, q \to r \models p \to r$. Wegens stelling 5.1.1 volstaat het om te laten zien dat de verzameling $\Gamma = \{p \to q, q \to r, \neg(p \to r)\}$ niet vervulbaar is. In figuur 5.2 is de bijbehorende boom weergegeven. Uit dit plaatje blijkt dat de verzamelingen Γ_7 en Γ_8 beide niet vervulbaar zijn. Maar dan is de verzameling Γ_6 ook niet vervulbaar. Aangezien Γ_5 niet vervulbaar is, moet vervolgens Γ_4 eveneens onvervulbaar zijn. Dit betekent echter dat de verzamelingen Γ_3, Γ_2, Γ_1 en Γ dan ook niet vervulbaar zijn. Hieruit volgt $p \to q, q \to r \models p \to r$. ■

Uit voorbeeld 5.1.6 blijkt, dat men voor de beantwoording van de vraag 'Is Γ vervulbaar?' de formules uit Γ of uit de hieruit afgeleide verzamelingen, systematisch afbreekt tot literalen. Gedurende dit 'afbraakproces' worden verzamelingen door andere verzamelingen vervangen die slechts in één of twee formules verschillen van de oorspronkelijke. Het proces stopt als alle verkregen verzamelingen onvervulbaar zijn of als geen enkele verzameling verder afbreekbaar is. De oorspronkelijke verzameling is onvervulbaar als alle verkregen verzamelingen onvervulbaar zijn, en vervulbaar als minstens één van deze verzamelingen vervulbaar is. Deze methode om na te gaan of een eindige verzameling Γ vervulbaar is of niet, zullen we nu precies omschrijven:

1. Pas stelling 5.1.2 net zo vaak toe als het mogelijk is één van de volgende formules links te vervangen door de ermee equivalente formule rechts:

$$\begin{aligned}
\neg(A \wedge B) &\approx \neg A \vee \neg B,\\
\neg(A \vee B) &\approx \neg A \wedge \neg B,\\
A \to B &\approx \neg A \vee B,\\
\neg(A \to B) &\approx A \wedge \neg B,\\
A \leftrightarrow B &\approx (A \to B) \wedge (B \to A),\\
\neg(A \leftrightarrow B) &\approx \neg(A \to B) \vee \neg(B \to A).
\end{aligned}$$

2. Pas zo vaak als mogelijk de stellingen 5.1.3 en 5.1.4 toe. Bij toepassing van stelling 5.1.3 ontstaat een *vertakking*.

3. Herhaal de stappen 1 en 2 totdat iedere verkregen verzameling een paar complementaire formules F en $\neg F$ bevat, of slechts uit literalen bestaat.

4. Als alle verkregen verzamelingen een paar complementaire formules bevatten, dan is Γ onvervulbaar. Als een verkregen verzameling Γ_i geen complementaire formules bevat en alleen uit literalen bestaat, dan is een valuatie v waarvoor $v(A) = 1$ voor alle $A \in \Gamma_i$ een model voor Γ.

$\neg$-regel	$\wedge$-regels		$\vee$-regels	
$\neg\neg A$ $\vdots$ $\boldsymbol{A}$	$A \wedge B$ $\vdots$ $\boldsymbol{A}$ $\boldsymbol{B}$	$\neg(A \wedge B)$ $\vdots$ $\neg\boldsymbol{A} \vee \neg\boldsymbol{B}$	$A \vee B$ $\vdots$ $\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{B}$	$\neg(A \vee B)$ $\vdots$ $\neg\boldsymbol{A} \wedge \neg\boldsymbol{B}$

$\rightarrow$-regels		$\leftrightarrow$-regels	
$A \rightarrow B$ $\vdots$ $\neg\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}$	$\neg(A \rightarrow B)$ $\vdots$ $\boldsymbol{A} \wedge \neg\boldsymbol{B}$	$A \leftrightarrow B$ $\vdots$ $\boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B}$ $\boldsymbol{B} \rightarrow \boldsymbol{A}$	$\neg(A \leftrightarrow B)$ $\vdots$ $\neg(\boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B}) \vee \neg(\boldsymbol{B} \rightarrow \boldsymbol{A})$

Tabel 5.1: De regels van de *boommethode*.

Het is evident dat dit proces altijd in een eindig aantal stappen stopt. Immers, door bovenstaande methode worden alle formules in Γ —dit zijn er eindig veel— afgebroken tot literalen. Als dit is gebeurd, zijn de stappen 1 en 2 hierboven niet meer toepasbaar, zodat het proces termineert. Men zegt daarom dat de vraag 'Is Γ vervulbaar?' *beslisbaar* is.

5.2 Hoe men bomen maakt

In de vorige paragraaf hebben we gezien hoe we met behulp van de stellingen 5.1.2, 5.1.3 en 5.1.4 stelselmatig en in een eindig aantal stappen kunnen nagaan of een gegeven eindige verzameling $\Gamma \subset PROP$ vervulbaar of onvervulbaar is. De methode is notationeel echter nogal omslachtig: iedere keer dat een verzameling wordt vervangen door een of twee andere verzamelingen worden alle formules, behalve de formule die wordt afgebroken, ongewijzigd overgenomen. De *boommethode* die in deze paragraaf zal worden beschreven, heeft dit bezwaar niet. In feite is het een handiger manier om het stelsel verzamelingen in het afbraakproces uit de vorige paragraaf te noteren.

Bij de boommethode worden voor het afbreken van de formules uit de verzameling Γ de regels uit tabel 5.1 gebruikt. Deze regels dient men van boven naar beneden te lezen. De eerste formule in elke regel duidt de *premisse* aan, terwijl de overige formules, die vet zijn gedrukt, de *conclusies* zijn. Voor A en B dient men daarbij formules uit $PROP$ te lezen. De premisse van een regel geeft aan op welke formules men de regel mag toepassen. Wil men dus bijvoorbeeld de $\neg$-regel toepassen op een zekere formule F, dan dient F de formule $\neg\neg A$ te zijn voor zekere $A \in PROP$. Het resultaat van de toepassing van die regel is dan de formule A. Het is *niet* toegestaan om een regel toe te passen op echte subformules van een formule. Zo is de $\neg$-regel niet van toepassing op de formule $\neg\neg A \wedge B$ omdat hierin $\neg\neg A$ een echte subformule is. Wel is de eerste $\wedge$-regel in dit geval toepasbaar, met als conclusies $\neg\neg A$ en B.

In feite geven de regels bijzondere gevallen van de stellingen 5.1.2, 5.1.3 en 5.1.4 weer. Een toepassing van de tweede $\wedge$-regel komt bijvoorbeeld neer op het toepassen van stelling 5.1.2, waarbij men voor 'A' de formule $\neg(A \wedge B)$ neemt en voor 'B' het daarmee equivalente $\neg A \vee \neg B$. Wat de verzameling 'Γ' hierbij is, wordt in het midden gelaten. Het doet er ook niet toe, want de formules in deze verzameling veranderen niet bij toepassing van de stelling.

Op analoge manier kan men de $\neg$-regel, de tweede $\vee$-regel, de $\rightarrow$-regels en de tweede $\leftrightarrow$-regel lezen. De eerste $\wedge$-regel en de eerste $\leftrightarrow$-regel zijn gebaseerd op stelling 5.1.4, terwijl de eerste $\vee$-regel op stelling 5.1.3 is terug te voeren. Deze laatste regel geeft aanleiding tot een *vertakking* die volkomen vergelijkbaar is met de 'of'-vertakkingen die men in de figuren 5.1 en 5.2 aantreft.

Bij toepassing van de boommethode worden de formules uit de verzameling Γ onder elkaar geplaatst en vervolgens met behulp van de regels uit figuur 5.1 afgebroken, totdat er geen enkele regel meer toepasbaar is. Indien de eerste $\vee$-regel wordt toegepast op een formule van de vorm $A \vee B$, ontstaat er een vertakking, waarbij de formule A links, en de formule B rechts onder de vertakking geplaatst dient te worden. Op deze wijze ontstaat er een *boom*, waarvan de bovenste formule de *wortel* van de boom wordt genoemd. Formules onderaan de boom die geen afstammelingen bezitten, noemt men de *bladeren* van de boom. Een *tak* van de boom is een pad dat bij de wortel begint en eindigt bij een blad, zodanig dat iedere knoop op dat pad slechts één keer wordt gepasseerd.

Als dan iedere tak van de aldus geconstrueerde boom een paar complementaire formules F en $\neg F$ bevat, dan is de oorspronkelijke verzameling Γ onvervulbaar. In dit geval zegt men dat de boom *sluit*. Als er echter een tak bestaat die geen paar complementaire formules bevat, dan is Γ wél vervulbaar. Zo'n tak, waarvan we zeggen dat hij niet sluit of *open* blijft, bevat dan alle informatie die nodig is om een model voor Γ te construeren. Een valuatie v waarvoor $v(A) = 1$ voor alle literalen A in de open blijvende tak is dan namelijk een model voor Γ. Indien een propositiesymbool p of zijn ontkenning niet voorkomt in deze tak, dan kan $v(p)$ willekeurig worden gekozen.

De boommethode kan nu als volgt worden gebruikt om de geldigheid van een redenering van de vorm $\Gamma, \therefore F$ te testen:

1. $p \rightarrow q$	(gegeven)
2. q	(gegeven)
3. r	(gegeven)
4. $\neg p \vee q$	($\rightarrow$-regel,1)

(4)

5. $\neg p$ 6. q

Figuur 5.3: Een boom voor $\Gamma = \{p \rightarrow q, q, r\}$.

- Ga na of de verzameling $\Gamma \cup \{\neg F\}$ vervulbaar is door een boom te construeren.
- Sluiten alle takken van de boom doordat deze een paar complementaire formules bevatten, dan is de verzameling niet vervulbaar, hetgeen betekent dat de gegeven redenering logisch geldig is (stelling 5.1.1).
- Is er een tak die open blijft en zijn alle mogelijkheden om regels toe te passen uitgeput, dan is de verzameling $\Gamma \cup \{\neg F\}$ vervulbaar en levert de betreffende tak een model voor deze verzameling. Dit model is dan een *tegenvoorbeeld* voor de gegeven redenering.

Aan de hand van een aantal voorbeelden zullen we dit alles toelichten. We introduceren eerst nog een nieuwe notatie. Met $B(\Gamma)$ zullen we in het vervolg een boom voor Γ aanduiden. Aangezien er bij een verzameling meerdere verschillende bomen geconstrueerd kunnen worden —afhankelijk van de volgorde waarin de regels worden toegepast—, is $B(\Gamma)$ een metavariabele waarvan de waarden bomen voor Γ zijn.

5.2.1 VOORBEELD $\Gamma = \{p \rightarrow q, q, r\}$ is vervulbaar.
In figuur 5.3 is een boom voor de verzameling Γ weergegeven. Merk op dat de formules uit de verzamelingen Γ_i behorende bij de boom uit figuur 5.1 hier 'verticaal' als labels bij de knopen genoteerd zijn. Geen van de takken van de boom bevat een paar complementaire formules, zodat de boom $B(\Gamma)$ niet sluit.

Om een model voor Γ te verkrijgen 'lezen' we een open blijvende tak af. Met iedere open blijvende tak correspondeert een (mogelijk verschillend) model.

Een valuatie v is zo'n model, als deze zo gekozen is dat $v(A) = 1$ voor alle literalen A in een open blijvende tak van $B(\Gamma)$.

De boom in dit voorbeeld heeft twee open blijvende takken. Aflezen van de linker tak levert op dat een valuatie v waarbij $v(p) = 0$ en $v(q) = v(r) = 1$, een model is voor Γ. Ook de rechter tak levert een model: een valuatie w waarvoor $w(q) = w(r) = 1$ (hierbij is $w(p)$ vrij te kiezen). Uit het bovenstaande volgt dat —in dit voorbeeld— een model voor de formules in de linker tak tevens een model is voor de formules in de rechter tak.

Merk op dat alle formules in de boom *geannoteerd* zijn. Zo verwijst de annotatie ($\rightarrow$-regel,1) op regel 4 naar een toepassing van de eerste $\rightarrow$-regel op de formule op regel 1. De vermelding '(4)' onder de vertakking verwijst naar een toepassing van de eerste $\vee$-regel op de formule op regel 4. ∎

5.2.2 VOORBEELD $p \rightarrow q, q \rightarrow r \models p \rightarrow r$
We zullen dit aantonen door met behulp van de boommethode te laten zien dat de verzameling $\Gamma = \{p \rightarrow q, q \rightarrow r, \neg(p \rightarrow r)\}$ onvervulbaar is (zie ook voorbeeld 5.1.6). De boom $B(\Gamma)$ is weergegeven in figuur 5.4. Alle takken van $B(\Gamma)$ sluiten. Dit is hier aangegeven door $\mathbf{X}(m, n)$, hetgeen betekent dat de betreffende tak sluit op de formules met de nummers m en n. Hieruit volgt dat $\Gamma = \{p \rightarrow q, q \rightarrow r, \neg(p \rightarrow r)\}$ onvervulbaar is, zodat $p \rightarrow q, q \rightarrow r \models p \rightarrow r$. Vergelijk de boom $B(\Gamma)$ met de boom in figuur 5.2! ∎

5.2.3 VOORBEELD *niet* $\models (p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$.
We laten zien hoe met behulp van de boommethode een tegenvoorbeeld voor de uitspraak $\models (p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$ verkregen kan worden. De boom in figuur 5.5 laat zien dat de verzameling $\Gamma = \{\neg[(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)]\}$ vervulbaar is. Geen van de takken van de boom $B(\Gamma)$ sluit. Een valuatie v die een model is voor Γ lezen we bijvoorbeeld af uit de linker tak: $v(p) = 0$ en $v(q) = 1$ (de rechter tak geeft dezelfde valuatie). Hiermee is bewezen dat *niet* $\models (p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$. ∎

Uit het voorafgaande kan de volgende stelling voor de boommethode worden afgeleid.

5.2.4 STELLING *Voor iedere eindige niet-lege verzameling* $\Gamma \subset PROP$ *geldt:*

$$\Gamma \textit{ is onvervulbaar} \quad \Leftrightarrow \quad \textit{iedere boom } B(\Gamma) \textit{ sluit.}$$

Dit betekent dat als één der takken van een boom $B(\Gamma)$ niet sluit, de verzameling Γ vervulbaar is. Het maakt ook niet uit in welke volgorde men de regels van de boommethode toepast bij het construeren van een boom; alleen is de ene manier bewerkelijker dan de andere. Over het algemeen verkrijgt men de eenvoudigste boom door het toepassen van de $\vee$-regel, waarbij een vertakking optreedt, zolang mogelijk uit te stellen.

1. $p \to q$	(hypothese 1)
2. $q \to r$	(hypothese 2)
3. $\neg(p \to r)$	($\neg$ conclusie)
4. $\neg p \vee q$	($\to$-regel,1)
5. $\neg q \vee r$	($\to$-regel,2)
6. $p \wedge \neg r$	($\to$-regel,3)
7. p	($\wedge$-regel,6)
8. $\neg r$	($\wedge$-regel,6)

(4)

9. $\neg p$ — **X**(7,9)

10. q

(5)

11. $\neg q$ — **X**(10,11)

12. r — **X**(8,12)

Figuur 5.4: $p \to q, q \to r \models p \to r$.

1. $\neg[(p \to q) \to (q \to p)]$	($\neg$ conclusie)
2. $(p \to q) \wedge \neg(q \to p)$	($\to$-regel,1)
3. $p \to q$	($\wedge$-regel,2)
4. $\neg(q \to p)$	($\wedge$-regel,2)
5. $q \wedge \neg p$	($\to$-regel,4)
6. q	($\wedge$-regel,5)
7. $\neg p$	($\wedge$-regel,5)
8. $\neg p \vee q$	($\to$-regel,3)

(8)

9. $\neg p$ 10. q

Figuur 5.5: $\Gamma = \{\neg[(p \to q) \to (q \to p)]\}$ is vervulbaar.

5.3 Opgaven

1. Zij $A, B, C, D \in PROP$. Bewijs met de boommethode dat:

   (a) $A,\ (A \wedge \neg B) \to C,\ \neg(A \wedge C) \models B$.

   (b) $\neg A \leftrightarrow (B \wedge C), A \wedge C \models \neg B$.

   (c) $A \leftrightarrow (\neg B \vee \neg C), \neg(A \to \neg C) \models \neg B$.

   (d) $A \to ((B \to C) \to D), \neg(A \to D) \models \neg(B \to C)$.

   (e) $(A \wedge B) \to C, \neg A \vee (A \to B) \models A \to C$.

   (f) $(A \to \neg C) \vee (A \to B), C \to A \models C \to B$.

2. Ga voor elk van de onderstaande metabeweringen na of deze juist dan wel onjuist is. Geef in het eerste geval een bewijs met behulp van de boommethode. Construeer in het tweede geval een *tegenvoorbeeld*. Gegeven is dat $A, B, C, D, E \in PROP$.

   (a) $A \to B, \neg C \to B \models A \to C$.

   (b) $\models ((A \vee (A \to B)) \to B) \to B$.

   (c) $(A \wedge B) \to D, \neg(D \to E), B \vee E \models \neg A$.

   (d) $\neg A \to A \models A$.

(e) $\models (A \vee B) \rightarrow (A \wedge B)$.

(f) $\neg A, A \models B$.

3. Vertaal de volgende redeneringen naar *propositielogica* en ga met behulp van de boommethode na of deze logisch geldig zijn of niet. Produceer in het laatste geval ook een tegenvoorbeeld.

   (a) *Als Tom nuchter is, dan handelt hij rationeel maar hij is dan wel oninteressant.*
   Als hij beleefd en oninteressant is, dan vindt Sylvia hem niet aardig.
   Dus, als Tom nuchter en beleefd is, dan vindt Sylvia hem niet aardig.

   (b) *Als Anton lid wordt van de Nederlandse Vereniging van Terraszitters, dan worden Bob en Cees dat ook.*
   Als Anton of Bob lid wordt, dan zal David zijn lidmaatschap opzeggen.
   Dus zal David zijn lidmaatschap opzeggen, ongeacht of Cees nou lid wordt of niet.

   (c) *Je kunt Hans geloven als je Bert kunt geloven, en omgekeerd.*
   Als je noch Hans, noch Bert kunt geloven, dan kun je ook Greetje niet geloven.
   Je kunt Greetje geloven.
   Dus kun je Bert geloven.