Hoofdstuk 6

Natuurlijke Deductie volgens Fitch

In de vorige hoofdstukken is de propositielogica hoofdzakelijk vanuit een semantisch standpunt beschouwd. De sleutelconcepten hierbij waren *valuatie*, *model*, *tautologie* en *logisch gevolg*. In de semantiek van de logica is echter het trekken van een conclusie uit gegeven premissen, zo kenmerkend voor het menselijk wiskundig redeneren, nauwelijks herkenbaar.

De methode van de *natuurlijke deductie* is een formele opbouw van de logica, waarin het trekken van conclusies uit premissen centraal staat. Deze methode is voor het eerst formeel beschreven door de Duitse logicus G. Gentzen (1934). In dit hoofdstuk zullen we het natuurlijke deductiesysteem van F.B. Fitch (1952), in het vervolg aangeduid als *systeem* $\mathcal{F}$, bespreken.

De volgende onderwerpen zullen aan de orde komen: de afleidingsregels van systeem $\mathcal{F}$ en het begrip 'afleiding' (§6.1), afleidingsstrategieën en voorbeelden van afleidingen (§6.2), en uitbreidingen van het systeem van Fitch (§6.3).

6.1 Afleidingsregels en afleidingen

Het systeem $\mathcal{F}$ is zuiver syntactisch, hetgeen wil zeggen dat het alleen gaat om de *vorm* van de formules. Er behoeft dus geen beroep gedaan te worden op het waarheidsbegrip, zoals in het vorige hoofdstuk. Een karakterisering van het systeem $\mathcal{F}$ omvat een opsomming van de zogenaamde *afleidingsregels* die gebruikt mogen worden, en een definitie die vastlegt wat onder een *afleiding* wordt verstaan. Om een intuïtief idee te krijgen wat een afleiding in systeem $\mathcal{F}$ is, bekijken we een voorbeeld. Stel we willen de volgende uitspraak bewijzen:

> Indien geldt als het regent dan wordt de straat nat en de straat wordt niet nat, dan regent het niet.

Deze uitspraak kunnen we vertalen als $[(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \rightarrow \neg p$. De afleiding van deze formule in het systeem $\mathcal{F}$ staat in figuur 6.1. De redenering die door deze afleiding wordt weergegeven, kan als volgt worden geparafraseerd.

1.	$(p \rightarrow q) \wedge \neg q$	(hypothese 1)
2.	$\quad p$	(hypothese 2)
3.	$\quad (p \rightarrow q) \wedge \neg q$	(rei,1)
4.	$\quad p \rightarrow q$	($\wedge$-elim,3)
5.	$\quad q$	($\rightarrow$-elim,2,4)
6.	$\quad \neg q$	($\wedge$-elim,3)
7.	$\neg p$	($\neg$-intro,2,5,6)
8.	$[(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \rightarrow \neg p$	($\rightarrow$-intro,1,7)

Figuur 6.1: Afleiding van $[(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \rightarrow \neg p$.

1. Stel: als het regent wordt de straat nat, en de straat wordt niet nat; ofwel $(p \rightarrow q) \wedge \neg q$. We willen dan laten zien dat het niet regent, ofwel $\neg p$.

2. Neem vervolgens aan dat het regent, ofwel p. De bedoeling is om te laten zien dat deze aanname fout is door er een tegenspraak uit af te leiden.

3. Omdat we in 1 hebben gesteld dat $(p \rightarrow q) \wedge \neg q$ het geval is, mogen we dat onder de additionele aanname 2 nog steeds aannemen.

4. Maar dan geldt als het regent wordt de straat nat, ofwel $p \rightarrow q$.

5. Aangezien we p hebben gesteld in 2, en we in 4 zagen dat $p \rightarrow q$ het geval is, leiden we af dat de straat nat wordt: q.

6. Uit 3 volgt ook dat de straat niet nat wordt: $\neg q$.

7. Nu bevinden we ons in de situatie dat we uit aanname 2 dat p geldt, tegenstrijdige zaken hebben afgeleid, te weten q (in 5) en $\neg q$ (in 6). Dit betekent dat de genoemde aanname verkeerd moet zijn geweest, zodat we concluderen dat het niet regent: $\neg p$. We hebben nu aanname 2 weerlegd!

8. Al redenerende hebben we uit aanname 1 dat $(p \rightarrow q) \wedge \neg q$ het geval is, afgeleid dat $\neg p$ het geval moet zijn (zie 7). Dit betekent dat moet gelden $[(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \rightarrow \neg p$. Het bewijs is voltooid.

Merk op dat de afleiding in figuur 6.1 er veel overzichtelijker uitziet dan haar geparafraseerde versie. De verticale strepen in de figuur geven aan hoe lang een aanname aktief is. De horizontale streep behorende bij een verticale streep markeert de aanname. Zo is de aanname dat p het geval is, aktief in de regels met de nummers 2 tot en met 6. De aanname dat $(p \rightarrow q) \wedge \neg q$ het geval is,

is het langst aktief: in de regels met de nummers 1 tot en met 7. In regel 8 is deze aanname dus niet langer geldig. Het resultaat $[(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \rightarrow \neg p$ geldt onvoorwaardelijk. De aannamen 1 en 2 zijn alleen maar tussentijdse aannamen die in het bewijs worden gebruikt. Een andere eigenschap van de afleiding is dat iedere formule ofwel een aanname is, ofwel verkregen is uit eerdere formules door toepassing van een zogenaamde *afleidingsregel* (zie verderop in deze paragraaf). Op dit moment volstaan we met op te merken dat een afleidingsregel een redeneerwijze formaliseert. Voor de duidelijkheid zijn alle formules uit de afleiding *geannoteerd*. Als een formule een hypothese is, wordt dit vermeld met het volgnummer van die hypothese. Als een formule is afgeleid door toepassing van een afleidingsregel, dan wordt de afleidingsregel genoemd samen met de regelnummers van de formules waaruit de formule is afgeleid. Deze annotaties behoren formeel gesproken niet tot de afleiding.

Voordat we met mathematische precisie het begrip *afleiding* en de begrippen die hierbij een rol spelen, zullen definiëren, bespreken we deze eerst op informele wijze. Neem aan dat alle formules in een afleiding als volgt oplopend genummerd zijn: $F_1, F_2, \ldots, F_n$. Omdat een formule meerdere keren in dezelfde afleiding kan voorkomen (bijvoorbeeld de formules F_1 en F_3 in de afleiding in figuur 6.1), zullen we formules identificeren met hun nummer. Als $i < j$, dan zeggen we dat formule F_i *vooraf gaat* aan F_j. De *graad* van de formule F_i, notatie $gr(i)$, is gedefinieerd als het aantal verticale strepen links van F_i. De graad van de formule F_i geeft dus aan hoeveel aannamen aktief zijn en mogelijkerwijs gebruikt om F_i af te leiden. Zo geldt bijvoorbeeld voor de formule $F_4 = p \rightarrow q$ in onze voorbeeld-afleiding dat $gr(4) = 2$.

Zij $F_k \in PROP$ een hypothese (aanname) op regel k, zodat F_k de eerste formule is rechts van een (nieuwe) verticale streep en zij $F_l \in PROP$ op regel l de laatste formule rechts van de genoemde verticale streep. Het *hypothese-interval* van F_k is dan gedefinieerd als het discrete, gesloten interval $[k, l] \subset \mathbb{N}$. Het hypothese-interval behorende bij een hypothese bepaalt welke formules afgeleid zijn onder die hypothese. In figuur 6.1 is er sprake van twee hypothese-intervallen, namelijk $[1, 7]$ en $[2, 6]$ met als hypothesen de formules op de regels 1, respectievelijk 2. We zien tevens dat hypothese-intervallen op een bepaalde wijze genest kunnen zijn, zoals hier $[2, 6] \subset [1, 7]$. We zullen van twee hypothese-intervallen eisen dat deze ofwel genest zijn zoals in ons voorbeeld, ofwel geheel disjunct zijn. Ook dienen ze minstens twee formules te bevatten. Als de gehele afleiding geen hypothese-interval is —omdat er geen verticale streep vóór de hele afleiding staat—, dan spreekt men over een *nulde interval*. In ons voorbeeld is $[1, 8]$ dus een nulde interval. Verder zeggen we dat een formule F_i *in* het interval I *ligt*, als I het kleinste interval is zodanig dat $i \in I$. Zo ligt de formule F_4 bijvoorbeeld wel in het interval $[2, 6]$, maar niet in

$[1,7]$. Op dezelfde wijze kan men definiëren wanneer een hypothese-interval I in een interval J ligt. Het interval $[2,6]$ ligt bijvoorbeeld in het interval $[1,7]$.

Het laatste begrip dat we nodig hebben is het begrip *bewijsfiguur*. Het idee is dat een bewijsfiguur een stelsel hypothese-intervallen met formules is, waarbij de hypothese-intervallen voldoen aan de hierboven gestelde eisen: op de juiste wijze genest òf disjunct, en minstens twee formules bevattend. Een bewijsfiguur is een blauwdruk voor een afleiding. Iedere afleiding is een bewijsfiguur, maar niet iedere bewijsfiguur is een afleiding.

6.1.1 DEFINITIE **Bewijsfiguur**
Een bewijsfiguur $\mathbf{D}$ *is een mathematische structuur bestaande uit:*

1. *een gesloten interval* $D = [1, n]$, *waarbij* $D \subset \mathbb{N}$,
2. *een functie* $F : D \to PROP$, *en*
3. *een collectie* $\mathbf{H}$ *van gesloten deelintervallen van* D, *zodanig dat voor elk interval* $[i,j] \in \mathbf{H}$ *geldt dat* $i < j$, *en zodanig dat voor elk tweetal verschillende intervallen* $[i,j],[k,l] \in \mathbf{H}$ *geldt dat* $i < k < l \leq j$, *òf* $k < i < j \leq l$, *òf* $[i,j] \cap [k,l] = \emptyset$.

Als $i \in D$, *dan duidt* $F(i)$, *in het vervolg genoteerd als* F_i, *de formule aan op regel* i *van de bewijsfiguur. Men zegt dat* F_i voorafgaat *aan* F_j *als* $i < j$.

De elementen van $\mathbf{H}$ *noemt men de* hypothese-intervallen *van de bewijsfiguur. Indien* $D \notin \mathbf{H}$, *dan wordt* D *een* nulde *interval genoemd. Als* $[k,l] \in \mathbf{H}$ *dan noemt men de formule* F_k *de* hypothese *van* $[k,l]$.

Als $i \in I$ *voor een zeker interval* $I \in \mathbf{H} \cup \{D\}$ *en er geen* $J \in \mathbf{H}$ *bestaat zodanig dat* $i \in J \subset I$, *dan zegt men dat de formule* F_i in I ligt, *notatie* $F_i \in I$. *Een hypothese-interval* I ligt in *het interval* $J \in \mathbf{H} \cup \{D\}$ *als* $I \subset J$ *en er geen* $K \in \mathbf{H}$ *bestaat zodanig dat* $I \subset K \subset J$. *(N.B. We gebruiken '*$A \subset B$*' in de betekenis* $A \subseteq B$ *en* $A \neq B$.*)*

De lengte $len(\mathbf{D})$ *van de bewijsfiguur* $\mathbf{D}$ *is gedefinieerd als* $len(\mathbf{D}) = n$; *de* lengte $len(I)$ *van een interval* $I = [k,l] \in \mathbf{H} \cup \{D\}$ *is gedefinieerd als* $len([k,l]) = k - l + 1$.

Tenslotte is de graad *van een formule* F_i, *notatie* $gr(i)$, *gedefinieerd door* $gr(i) = \mathsf{card}\{I \in \mathbf{H} \mid i \in I\}$, *waarin* card *de* cardinaliteit *(aantal elementen) van een verzameling aanduidt.*

In de definities 6.1.3 en 6.1.4 zal worden beschreven wanneer een bewijsfiguur een afleiding is. In definitie 6.1.2 wordt vastgelegd hoe de afleidingsregels van systeem $\mathcal{F}$ die in tabel 6.1 staan, in een bewijsfiguur mogen worden toegepast. Maar eerst bespreken van de afleidingsregels op informele wijze.

Ten aanzien van de notatie van de afleidingsregels in tabel 6.1 geldt het volgende. De laatste formule van een afleidingsregel, die vet is gedrukt, noemt men de *conclusie* en de overige formules de *premissen*. Voor A en B dient men daarbij formules uit $PROP$ te lezen. De premissen van een afleidingsregel geven aan welke formules in de afleiding aanwezig moeten zijn, wil men de conclusie behorende bij die afleidingsregel kunnen trekken. Net als bij de boommethode mogen afleidingsregels *nooit* op echte subformules van een formule worden toegepast! Bij de naamgeving van de regels staat *intro* voor *introductie*, *elim* voor *eliminatie*, en *rei* voor *reïteratie*.

$\vee$-**intro**		$\vee$-**elim**	$\neg$-**intro**	$\neg$-**elim**
A $\vdots$ $\boldsymbol{A \vee B}$	B $\vdots$ $\boldsymbol{A \vee B}$	$A \vee B$ $\vdots$ $\mid A$ $\mid \vdots$ $\mid C$ $\vdots$ $\mid B$ $\mid \vdots$ $\mid C$ $\vdots$ $\boldsymbol{C}$	$\mid A$ $\mid \vdots$ $\mid B$ $\mid \vdots$ $\mid \neg B$ $\vdots$ $\boldsymbol{\neg A}$	$\neg\neg A$ $\vdots$ $\boldsymbol{A}$

$\rightarrow$-**intro**	$\rightarrow$-**elim**	$\wedge$-**intro**	$\wedge$-**elim**	
$\mid A$ $\mid \vdots$ $\mid B$ $\vdots$ $\boldsymbol{A \rightarrow B}$	$A \rightarrow B$ $\vdots$ A $\vdots$ $\boldsymbol{B}$	A $\vdots$ B $\vdots$ $\boldsymbol{A \wedge B}$	$A \wedge B$ $\vdots$ $\boldsymbol{A}$	$A \wedge B$ $\vdots$ $\boldsymbol{B}$

$\leftrightarrow$-**intro**	$\leftrightarrow$-**elim**		**rei**
$A \rightarrow B$ $\vdots$ $B \rightarrow A$ $\vdots$ $\boldsymbol{A \leftrightarrow B}$	$A \leftrightarrow B$ $\vdots$ $\boldsymbol{A \rightarrow B}$	$A \leftrightarrow B$ $\vdots$ $\boldsymbol{B \rightarrow A}$	$\mid A$ $\mid \vdots$ $\mid \mid \cdots \mid \vdots$ $\mid \mid \cdots \mid \boldsymbol{A}$

Tabel 6.1: Afleidingsregels van het systeem $\mathcal{F}$ van Fitch.

Een belangrijke eigenschap van de afleidingsregels is dat er voor ieder logisch connectief minstens één *introductieregel* en minstens één *eliminatieregel* bestaat. Met behulp van een introductieregel voor een bepaald connectief kan men formules afleiden die samengesteld zijn met dat connectief, terwijl met behulp van een eliminatieregel conclusies kunnen worden afgeleid uit formules die zijn samengesteld met dat connectief. Beeldend uitgedrukt, met eliminatieregels kan men *knippen* en met introductieregels *plakken*.

Voor alle afleidingsregels geldt, dat deze slechts kunnen worden toegepast als de premissen ervan op de 'goede' plaats in de bewijsfiguur voorkomen: alle premissen en/of hypothese-intervallen met premissen dienen samen met de conclusie in *hetzelfde* hypothese-interval te liggen. Alle premissen dienen altijd vooraf te gaan aan de conclusie. De reïteratieregel wordt gebruikt om formules die in een omvattend hypothese-interval liggen, op de goede plaats te krijgen, of, anders gezegd, te *importeren*.

De beide regels $\vee$-intro (introductie van de disjunctie) komen overeen met de intuïtie. Immers, als men A (of B) heeft afgeleid dan kan men tot $A \vee B$ besluiten. Dus $A \vee B$ is afleidbaar uit A en ook uit B.

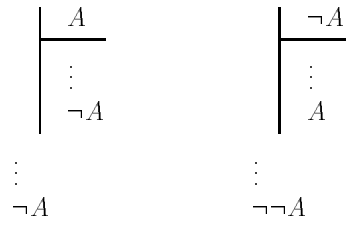
Hetzelfde geldt voor de regels $\wedge$-intro (introductie van de conjunctie) en $\wedge$-elim (eliminatie van de conjunctie). Als beide formules A en B afleidbaar zijn, dan is $A \wedge B$ afleidbaar en omgekeerd zijn uit $A \wedge B$ zowel A als B afleidbaar.

De regel $\vee$-elim (eliminatie van de disjunctie) drukt uit dat C afleidbaar is uit $A \vee B$, als C kan worden afgeleid uit de hypothese A en als C kan worden afgeleid uit de hypothese B.

De regel $\rightarrow$-intro (introductie van de implicatie) geeft aan dat men $A \rightarrow B$ kan afleiden als men uit de hypothese A de formule B kan afleiden. Bij de laatste stap wordt de regel $\rightarrow$-intro toegepast. Hierdoor wordt de hypothese A, waaruit B is afgeleid, *geëlimineerd* en concludeert men $A \rightarrow B$. Dit stemt overeen met het gebruik van de implicatie in de wiskunde.

De regel $\rightarrow$-elim (eliminatie van de implicatie), ook wel *modus ponens* genaamd, is de tegenhanger van de regel $\rightarrow$-intro. De regel drukt uit dat uit de premissen $A \rightarrow B$ en A de formule B kan worden afgeleid.

Een tweede regel waarmede men hypothesen kan elimineren, is de regel $\neg$-intro (introductie van de negatie). In de wiskunde staat de toepassing van deze regel bekend als *bewijs uit het ongerijmde* of *reductio ad absurdum*. Stel men wil aantonen dat $\neg A$ geldt. Men stelt in zo'n geval dat A geldt (de hypothese) en laat vervolgens zien dat men voor een zekere formule B zowel B als $\neg B$ kan afleiden, hetgeen een tegenspraak is. De hypothese A is dus blijkbaar onjuist, zodat men $\neg A$ concludeert. Op deze manier wordt de hypothese A geelimineerd. Deze afleidingsregel heeft twee bijzondere gevallen (zie figuur 6.2). Het eerste geval treedt op als men uit de aanname A de formule $\neg A$ kan afleiden.



Figuur 6.2: De twee speciale gevallen van afleidingsregel ¬-intro.

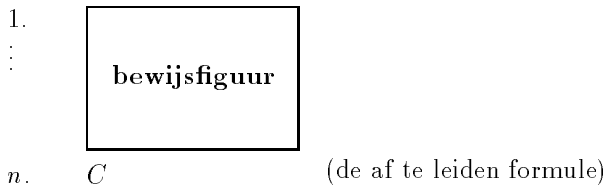
Dit betekent dat de aanname A onjuist is, zodat $\neg A$ moet gelden. Bij deze toepassing van ¬-intro vallen de formules A en B uit tabel 6.1 samen. In het tweede geval leidt men uit de aanname $\neg A$ de formule A af. Nu is de aanname $\neg A$ onjuist en leidt men $\neg\neg A$ af. Hier vallen de formules A en $\neg B$ samen.

De regel ¬-elim (eliminatie van de negatie) drukt uit dat men A mag afleiden uit *niet-niet* A. Deze regel ontleent zijn geldigheid aan het feit dat de klassieke logica slechts twee waarheidswaarden kent.

De regels $\leftrightarrow$-intro (introductie van de equivalentie) en $\leftrightarrow$-elim (eliminatie van de equivalentie) zijn voor de hand liggend, als men bedenkt dat in stelling 4.1.3 bewezen is dat $A \leftrightarrow B \approx (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$.

6.1.2 Definitie **Toepassing van een afleidingsregel**
Zij gegeven een bewijsfiguur **D** *met interval* $D = [1, n]$, *formules* $F_1, \ldots, F_n$ *en hypothese-intervallen* **H**. *Dan is formule* E *het resultaat van een* toepassing *van de afleidingsregel* R, *indien* E *de conclusie is van* R, *de premissen van* R *voorafgaan aan* E, *en indien voldaan is aan één van de volgende voorwaarden:*

1. $R \in \{\vee\text{-}intro, \neg\text{-}elim, \rightarrow\text{-}elim, \wedge\text{-}intro, \wedge\text{-}elim, \leftrightarrow\text{-}intro, \leftrightarrow\text{-}elim\}$.
   In dit geval moeten de premissen en de conclusie E *alle in* hetzelfde *interval liggen. De volgorde waarin de premissen voorkomen, mag daarbij afwijken van de volgorde zoals aangegeven in tabel 6.1.*
2. $R = \neg$*-intro.*
   Er moet een hypothese-interval $[k, l] \in \mathbf{H}$ *bestaan zodanig dat* $F_k = A$, *en zodanig dat ofwel* $F_l = \neg B$ *en* $B = F_m$ *voor zekere* $m \in [k, l]$, *ofwel* $F_l = B$ *en* $\neg B = F_m$ *voor zekere* $m \in [k, l]$. *De conclusie* $E = \neg A$ *en het interval* $[k, l]$ *dienen in hetzelfde interval te liggen. In beide gevallen is het toegestaan dat* $m = k$ *(*A *en* B *vallen samen, of* A *en* $\neg B$ *vallen samen).*
3. $R = \rightarrow$*-intro.*
   Er moet een hypothese-interval $[k, l] \in \mathbf{H}$ *bestaan zodanig dat* $F_k = A$ *en* $F_l = B$. *De conclusie* $E = A \rightarrow B$ *en het interval* $[k, l]$ *dienen in het zelfde interval te liggen.*
4. $R = \vee$*-elim.*
   Er moeten hypothese-intervallen $[i, j], [k, l] \in \mathbf{H}$ *bestaan zodanig dat* $F_i = A$, $F_j = C$, $F_k = B$ *en* $F_l = C$, *en zodanig dat ofwel* $j < k$, *ofwel* $l < i$. *De conclusie* $E = C$, *de hypothese* $A \vee B$ *en de intervallen* $[i, j]$ *en* $[k, l]$ *dienen in hetzelfde interval te liggen.*
5. $R =$ *rei.*
   Als de hypothese A *in het interval* $I \in \mathbf{H} \cup \{D\}$ *ligt en de conclusie* $E = A$ *in het interval* $J \in \mathbf{H} \cup \{D\}$, *dan moet gelden* $J \subseteq I$.



Figuur 6.3: Schema van een afleiding zonder hypothesen.

Nu gedefinieerd is wat de afleidingsregels zijn en hoe deze moeten worden toegepast, nemen we de begrippen *afleiding* en *afleidbaarheid* onder de loep.

6.1.3 Definitie **Afleiding zonder hypothesen**
Een afleiding van de formule C *is een bewijsfiguur* $\mathbf{D}$ *met interval* $D = [1, n]$ *en formules* $F_1, \ldots, F_n$ *dat aan de volgende voorwaarden voldoet:*

1. $F_n = C$ *en* $gr(n) = 0$*;*
2. *iedere formule* F_i $(1 \leq i \leq n)$ *is een hypothese of het resultaat van de toepassing van een afleidingsregel op een aantal aan* F_i *voorafgaande formules.*

Onder de bewijslengte *van* C *met betrekking tot* $\mathbf{D}$ *verstaat men* $len(\mathbf{D})$.

In figuur 6.3 wordt geïllustreerd hoe een afleiding zonder hypothesen eruit ziet. Een concreet voorbeeld van een afleiding zonder hypothesen treft men aan in figuur 6.1.

6.1.4 Definitie **Afleiding met hypothesen**
Een afleiding van de formule C uit de formules $P_1, \ldots, P_m$ $(m \geq 1)$ *is een bewijsfiguur* $\mathbf{D}$ *met interval* $D = [1, n]$ $(n > m)$ *en formules* $F_1, \ldots, F_n$ *waarvoor geldt:*

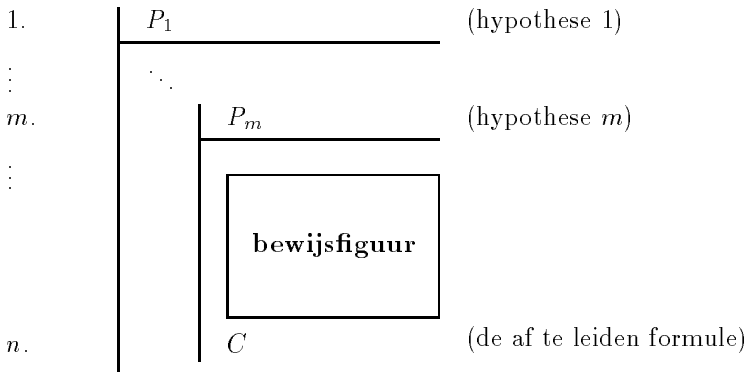
1. $F_i = P_i$ *is een hypothese voor* $1 \leq i \leq m$*, zodat* $gr(i) = i$*;*
2. $F_n = C$*, en* C *en* P_m *liggen in hetzelfde hypothese-interval, zodat* $gr(n) = m$*;*
3. *iedere formule* F_i $(1 \leq i \leq n)$ *is een hypothese of het resultaat van de toepassing van een afleidingsregel op een aantal aan* F_i *voorafgaande formules.*

Onder de bewijslengte *van* C *uit* $P_1, \ldots, P_m$ *met betrekking tot* $\mathbf{D}$ *verstaat men* $len(\mathbf{D})$.

In figuur 6.4 treft men een schema aan voor een afleiding van de formule C uit de hypothesen $P_1, \ldots, P_m$. Een concreet voorbeeld van een afleiding van een formule uit één hypothese vindt men in figuur 6.5.

6.1.5 Definitie **Afleidbaarheid**

1. *Een formule* C *is* afleidbaar *als er een afleiding van* C *bestaat. Dit wordt genoteerd als:* $\vdash C$.
2. *Een formule* C *is* afleidbaar uit de formules $P_1, \ldots, P_m$ *als er een afleiding van* C *uit* $P_1, \ldots, P_m$ *bestaat. Dit wordt genoteerd als:* $P_1, \ldots, P_m \vdash C$.



Figuur 6.4: Schema van een afleiding met hypothesen.

1.	$p \to q$	(hypothese 1)
2.	$q \to r$	(hypothese 2)
3.	p	(hypothese 3)
4.	$p \to q$	(rei,1)
5.	q	($\to$-elim,3,4)
6.	$q \to r$	(rei,2)
7.	r	($\to$-elim,5,6)
8.	$p \to r$	($\to$-intro,3,7)
9.	$(q \to r) \to (p \to r)$	($\to$-intro,2,8)

Figuur 6.5: Afleiding van $(q \to r) \to (p \to r)$ uit $p \to q$.

3. *Zij* $\Gamma \subseteq PROP$ *een verzameling formules. Een formule* C *is* afleidbaar uit Γ *als er* m *formules* $P_1, \ldots, P_m \in \Gamma$ *bestaan zodanig dat* $P_1, \ldots, P_m \vdash C$. *Dit wordt genoteerd als:* $\Gamma \vdash C$. *Als* $\Gamma = \emptyset$, *dan schrijft men:* $\vdash C$.

De lezer zal zich wellicht afvragen waarom we ons zoveel moeite hebben getroost om de begrippen uit deze paragraaf zo precies te definiëren. De reden is dat we hiervan profijt zullen hebben als we eigenschappen over het systeem van Fitch willen bewijzen, zoals in hoofdstuk 7.

6.2 Afleidingen en afleidingsstrategieën

In de afleidingen die we in deze paragraaf zullen geven, zullen we geen gebruik maken van propositiesymbolen, maar van metavariabelen voor formules. De afleiding van een specifieke formule verkrijgt men dan door geschikte substituties te doen voor deze metavariabelen. Vervangt men bijvoorbeeld in de afleiding van formule 1 in het volgende voorbeeld de metavariabelen A en B door de propositiesymbolen p en q, dan verkrijgt men een afleiding van de formule $p \to (q \to p)$. Vervangt men echter in deze afleiding A en B door $p \wedge q$ en $p \to q$, dan verkrijgt men een afleiding van de formule $[p \wedge q] \to [(p \to q) \to (p \wedge q)]$.

6.2.1 Voorbeeld Zij $A, B, C \in PROP$. Dan zijn de onderstaande formules afleidbaar in het systeem $\mathcal{F}$.

1. $A \to (B \to A)$.
2. $(A \to B) \to [(B \to C) \to (A \to C)]$.
3. $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ *(contrapositie).*
4. $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$.
5. $A \vee \neg A$ *(tertium non datur).*
6. $(A \vee (B \vee C)) \to ((A \vee B) \vee C)$ (distributiviteit).

Van de formules 1, 3, 4, 5 en 6 wordt een afleiding gegeven in de figuren 6.6, 6.7, 6.8, 6.9 en 6.10. In figuur 6.5 staat een afleiding van formule 2 voor het geval dat $A = p$, $B = q$ en $C = r$. ■

Uit voorbeelden van afleidingen blijkt dat men voor het vinden van een afleiding vaak gebruik kan maken van een aantal vuistregels. Neem aan dat we een formule $F \in PROP$ moeten bewijzen. We kunnen dan afhankelijk van de vorm van F als volgt te werk gaan.

1.	A	(hypothese 1)
2.	B	(hypothese 2)
3.	A	(rei,1)
4.	$B \to A$	($\to$-intro,2,3)
5.	$A \to (B \to A)$	($\to$-intro,1,4)

Figuur 6.6: Bewijs van $\vdash A \to (B \to A)$.

1.	$A \to B$	(hypothese 1)
2.	$\neg B$	(hypothese 2)
3.	A	(hypothese 3)
4.	$A \to B$	(rei,1)
5.	B	($\to$-elim,3,4)
6.	$\neg B$	(rei,2)
7.	$\neg A$	($\neg$-intro,3,5,6)
8.	$\neg B \to \neg A$	($\to$-intro,2,7)
9.	$(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$	($\to$-intro,1,8)

Figuur 6.7: Bewijs van $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$.

1.	$\neg B \to \neg A$	(hypothese 1)
2.	A	(hypothese 2)
3.	$\neg B$	(hypothese 3)
4.	A	(rei,2)
5.	$\neg B \to \neg A$	(rei,1)
6.	$\neg A$	($\to$-elim,3,5)
7.	$\neg\neg B$	($\neg$-intro,3,4,6)
8.	B	($\neg$-elim,7)
9.	$A \to B$	($\to$-intro,2,8)
10.	$(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$	($\to$-intro,1,9)

Figuur 6.8: Bewijs van $\vdash (\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$.

1.	$\neg(A \vee \neg A)$	(hypothese 1)
2.	$\quad A$	(hypothese 2)
3.	$\quad A \vee \neg A$	($\vee$-intro,2)
4.	$\quad \neg(A \vee \neg A)$	(rei,1)
5.	$\neg A$	($\neg$-intro,2,3,4)
6.	$A \vee \neg A$	($\vee$-intro,5)
7.	$\neg\neg(A \vee \neg A)$	($\neg$-intro,1,6)
8.	$A \vee \neg A$	($\neg$-elim,7)

Figuur 6.9: Bewijs van $\vdash A \vee \neg A$.

1.	$A \vee (B \vee C)$	(hypothese 1)
2.	$\quad A$	(hypothese 2)
3.	$\quad A \vee B$	($\vee$-intro,2)
4.	$\quad (A \vee B) \vee C$	($\vee$-intro,3)
5.	$\quad B \vee C$	(hypothese 3)
6.	$\quad\quad B$	(hypothese 4)
7.	$\quad\quad A \vee B$	($\vee$-intro,6)
8.	$\quad\quad (A \vee B) \vee C$	($\vee$-intro,7)
9.	$\quad\quad C$	(hypothese 5)
10.	$\quad\quad (A \vee B) \vee C$	($\vee$-intro,9)
11.	$\quad (A \vee B) \vee C$	($\vee$-elim,5,8,10)
12.	$(A \vee B) \vee C$	($\vee$-elim,1,4,11)
13.	$(A \vee (B \vee C)) \rightarrow ((A \vee B) \vee C)$	($\rightarrow$-intro,1,12)

Figuur 6.10: Bewijs van $(A \vee (B \vee C)) \rightarrow ((A \vee B) \vee C)$.

1. $F = (A \wedge B)$.
   Probeer afzonderlijk A en B af te leiden. Hieruit volgt door toepassing van de regel $\wedge$-intro $(A \wedge B)$.

2. $F = (A \rightarrow B)$.
   Open een nieuw hypothese-interval met A als hypothese en tracht hierin B af te leiden. Door toepassing van de regel $\rightarrow$-intro volgt hieruit $(A \rightarrow B)$.

3. $F = \neg A$.
   Open een nieuw hypothese-interval met A als hypothese en probeer hierin een contradictie van de vorm C en $\neg C$ af te leiden. Door toepassing van de regel $\neg$-intro verkrijgt men als resultaat $\neg A$.

4. $F = (A \vee B)$.
   Probeer F uit het ongerijmde te bewijzen, dat wil zeggen open een hypothese-interval met $\neg(A \vee B)$ als hypothese en probeer hieruit een contradictie van de vorm C en $\neg C$ af te leiden. Door toepassing van de regel $\neg$-intro verkrijgt men dan $\neg\neg(A \vee B)$. Hieruit leidt men dan met behulp van $\neg$-elim $(A \vee B)$ af. In sommige gevallen kan F worden bewezen met $\vee$-intro. Dit geval doet zich bijvoorbeeld voor indien één van de aannameformules een disjunctie van de vorm $C \vee D$ is. Men kan dan proberen op $C \vee D$ de regel $\vee$-elim toe te passen en vervolgens in de twee hypothese-intervallen met C en D als hypothesen de formule F af leiden met behulp van $\vee$-intro. Deze strategie is gebruikt in de afleiding in figuur 6.10.

5. $F = (A \leftrightarrow B)$.
   Tracht de formules $A \rightarrow B$ en $B \rightarrow A$ af te leiden. Met behulp van de regel $\leftrightarrow$-intro volgt hieruit $(A \leftrightarrow B)$.

6. Bij de bovenstaande gevallen 3 en 4 is er sprake van het vinden van een contradictie van de vorm C en $\neg C$. Hoe vindt men die formule C? Hier dient enige creativiteit aan de dag te worden gelegd. Vaak zal een geschikte C een *subformule* van F zijn (bijvoorbeeld F zelf).

7. Als het met bovenstaande vuistregels niet lukt om een afleiding van formule F te vinden, kan men proberen om F uit het ongerijmde af te leiden, zoals in geval 4 hierboven.

8. Het kan voorkomen dat men een aannameformule niet kan gebruiken omdat geen eliminatieregel erop toepasbaar is. In zo'n geval dient men een nieuw hypothese-interval te openen met een geschikte subformule van die aannameformule als hypothese. Stel men heeft als aannameformule

$A \to B$, dan zou men in dat geval een interval openen met A als hypothese, zodat B kan worden afgeleid met de regel $\to$-elim (dit is gedaan in stap 3 van de afleiding in figuur 6.7). Bij een aannameformule van de vorm $\neg(A \vee B)$ is het soms slim om een hypothese-interval met A of B als hypothese te openen (zie stap 2 van de afleiding in figuur 6.9).

We besluiten deze paragraaf met het bewijzen van een aantal elementaire eigenschappen van logische connectieven.

6.2.2 Stelling *Zij $A, B \in PROP$. Dan geldt:*

1. $\vdash \neg(A \wedge B) \to (\neg A \vee \neg B)$.
2. $\vdash (\neg A \vee \neg B) \to \neg(A \wedge B)$.
3. $\vdash \neg(A \vee B) \to (\neg A \wedge \neg B)$.
4. $\vdash (\neg A \wedge \neg B) \to \neg(A \vee B)$.
5. $\vdash \neg(A \to B) \to (A \wedge \neg B)$.
6. $\vdash (A \wedge \neg B) \to \neg(A \to B)$.
7. $\vdash (A \to B) \to (\neg A \vee B)$.
8. $\vdash (\neg A \vee B) \to (A \to B)$.
9. $\vdash A \to \neg\neg A$.
10. $\vdash \neg\neg A \to A$.
11. $\vdash (A \leftrightarrow B) \to [(A \to B) \wedge (B \to A)]$.
12. $\vdash [(A \to B) \wedge (B \to A)] \to (A \leftrightarrow B)$.
13. $\vdash \neg(A \leftrightarrow B) \to [\neg(A \to B) \vee \neg(B \to A)]$.
14. $\vdash [\neg(A \to B) \vee \neg(B \to A)] \to \neg(A \leftrightarrow B)$.

Bewijs Van de formules 1, 3 en 8 wordt een afleiding gegeven in de figuren 6.11, 6.12 en 6.13. De overige gevallen worden aan de lezer overgelaten. ∎

1.	$\neg(A \wedge B)$	(hypothese 1)
2.	$\neg(\neg A \vee \neg B)$	(hypothese 2)
3.	A	(hypothese 3)
4.	B	(hypothese 4)
5.	A	(rei,3)
6.	$A \wedge B$	($\wedge$-intro,4,5)
7.	$\neg(A \wedge B)$	(rei,1)
8.	$\neg B$	($\neg$-intro,4,6,7)
9.	$\neg A \vee \neg B$	($\vee$-intro,8)
10.	$\neg(\neg A \vee \neg B)$	(rei,2)
11.	$\neg A$	($\neg$-intro,3,9,10)
12.	$\neg A \vee \neg B$	($\vee$-intro,11)
13.	$\neg\neg(\neg A \vee \neg B)$	($\neg$-intro,2,12)
14.	$\neg A \vee \neg B$	($\neg$-elim,13)
15.	$\neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)$	($\rightarrow$-intro,1,14)

Figuur 6.11: Bewijs van $\vdash \neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)$.

1.	$\neg(A \vee B)$	(hypothese 1)
2.	A	(hypothese 2)
3.	$A \vee B$	($\vee$-intro,2)
4.	$\neg(A \vee B)$	(rei,1)
5.	$\neg A$	($\neg$-intro,2,3,4)
6.	B	(hypothese 3)
7.	$A \vee B$	($\vee$-intro,6)
8.	$\neg(A \vee B)$	(rei,1)
9.	$\neg B$	($\neg$-intro,6,7,8)
10.	$\neg A \wedge \neg B$	($\wedge$-intro,5,9)
11.	$\neg(A \vee B) \rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$	($\rightarrow$-intro,1,10)

Figuur 6.12: Bewijs van $\vdash \neg(A \vee B) \rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$.

1.	$\neg A \vee B$	(hypothese 1)
2.	A	(hypothese 2)
3.	$\neg A \vee B$	(rei,1)
4.	$\neg A$	(hypothese 3)
5.	$\neg B$	(hypothese 4)
6.	A	(rei,2)
7.	$\neg A$	(rei,4)
8.	$\neg\neg B$	($\neg$-intro,5,6,7)
9.	B	($\neg$-elim,8)
10.	B	(hypothese 5)
11.	B	(rei,10)
12.	B	($\vee$-elim,3,9,11)
13.	$A \rightarrow B$	($\rightarrow$-intro,2,12)
14.	$(\neg A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow B)$	($\rightarrow$-intro,1,13)

Figuur 6.13: Bewijs van $\vdash (\neg A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow B)$.

6.3 Het uitgebreide systeem van Fitch

Het systeem $\mathcal{F}$ kan op verschillende manieren gewijzigd worden, bijvoorbeeld door extra afleidingsregels aan $\mathcal{F}$ toe te voegen, door verandering van de voorwaarden waaronder de afleidingsregels in $\mathcal{F}$ toegepast mogen worden of door het aantal afleidingsregels te verminderen. Op deze manier kan men allerlei varianten van het natuurlijke deductiesysteem $\mathcal{F}$ verkrijgen. In deze paragraaf bespreken we een aantal uitbreidingen die het deductiesysteem handiger in het gebruik maken.

In de wiskunde maakt men in een bewijs doorgaans gebruik van reeds eerder bewezen stellingen. In het systeem $\mathcal{F}$, zoals beschreven in dit hoofdstuk, kan men in een afleiding geen gebruik maken van reeds afgeleide formules. Om dit te ondervangen voeren we een nieuwe notatie in. In afleidingen zullen we omkaderde formules

$$\boxed{F}$$

toelaten. Voor zo'n omkaderde formule dient men dan de *afleiding* van die formule te lezen. Door het gebruik van deze notatie wordt een afleiding vaak veel overzichtelijker. In informatica-terminologie: een afleiding wordt op deze wijze gestructureerd in 'modulen'.

1.	$A \to B$	(hypothese 1)
2.	$\neg B \vee C$	(hypothese 2)
3.	A	(hypothese 3)
4.	$A \to B$	(rei,1)
5.	B	($\to$-elim,3,4)
6.	$\neg B \vee C$	(rei,2)
7.	$\boxed{(\neg B \vee C) \to (B \to C)}$	(**stelling**)
8.	$B \to C$	($\to$-elim,6,7)
9.	C	($\to$-elim,5,8)

Figuur 6.14: Gebruik van een stelling in een afleiding van $A \to B, \neg B \vee C, A \vdash C$.

Stel men wil bewijzen $A \to B, \neg B \vee C, A \vdash C$. In de bewijsfiguur in figuur 6.14 maken we gebruik van de nieuwe notatie. De afleiding van de omkaderde formule staat in figuur 6.13. De bewijsfiguur is uiteraard geen afleiding van $A \to B, \neg B \vee C, A \vdash C$ in het systeem $\mathcal{F}$. Als men echter de rechthoek

$$\boxed{(\neg B \vee C) \to (B \to C)}$$

vervangt door een afleiding van de formule $(\neg B \vee C) \to (B \to C)$, dan verkrijgt men een afleiding van C uit de hypothesen $A \to B$, $\neg B \vee C$ en A in het systeem $\mathcal{F}$. Dit wordt het *expanderen* van de bewijsfiguur genoemd. De expansie van de bewijsfiguur in figuur 6.14 kan men aantreffen in figuur 6.15.

Een andere manier om het vinden van afleidingen te vereenvoudigen is het invoeren van nieuwe, 'krachtige' afleidingsregels. Deze nieuwe afleidingsregels zijn dan gebaseerd op reeds afgeleide stellingen. Zo wordt bijvoorbeeld in het afleidingsfragment in figuur 6.16 de formule $\neg A \wedge \neg B$ afgeleid uit de formule $\neg(A \vee B)$ met behulp van de stelling $\neg(A \vee B) \to (\neg A \wedge \neg B)$. Aangezien de formule $\neg(A \vee B) \to (\neg A \wedge \neg B)$ afleidbaar is, kan men deze bewijsfiguur expanderen tot een afleiding. Men kan echter ook het systeem $\mathcal{F}$ uitbreiden met een nieuwe afleidingsregel:

$\vee$-**regel**
$\neg(A \vee B)$
$\vdots$
$\boldsymbol{\neg A \wedge \neg B}$

1.	$A \to B$	(hypothese 1)
2.	$\quad \neg B \vee C$	(hypothese 2)
3.	$\quad\quad A$	(hypothese 3)
4.	$\quad\quad A \to B$	(rei,1)
5.	$\quad\quad B$	($\to$-elim,3,4)
6.	$\quad\quad \neg B \vee C$	(rei,2)
7.	$\quad\quad\quad \neg B \vee C$	(hypothese 4)
8.	$\quad\quad\quad\quad B$	(hypothese 5)
9.	$\quad\quad\quad\quad \neg B \vee C$	(rei,7)
10.	$\quad\quad\quad\quad\quad \neg B$	(hypothese 6)
11.	$\quad\quad\quad\quad\quad\quad \neg C$	(hypothese 7)
12.	$\quad\quad\quad\quad\quad\quad B$	(rei,8)
13.	$\quad\quad\quad\quad\quad\quad \neg B$	(rei,10)
14.	$\quad\quad\quad\quad\quad \neg\neg C$	($\neg$-intro,11,12,13)
15.	$\quad\quad\quad\quad\quad C$	($\neg$-elim,14)
16.	$\quad\quad\quad\quad\quad C$	(hypothese 8)
17.	$\quad\quad\quad\quad\quad C$	(rei,16)
18.	$\quad\quad\quad\quad C$	($\vee$-elim,9,15,17)
19.	$\quad\quad\quad B \to C$	($\to$-intro,8,18)
20.	$\quad\quad (\neg B \vee C) \to (B \to C)$	($\to$-intro,7,19)
21.	$\quad\quad B \to C$	($\to$-elim,6,20)
22.	$\quad\quad C$	($\to$-elim,5,21)

Figuur 6.15: De expansie van de bewijsfiguur in figuur 6.14.

	$\ldots$	
	$\ldots$	
	$\vdots$	
$k.$	$\neg(A \vee B)$	$(\ldots)$
	$\vdots$	
$l.$	$\boxed{\neg(A \vee B) \rightarrow (\neg A \wedge \neg B)}$	(stelling)
	$\vdots$	
$m.$	$\neg A \wedge \neg B$	$(\rightarrow\text{-elim},k,l)$
	$\vdots$	
	$\vdots$	

Figuur 6.16: Afleidingsfragment waarin een stelling wordt gebruikt.

In dit geval kan in de afleiding het gebruik van de stelling $\neg(A \vee B) \rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$ vervangen worden door een toepassing van $\vee$-regel op de formule $\neg(A \vee B)$. Het afleidingsfragment uit figuur 6.16 kan dan vereenvoudigd worden tot het fragment in figuur 6.17.

Uit het voorafgaande volgt, dat iedere toepassing van de $\vee$-regel in een afleiding vervangen kan worden door het gebruik van de afleidbare formule $\neg(A \vee B) \rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$ als stelling. Door deze stelling (omkaderde formule) dan te expanderen tot een afleiding verkrijgt men een afleiding in systeem $\mathcal{F}$. Dus iedere formule F die met behulp van de $\vee$-regel is afgeleid, kan ook afgeleid worden zonder deze regel. Het is duidelijk dat men op deze wijze het systeem $\mathcal{F}$ met een willekeurig aantal nieuwe afleidingsregels kan uitbreiden. Het voordeel van het gebruik van deze regels is dat men over het algemeen kortere bewijzen krijgt. Bovendien zal de gezochte afleiding vaak sneller worden gevonden.

Een aantal van deze 'nieuwe' afleidingsregels is bij elkaar gezet in tabel 6.2. De laatste, vet gedrukte formule van een afleidingsregel in deze tabel is de conclusie en de overige zijn de premissen. Voor de toepassing van deze regels gelden dezelfde voorwaarden als voor de regels $\vee$-intro, $\neg$-elim etc. (zie definitie 6.1.2 clausule 1). Dit betekent dat de premissen vooraf moeten gaan aan en in hetzelfde interval moeten liggen als de conclusie. Bij toepassing van de regel 'contra' mag de volgorde van de premissen afwijken van die in tabel 6.2. Een voorbeeld van een afleiding waarin gebruik wordt gemaakt van de nieuwe afleidingsregels treft men aan in figuur 6.18.

	$\vdots$	
$k.$	$\neg(A \vee B)$	$(\ldots)$
	$\vdots$	
$l.$	$\neg A \wedge \neg B$	($\vee$-**regel**,k)
	$\vdots$	

Figuur 6.17: Afleidingsfragment waarin een nieuwe afleidingsregel wordt gebruikt.

$\wedge$-**regel**	$\vee$-**regel**	**contra**
$\neg(A \wedge B)$	$\neg(A \vee B)$	A
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
		$\neg A$
$\boldsymbol{\neg A \vee \neg B}$	$\boldsymbol{\neg A \wedge \neg B}$	$\vdots$
		$\boldsymbol{B}$

$\rightarrow$-**regel1**	$\rightarrow$-**regel2**	$\leftrightarrow$-**regel**
$\neg(A \rightarrow B)$	$A \rightarrow B$	$\neg(A \leftrightarrow B)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\boldsymbol{A \wedge \neg B}$	$\boldsymbol{\neg A \vee B}$	$\boldsymbol{\neg(A \rightarrow B) \vee \neg(B \rightarrow A)}$

Tabel 6.2: Afleidingsregels van het systeem $\mathcal{F}_{uit}$.

1.	$\neg[(A \to B) \vee (B \to A)]$	(hypothese 1)
2.	$\neg(A \to B) \wedge \neg(B \to A)$	($\wedge$-regel,1)
3.	$\neg(A \to B)$	($\wedge$-elim,2)
4.	$\neg(B \to A)$	($\wedge$-elim,2)
5.	$A \wedge \neg B$	($\to$-regel1,3)
6.	$B \wedge \neg A$	($\to$-regel1,4)
7.	A	($\wedge$-elim,5)
8.	$\neg A$	($\wedge$-elim,6)
9.	$\neg\neg[(A \to B) \vee (B \to A)]$	($\neg$-intro,1,7,8)
10.	$(A \to B) \vee (B \to A)$	($\neg$-elim,9)

Figuur 6.18: Bewijs van $\vdash_{\mathcal{F}_{uit}} (A \to B) \vee (B \to A)$.

Tot nog toe hebben we tamelijk strenge voorwaarden gesteld aan het toepassen van de afleidingsregels: premissen en conclusies moesten aan allerlei eisen voldoen met betrekking tot hun graad en hypothese-interval. Als we bedenken dat de reïteratieregel van het systeem $\mathcal{F}$ alleen gebruikt wordt om premissen in de 'goede' hypothese-intervallen te plaatsen, zodat de afleidingsregels toegepast mogen worden, dan ligt hier een mogelijkheid tot een nieuwe uitbreiding. Het effect van de reïteratieregel is dat formules gecopieerd worden. Als we nu zouden toestaan dat de reïteratieregel niet *expliciet* behoeft te worden toegepast, dan zouden we dit copiëren kunnen vermijden, zodat de bewijslengte afneemt. We kunnen het systeem $\mathcal{F}$ dus op deze wijze uitbreiden met de volgende afspraak:

> De afleidingsregels uit de tabellen 6.1 en 6.2 mogen worden toegepast, als het in principe mogelijk is om de premissen door middel van de reïteratieregel in de goede hypothese-intervallen te krijgen. Het is dan niet verplicht om de reïteratieregel daadwerkelijk toe te passen.

Een laatste uitbreiding, die van puur notationele aard is, heeft betrekking op afleidingen van formules uit aannameformules. We zullen niet meer eisen dat er voor iedere aannameformule een nieuw hypothese-interval wordt geopend. In plaats daarvan worden alle aannameformules onder elkaar boven de verticale streep van het eerste hypothese-interval geplaatst. Het gevolg hiervan is dat de aannameformules en de conclusie in hetzelfde hypothese-interval liggen. Dit wordt geïllustreerd in figuur 6.19. We wijzen erop dat deze notationele conventie beschouwd wordt als een *verkorte schrijfwijze*. Als we in formele zin over de hypothese-intervallen van een afleiding spreken waarin deze

1.	$A \rightarrow B$	(hypothese 1)
2.	$\neg B \vee C$	(hypothese 2)
3.	$\quad \neg C$	(hypothese 3)
4.	$\quad \neg A \vee B$	($\rightarrow$-regel2,1)
5.	$\quad\quad \neg A$	(hypothese 4A)
6.	$\quad\quad \neg A$	(rei,5)
7.	$\quad\quad B$	(hypothese 4B)
8.	$\quad\quad\quad \neg B$	(hypothese 5A)
9.	$\quad\quad\quad \neg A$	(contra,7,8)
10.	$\quad\quad\quad C$	(hypothese 5B)
11.	$\quad\quad\quad \neg A$	(contra,3,10)
12.	$\quad\quad \neg A$	($\vee$-elim,2,9,11)
13.	$\quad \neg A$	($\vee$-elim,4,6,12)
14.	$\neg C \rightarrow \neg A$	($\rightarrow$-intro,3,13)

Figuur 6.19: Bewijs van $A \rightarrow B, \neg B \vee C \vdash_{\mathcal{F}_{uit}} \neg C \rightarrow \neg A$.

verkorte schrijfwijze is toegepast, dan zullen we aannemen dat er voor iedere aannameformule een nieuw hypothese-interval is geopend.

In figuur 6.19 wordt ook de omkaderde afspraak betreffende de reïteratieregel toegepast. Zo staat bijvoorbeeld de formule $\neg B \vee C$ (regelnummer 2) voor de toepassing van de regel $\vee$-elim (regelnummer 12) eigenlijk in het verkeerde hypothese-interval. Het is echter eenvoudig in te zien dat door een eventuele toepassing van de reïteratieregel de genoemde formule in het juiste hypothese-interval, in dit geval $[7, 12]$, gezet kan worden.

Als we nu aan systeem $\mathcal{F}$ alle uitbreidingen die we tot nu toe hebben bekeken, toevoegen dan verkrijgen we het systeem $\mathcal{F}_{uit}$, het *uitgebreide systeem van Fitch*. Nog eens op een rijtje gezet, bevat het systeem $\mathcal{F}_{uit}$ de volgende uitbreidingen:

1. het gebruik van stellingen,
2. de afleidingsregels uit figuur 6.2,
3. de afspraak betreffende het achterwege laten van toepassingen van de reïteratieregel, en
4. de notationele uitbreiding betreffende afleidingen uit aannameformules.

Uit het voorafgaande blijkt dat de systemen $\mathcal{F}$ en $\mathcal{F}_{uit}$ equivalent zijn. Dit wil zeggen dat iedere formule F die in $\mathcal{F}_{uit}$ afleidbaar is uit een verzameling Γ van formules, ook in $\mathcal{F}$ afleidbaar is uit Γ, en omgekeerd. Dit resultaat is samengevat in de volgende stelling.

6.3.1 STELLING **Equivalentie van $\mathcal{F}$ en $\mathcal{F}_{uit}$**
Zij $\Gamma \subseteq PROP$ en $F \in PROP$. Dan geldt:

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{F}} F \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma \vdash_{\mathcal{F}_{uit}} F.$$

In de formulering van de bovenstaande stelling betekent $\vdash_{\mathcal{F}}$: *afleidbaar in systeem $\mathcal{F}$*. Een analogon geldt voor $\vdash_{\mathcal{F}_{uit}}$.

6.4 Opgaven

1. Zij $A, B, C \in PROP$. Bewijs in het niet-uitgebreide systeem van Fitch $\mathcal{F}$:
   (a) $\vdash (A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$.
   (b) $\vdash (B \to C) \to ((A \vee B) \to (A \vee C))$.
   (c) $\vdash A \vee (A \to B)$.
   (d) $\vdash ((A \vee (A \to B)) \to B) \to B$.
   (e) $\vdash (A \to B) \vee (B \to A)$.
2. Zij $A, B, C \in PROP$. Bewijs in het uitgebreide systeem van Fitch $\mathcal{F}_{uit}$:
   (a) $A \leftrightarrow B, (\neg A \wedge \neg B) \to \neg C, C \vdash B$.
   (b) $(A \wedge B) \to \neg D, \neg(D \to E), B \vee E \vdash \neg A$.
   (c) $A \to (B \vee (C \to D)), B \to (B \to \neg A), \neg(C \to \neg A) \vdash D$.
   (d) $\vdash ((A \to B) \to (A \to C)) \to (A \to (B \to C))$.
   (e) $\vdash ((A \to B) \to A) \to A$.
   (f) $\vdash (A \to (B \vee C)) \to ((A \to B) \vee (A \to C))$.
   (g) $\vdash A \to (B \to (A \leftrightarrow B))$.
   (h) $\vdash (A \vee (B \to C)) \to ((A \vee B) \to (A \vee C))$.
   (i) $\vdash ((A \vee B) \to (A \vee C)) \to (A \vee (B \to C))$.
3. Bewijs zelf de overige gevallen van stelling 6.2.2.