# Hoofdstuk 9

# Semantiek van de Predicatenlogica

In dit hoofdstuk behandelen we de semantiek van de predicatenlogica. Vergeleken met de semantiek voor de propositielogica is deze tamelijk gecompliceerd. In paragraaf 9.1 zullen we deze daarom op informele wijze introduceren. Daarna behandelen we in de paragrafen 9.2, 9.3 en 9.4 de semantische noties op formele wijze. Deze noties zijn *structuur*, *bedeling*, *interpretatie*, *model* en *logisch gevolg*.

## 9.1 Een informele introductie

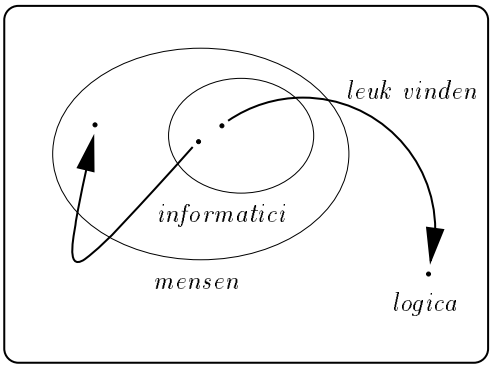
Evenals in de propositielogica kan men aan iedere formule van een eersteordetaal een waarheidswaarde toekennen, gegeven een zekere *interpretatie* van de symbolen in die taal. In het geval van de propositielogica volstonden valuaties die we op wiskundige wijze konden definiëren. Ook voor de predicatenlogica zoeken we een op wiskundige leest geschoeide semantiek. Hierbij zullen we eenvoudige verzamelingenleer nodig blijken te hebben. Aan de hand van een voorbeeld zullen we onderzoeken hoe een interpretatie voor de predicatenlogica eruit ziet. Beschouw de redenering:

(9.1) Alle informatici zijn mensen.
Sommige informatici vinden logica leuk.
$\therefore$ Sommige mensen vinden logica leuk.

en de bijbehorende vertaling (zie ook paragraaf 8.1):

(9.2) $\forall x[I(x) \rightarrow M(x)]$
$\exists x[I(x) \wedge L(x,a)]$
$\therefore\ \exists x[M(x) \wedge L(x,a)]$

De geldigheid van deze redenering kan worden ingezien met behulp van het bijbehorende diagram (zie figuur 9.1). Immers, als we aannemen dat



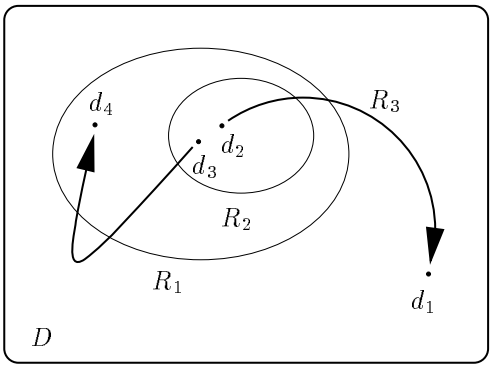

Figuur 9.1: Het diagram behorende bij de 'logica-redenering'.

*informatici* $\subseteq$ *mensen* en dat er een object $o \in$ *informatici* bestaat zodanig dat $o$ in de relatie *leuk vinden* staat tot het object *logica*, dan moet ook gelden dat er een object $o \in$ *mensen* bestaat zodanig dat $o$ in de relatie *leuk vinden* staat tot het object *logica*.

Dit soort diagrammen waarin verzamelingen, elementen daarvan en relaties voorkomen, zullen dienen als basis voor de interpretatie van eerste-ordetalen. Zo'n diagram stelt een wiskundige *structuur* voor. Een structuur wordt gegeven door een verzameling elementen, het *domein* van de structuur genoemd, en relaties en functies daarop. Het domein van het diagram in figuur 9.1 is nog niet gespecificeerd. Kennelijk hadden we (misschien alle) concrete en abstracte objecten uit de wereld in onze gedachten, want mensen en het vak logica behoren tot dat domein. In dat domein zijn 4 elementen aangegeven door een punt. Als we aannemen dat het domein geen andere elementen bevat dan deze vier, dan is er nog steeds sprake van een structuur, zij het een eenvoudige. Voor dit moment zullen we gemakshalve deze aanname maken.

Verder zijn er speciale deelverzamelingen van het domein gegeven, namelijk de verzamelingen *mensen* en *informatici*, waarbij *informatici* $\subseteq$ *mensen*. De eerstgenoemde verzameling bevat 3 elementen, de tweede 2 elementen. Daarnaast is de relatie *leuk vinden* in het diagram getekend met behulp van pijlen. Deze relatie bestaat tussen 2 paren van objecten.

Als we nu abstraheren van onze gedachten aan mensen, informatici, leuk vinden en logica, dan kunnen we de essentie van de structuur weergeven zoals we hebben gedaan in figuur 9.2. Deze structuur heeft als domein de verzameling $D = \{d_1, d_2, d_3, d_4\}$, met daarop de twee deelverzamelingen $R_1 = \{d_2, d_3, d_4\}$ en $R_2 = \{d_2, d_3\}$, en de relatie $R_3 = \{(d_2, d_1), (d_3, d_4)\}$ bestaande uit de geordende paren $(d_2, d_1)$ en $(d_3, d_4)$ overeenkomend met de twee pijlen.




Figuur 9.2: De abstracte structuur voor het diagram uit figuur 9.1.

Om niet altijd plaatjes te hoeven tekenen, is er een notatiewijze voor structuren. De voorbeeldstructuur, die we $\mathcal{A}$ noemen, wordt genoteerd als een *tupel*:

$$\mathcal{A} = \langle D; R_1, R_2, R_3; d_1 \rangle.$$

Dit tupel bevat naast het domein net zoveel elementen als het niet-logisch alfabet van de betreffende taal, in dit geval $M$, $I$, $L$ en $a$. De volgorde is hierbij van belang: $R_1$ dient als interpretatie van $M$, $R_2$ voor $I$, $R_3$ voor $L$, en $d_1$, tenslotte, voor $a$. Een structuur $\mathcal{A}$ legt dus een *verband* tussen de niet-logische symbolen van een eerste-ordetaal en bepaalde verzamelingen, relaties en elementen uit die structuur. Om dit verband expliciet te maken gebruiken we de volgende notatie:

$$M^{\mathcal{A}} = R_1, \;\; I^{\mathcal{A}} = R_2, \;\; L^{\mathcal{A}} = R_3, \;\; \text{en } a^{\mathcal{A}} = d_1.$$

Het is duidelijk dat beide premissen en ook de conclusie van de redenering waar zijn in $\mathcal{A}$. Immers,

$R_2 \subseteq R_1$ (alle informatici zijn mensen)

Er is een $o \in R_2$ (namelijk $d_2$) zodanig dat $(o, d_1) \in R_3$ (sommige logici vinden logica leuk)

$\therefore$ Er is een $o \in R_1$ (ook $d_2$) zodanig dat $(o, d_1) \in R_3$ (sommige mensen vinden logica leuk)

De structuur $\mathcal{A}$ is niet de enig mogelijke voor onze voorbeeldtaal. Als we uitgaan van ons oorspronkelijk idee dat het domein $D$ van $\mathcal{A}$ uit alle concrete en abstracte objecten uit de wereld bestaat, krijgen we een structuur waarin $R_1$ de verzameling van alle mensen voorstelt, $R_2$ die van alle informatici, $R_3$ die van alle paren objecten $(x, y)$ zodanig dat $x$ vindt $y$ leuk, en waarin $d_1$

het object logica voorstelt. Deze goed gedefinieerde structuur zou men, met betrekking tot de gegeven redenering, de *bedoelde structuur* kunnen noemen.

Er zijn ook hele andere structuren die op het eerste gezicht niets met de redenering te maken hebben. Beschouw bijvoorbeeld:

$$\mathcal{B} = \langle \mathbb{N}; S_1, S_2, \geq; 0 \rangle,$$

waarin $S_1$ de verzameling $\{0, 2, 4, \ldots\}$ van alle even natuurlijke getallen voorstelt, $S_2$ de verzameling $\{0, 4, 8, \ldots\}$ van alle viervouden, en $\geq$ de *groter dan of gelijk aan* ordening op $\mathbb{N}$. Zij vervolgens:

$$M^{\mathcal{B}} = S_1, \;\; I^{\mathcal{B}} = S_2, \;\; L^{\mathcal{A}} = \geq, \;\; \text{en } a^{\mathcal{A}} = 0.$$

Het is eenvoudig na te gaan dat de premissen en de conclusie van de voorbeeldredenering ook in deze structuur waar zijn. Dat brengt ons op de vraag of er voor de gegeven redenering structuren bestaan waarbij de premissen waar zijn, maar de conclusie onwaar. Het antwoord mag duidelijk zijn: neen. De redenering die we aan het begin van deze paragraaf gaven naar aanleiding van het diagram in figuur 9.1 laat zien dat dit onmogelijk is. Omdat zo'n structuur niet bestaat, is de redenering *geldig*. Een redenering is dus geldig indien iedere structuur die de premissen ervan waar maakt, ook de conclusie waar maakt.

Tot nu toe hebben we ons beperkt tot één- of tweeplaatsige predicaatsymbolen en namen. Indien we $n$-plaatsige predicaatsymbolen van een betekenis moeten voorzien, dan moeten we in de structuur een $n$-plaatsige relatie opnemen. Een $n$-plaatsige relatie is, wiskundig gezien, een verzameling van geordende $n$-tupels. Voor het geval $n = 2$ levert dat, zoals we hebben gezien, geordende paren op.

Als een eerste-ordetaal $m$-plaatsige functiesymbolen bevat, dan dienen structuren daarvoor $m$-plaatsige functies te bevatten. Wiskundig gezien zijn functies speciale verzamelingen. Zo kan men een éénplaatsige functie (bijvoorbeeld $f(x) = x + 1$ op het domein $\mathbb{N}$) opvatten als de verzameling van alle paren $(x, x + 1)$ waarbij $x \in \mathbb{N}$. In feite zijn functies dus speciale relaties: een $m$-plaatsige functie kan men opvatten als een speciale $(m+1)$-plaatsige relatie.

Laten we nu onze bevindingen resumeren. Een *structuur* $\mathcal{A}$ voor een eerste-ordetaal $L$ is tupel bestaande uit:

- een domein $D$ van objecten,
- verzamelingen en relaties over $D$ die als interpretatie dienen voor de predicaatsymbolen,
- functies op $D$ die als interpretatie dienen voor de functiesymbolen, en

- elementen van $D$ die als interpretatie dienen voor de namen van $L$.

We zullen een structuur $\mathcal{A}$ noteren als:

$$\mathcal{A} = \langle D; R_0, R_1, \ldots; g_0, g_1, \ldots; d_0, d_1, \ldots \rangle.$$

Hierin staat $D$ voor het domein van $\mathcal{A}$, $R_i$ voor een verzameling of relatie over $D$, $g_j$ voor een functie over $D$, en $d_k$ voor een element van $D$.

Met behulp van structuren kunnen we zinnen uit de predicatenlogica van een waarheidswaarde voorzien. Hierbij is de interpretatie van de logische connectieven gelijk aan die in de propositielogica. De betekenis van de kwantoren is in termen van het domein van een structuur uit te drukken. De universele kwantor drukt uit dat een bepaalde uitspraak waar is voor alle individuen uit het domein van de structuur, en de existentiële kwantor dat een uitspraak waar is voor tenminste één individu uit dat domein. In het geval van de formule $\forall x[I(x) \rightarrow M(x)]$ en voorbeeldstructuur $\mathcal{A}$ komt dit neer op: voor alle objecten $o \in D$ moet gelden als $o \in R_2$ dan $o \in R_1$. Maar dit is equivalent met $R_2 \subseteq R_1$, hetgeen ons vertrouwd voorkomt.

Als er formules met vrije variabelen in het spel zijn, moeten we over een methode beschikken om de vrije variabelen van een betekenis te voorzien. Hiervoor worden zogenaamde *bedelingen* gebruikt. Een bedeling bindt elementen uit het domein van een gegeven structuur aan variabelen. Zonder bedelingen zouden we niet in staat zijn om waarheidswaarden toe te kennen aan formules die vrije variabelen bevatten. Nemen we bijvoorbeeld de formule $M(x)$ en voorbeeldstructuur $\mathcal{A}$, dan kunnen we pas iets zeggen over de waarheid van $M(x)$ als we weten waarnaar de variabele $x$ verwijst. Nemen we een bedeling die $d_4$ bindt aan $x$, dan is $M(x)$ waar met betrekking tot $\mathcal{A}$ en de gegeven bedeling, aangezien $d_4 \in R_1$. Nemen we echter een bedeling die $d_1$ bindt aan $x$, dan wordt $M(x)$ onwaar. De semantiek van de predicatenlogica maakt dus gebruik van structuren en bedelingen. Een combinatie van een structuur en een bedeling wordt een *interpretatie* genoemd. In paragraaf 9.3 zullen we uiteenzetten hoe in het algemeen de waarheidswaarde van een formule kan worden bepaald met betrekking tot een gegeven interpretatie.

Of een redenering waarin formules met vrije variabelen voorkomen, *logisch geldig* is wordt nu niet gedefinieerd in termen van structuren maar interpretaties. Een redenering is logisch geldig, indien iedere interpretatie die de premissen van die redenering waar maakt, ook de conclusie ervan waar maakt. Deze definitie is geheel analoog aan die voor redeneringen in de propositielogica. Het verschil is dat in het geval van de predicatenlogica interpretaties veel complexere wiskundige objecten zijn dan interpretaties (valuaties) in de propositielogica.

## 9.2 Structuren, bedelingen en interpretaties

In deze paragraaf geven we formele definities van de begrippen *structuur*, *bedeling* en *interpretatie*.

**9.2.1** DEFINITIE **Structuur**
*Laat $L$ een eerste-ordetaal zijn die de predicaatsymbolen $P_0, P_1, \ldots$, de functiesymbolen $f_0, f_1, \ldots$ en de namen $c_0, c_1, \ldots$ bevat. Een* structuur $\mathcal{A}$ *voor de taal $L$ is dan gedefinieerd als een tupel:*

$$\mathcal{A} = \langle D; R_0, R_1, \ldots; g_0, g_1, \ldots; d_0, d_1, \ldots \rangle.$$

*Hierin is:*

1. *$D$ een niet-lege verzameling, het* domein *van de structuur $\mathcal{A}$ genaamd; $D$ wordt ook wel genoteerd als $|\mathcal{A}|$.*

2. *$R_i$ een $m_i$-plaatsige relatie over $D$, dus $R_i \subseteq D^{m_i}$, indien $P_i$ een $m_i$-plaatsig predicaatsymbool is ($i \in \mathbb{N}$).*

3. *$g_j$ een $n_j$-plaatsige functie op $D$, dus $g_j : D^{n_j} \to D$, indien $f_j$ een $n_j$-plaatsig functiesymbool is ($j \in \mathbb{N}$).*

4. *$d_k$ een element van $D$, dus $d_k \in D$ ($k \in \mathbb{N}$).*

*De relaties $R_i$, de functies $g_j$ en de elementen $d_k$ noemt men respectievelijk de* relaties, *de* functies *en de* constanten *van $\mathcal{A}$.*

*Aan de niet-logische symbolen van $L$ worden als volgt betekenissen, ofwel* denotaties, *toegekend in $\mathcal{A}$:*

1. *De denotatie van het predicaatsymbool $P_i$ is de relatie $R_i$ ($i \in \mathbb{N}$). Dit wordt genoteerd als $P_i^{\mathcal{A}} = R_i$.*

2. *De denotatie van het functiesymbool $f_j$ is de functie $g_j$ ($j \in \mathbb{N}$). Notatie: $f_j^{\mathcal{A}} = g_j$.*

3. *De denotatie van de naam $c_k$ is de constante $d_k$ ($k \in \mathbb{N}$). Notatie: $c_k^{\mathcal{A}} = d_k$.*

*In het bovenstaande hebben we aangenomen dat de taal $L$ aftelbaar oneindig veel predicaatsymbolen, functiesymbolen en namen bevat (dit is bijvoorbeeld het geval in de taal van de zuivere predicatenlogica). Al het gedefinieerde geldt echter ook in die gevallen waarin sprake is van* eindig *veel niet-logische symbolen.*

De toevoeging van objecten uit $\mathcal{A}$ aan symbolen uit $L$ is één op één. Dit wil zeggen dat met ieder predicaatsymbool, met ieder functiesymbool en met iedere naam uit het alfabet van $L$ precies één relatie, één functie en één constante van $\mathcal{A}$ correspondeert en omgekeerd.

**9.2.2** VOORBEELD Voorbeeld van een structuur.
Zij $P$ de taal van de rekenkunde (zie voorbeeld 8.2.3). Beschouw de volgende structuur voor $P$:

$$\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}; S, +, \cdot\,; 0 \rangle.$$

Deze heeft als domein de verzameling $\mathbb{N}$ der natuurlijke getallen. De functies van $\mathcal{N}$ zijn $S$ (de opvolgerfunctie $S(n) = n + 1$), $+$ en $\cdot$, en de constante is 0. De relatie tussen $P$ en $\mathcal{N}$ is zo dat: $\mathbf{s}^{\mathcal{N}} = S$, $\mathbf{+}^{\mathcal{N}} = +$, $\mathbf{\cdot}^{\mathcal{N}} = \cdot$ en $\mathbf{0}^{\mathcal{N}} = 0$.

Let op het verschil tussen de symbolen uit $P$ en de symbolen die we voor hun denotaties in de metataal gebruiken! De structuur $\mathcal{N}$ is de *bedoelde structuur* voor $P$, omdat het domein van de structuur de verzameling der natuurlijke getallen is, en de functiesymbolen op de verwachte manier worden geïnterpreteerd. Een bedoelde structuur wordt vaak een *standaardinterpretatie* genoemd.

Met behulp van deze structuur kunnen we, op informele wijze, een waarheidswaarde toekennen aan zinnen uit $P$. Zo geldt bijvoorbeeld dat de zin $\mathbf{0} \mathbf{+} \mathbf{s}(\mathbf{0}) = \mathbf{s}(\mathbf{0})$ waar is in $\mathcal{N}$, aangezien hier, semantisch gezien, staat dat $0 + S(0) = S(0)$ ofwel $0 + 1 = 1$.

Beschouw nu de open formule $\mathbf{s}(x) = y$. We kunnen voor deze formule niet de waarheidswaarde in $\mathcal{N}$ afleiden. Immers, $\mathcal{N}$ vertelt ons niet hoe de variabelen $x$ en $y$ dienen te worden geïnterpreteerd. ■

Om alle formules van een waarheidswaarde te kunnen voorzien, dus ook open formules, zijn *bedelingen* nodig. Een bedeling is een functie die aan alle variabelen van een eerste-ordetaal een element van het domein toekent.

**9.2.3** DEFINITIE **Bedeling**
*Zij $\mathcal{A}$ een structuur voor een eerste-ordetaal $L$, dan noemt men een functie $\beta : VAR \to |\mathcal{A}|$ een* bedeling.

*Zij verder $x \in VAR$ en $a \in |\mathcal{A}|$, dan is $\beta[x \mapsto a] : VAR \to |\mathcal{A}|$ de bedeling die als volgt is gedefinieerd:*

$$\beta[x \mapsto a](y) = \begin{cases} \beta(y) & \text{als } y \neq x, \\ a & \text{als } y = x. \end{cases}$$

*Dit betekent dat de bedeling $\beta[x \mapsto a]$ voor het argument $x$ de waarde $a$ heeft, maar verder gelijk is aan $\beta$.*

**9.2.4** VOORBEELD Voorbeeld van een bedeling.
Zij $P$ de taal van de rekenkunde en $\mathcal{N}$ de bijbehorende structuur zoals gedefinieerd in voorbeeld 9.2.2. Zij $\beta$ een bedeling die zodanig is dat $\beta(x) = 12$ en $\beta(y) = 13$. Op basis van $\mathcal{N}$ en $\beta$ kunnen we een waarheidswaarde toekennen aan de formule $\mathbf{s}\,(x) = y$. Deze formule is voor deze keuze van $\beta$ waar in $\mathcal{N}$, aangezien $S(12) = 13$ ofwel $12+1 = 13$. Nemen we bijvoorbeeld $\beta(x) = \beta(y) = 17$, dan is de formule onwaar. ■

Een structuur en een bedeling vormen samen een interpretatie. Met behulp van interpretaties kunnen we waarheidswaarde toekennen aan zowel gesloten als open formules. De formele definities hiervoor zullen in de volgende paragraaf worden gegeven.

**9.2.5** DEFINITIE **Interpretatie**
*Zij $L$ een eerste-ordetaal, $\mathcal{A}$ een structuur voor $L$ en $\beta$ een bedeling. Dan wordt het geordende paar $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle$ een* interpretatie *van $L$ genoemd.*

**9.2.6** VOORBEELD Voorbeeld van een interpretatie.
Zij $P$ de taal van de rekenkunde, $\mathcal{N}$ de standaardinterpretatie voor $P$ en $\beta$ een bedeling waarvoor $\beta(x) = 2$. Het geordende paar $\langle \mathcal{N}, \beta \rangle$ is dan een interpretatie voor $P$.

Beschouw de formule $\mathbf{s}\,(\mathbf{s}\,(\mathbf{0})) \cdot x = \mathbf{s}\,(\mathbf{s}\,(\mathbf{s}\,(\mathbf{s}\,(\mathbf{0}))))$. Deze formule heeft de waarheidswaarde *waar* in $\langle \mathcal{N}, \beta \rangle$, want $S(S(0)) \cdot 2 = S(S(S(S(0))))$, wat equivalent is met $2 \cdot 2 = 4$. ■

## 9.3 Interpretatie van termen en formules

In deze paragraaf zullen we de waarheidswaarde van een formule onder een gegeven interpretatie definiëren. Ter illustratie beginnen we met een voorbeeld waarin we de zaken vereenvoudigd voorstellen.

**9.3.1** VOORBEELD Waarheidswaarde van een formule.
Zij $L$ een eerste-ordetaal waarvan het niet-logische alfabet uitsluitend het tweeplaatsig predicaatsymbool $P$ bevat. Laat verder $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}; < \rangle$ en $\mathcal{B} = \langle \mathbb{Z}; < \rangle$ structuren zijn voor $L$, zodanig dat $P^{\mathcal{A}} = <$ en $P^{\mathcal{B}} = <$ (daarbij stelt $<$ uiteraard de 'kleiner-dan'-relatie voor).

Beschouw nu de formule $F_1 = \forall y \exists x P(x, y)$. We zullen nu nagaan wat de waarheidswaarde is van de formule $F_1$ in zowel $\mathcal{A}$ als $\mathcal{B}$. Aangezien $F_1$ geen vrije variabelen bevat, is hiervoor geen bedeling nodig. Om de waarheidswaarde van $F_1$ in $\mathcal{A}$ te bepalen, 'vertalen' we de formule in termen van de structuur $\mathcal{A}$. De vertaling luidt dan: voor ieder natuurlijk getal $y$ bestaat er een natuurlijk

getal $x$ zodanig dat $x < y$. Aangezien deze uitspraak niet geldig is in $\mathcal{A}$ —voor $y = 0$ bestaat er geen natuurlijke getal $x$ met $x < y$—, concluderen we dat $F_1$ onwaar is in $\mathcal{A}$. Dezelfde procedure passen we toe om de waarheidswaarde van $F_1$ in $\mathcal{B}$ te bepalen. De transcriptie van $F_1$ luidt nu: voor ieder geheel getal $y$ bestaat er een geheel getal $x$ zodanig dat $x < y$. Deze uitspraak is geldig in $\mathcal{B}$, zodat $F_1$ waar is in $\mathcal{B}$.

Zij $F_2$ de formule $\forall x \neg P(x, y)$. Om de waarheidswaarde van deze formule te bepalen met betrekking tot $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ is nu een bedeling nodig die een waarde toekent aan de vrije variabele $y$. Zij $\beta$ een bedeling zodanig dat $\beta(y) = 0$. We zullen nu de waarheidswaarde van $F_2$ bepalen in de interpretaties $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle$ en $\langle \mathcal{B}, \beta \rangle$. Omdat $y$ wordt geïnterpreteerd als het natuurlijke (of gehele) getal 0, kunnen we $F_2$ in interpretatie $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle$ parafraseren als: voor ieder natuurlijk getal $x$ geldt dat niet $x < 0$. Deze uitspraak is uiteraard geldig, zodat $F_2$ wordt vervuld door $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle$. De parafrase van $F_2$ in $\langle \mathcal{B}, \beta \rangle$ luidt: voor elk geheel getal $x$ geldt dat niet $x < 0$. Deze uitspraak is ongeldig aangezien er negatieve gehele getallen bestaan. Derhalve vervult $\langle \mathcal{B}, \beta \rangle$ de formule $F_2$ niet. ■

In het onderstaande veronderstellen we dat $L$ een eerste-ordetaal is met predicaatsymbolen $P_0, P_1, \ldots$, functiesymbolen $f_0, f_1, \ldots$ en namen $c_0, c_1, \ldots$. We zullen definiëren wanneer een formule vervuld wordt door een interpretatie $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle$. Hiertoe definiëren we eerst hoe de termen van $L$ in $\mathcal{A}$ worden geïnterpreteerd.

**9.3.2** DEFINITIE **Denotatie van termen**
*Zij $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle$ een interpretatie van $L$. Aan iedere term $t \in TERM$ van $L$ wordt als volgt een* denotatie $t^{\mathcal{A},\beta}$ *toegekend:*

$$\begin{aligned} x^{\mathcal{A},\beta} &= \beta(x), \\ c^{\mathcal{A},\beta} &= c^{\mathcal{A}}, \\ f(t_1, \ldots, t_n)^{\mathcal{A},\beta} &= f^{\mathcal{A}}({t_1}^{\mathcal{A},\beta}, \ldots, {t_n}^{\mathcal{A},\beta}). \end{aligned}$$

*Voor de betekenis van $c^{\mathcal{A}}$ en $f^{\mathcal{A}}$ wordt naar definitie 9.2.1 verwezen. Wegens stelling 8.3.1 heeft het bovenstaande stelsel recurrente betrekkingen een unieke oplossing, zijnde de functie $_^{\mathcal{A},\beta} : TERM \to |\mathcal{A}|$.*

Nu zullen we definiëren wat de *waarheidswaarde* van een formule $F$ is met betrekking tot een interpretatie $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle$ van $L$. Het moeilijkst daarbij is de interpretatie van formules die kwantoren bezitten. Daarom eerst een voorbeeld.

**9.3.3** VOORBEELD Interpretatie kwantoren.
Zij $L$ de eerste-ordetaal die alleen het éénplaatsige predicaatsymbool $P$ bevat,

en zij $\mathcal{Q}$ de structuur $\langle \mathbb{Q}; T \rangle$ waarbij $\mathbb{Q}$ de verzameling der rationale getallen voorstelt en $T$ de verzameling der rationale getallen die groter zijn dan 0. Evident geldt dat $T \subset \mathbb{Q}$. Stel $P^{\mathcal{Q}} = T$. Laat verder $\beta$ een bedeling zijn.

Zij $F$ de formule $\forall x P(x)$. We willen nu de waarheidswaarde van $F$ recursief kunnen uitdrukken, gegeven de waarheidswaarde van $P(x)$ met betrekking tot $\langle \mathcal{Q}, \beta \rangle$ en het feit dat we weten dat $x$ de vrije variabele is in $P(x)$.

We beginnen met op te merken dat de formule $P(x)$ waar is met betrekking tot $\langle \mathcal{Q}, \beta \rangle$ indien het individu dat $x$ aanduidt (de denotatie van $x$), de eigenschap bezit die $P$ aanduidt (de denotatie van $P$); formeel: indien $x^{\mathcal{Q},\beta} \in P^{\mathcal{Q}}$, hetgeen het geval is indien $\beta(x) \in T$. In analogie met de notatie $v(F) = 1$ waarbij $v$ een valuatie is in de propositielogica en $F$ een propositie, zullen we schrijven $v^{\mathcal{Q},\beta}(P(x)) = 1$ als $P(x)$ waar is met betrekking tot $\langle \mathcal{Q}, \beta \rangle$, dus indien $\beta(x) \in T$.

Intuïtief gezien is $\forall x P(x)$ waar indien voor alle $q$ in het domein $\mathbb{Q}$ van onze voorbeeldstructuur $\langle \mathbb{Q}; T \rangle$ geldt dat $q$ de door $P$ aangeduide eigenschap $T$ bezit. Dit kan als volgt worden uitgedrukt:

$$v^{\mathcal{Q},\beta}(\forall x P(x)) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \text{voor alle } q \in \mathbb{Q} \text{ geldt } v^{\mathcal{Q},\beta[x \mapsto q]}(P(x)) = 1.$$

Op deze wijze wordt de $x$ in $P(x)$ 'gekoppeld' aan de $q$ in $\beta[x \mapsto q]$. Bedenk namelijk dat $x^{\mathcal{Q},\beta[x \mapsto q]} = \beta[x \mapsto q](x) = q$, zodat $v^{\mathcal{Q},\beta[x \mapsto q]}(P(x)) = 1$ dan en slechts dan als $q \in T$. Aangezien niet voor alle $q \in \mathcal{Q}$ geldt $q \in T$, is $v^{\mathcal{Q},\beta}(\forall x P(x)) = 0$. Dit geldt trouwens voor alle $\beta$.

Op analoge wijze kunnen we analyseren wanneer $\exists x P(x)$ waar is met betrekking tot $\langle \mathcal{Q}, \beta \rangle$:

$$v^{\mathcal{Q},\beta}(\exists x P(x)) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \text{er is een } q \in \mathbb{Q} \text{ zodat } v^{\mathcal{Q},\beta[x \mapsto q]}(P(x)) = 1.$$

Omdat $T \neq \emptyset$, volgt hieruit dat $v^{\mathcal{Q},\beta}(\exists x P(x)) = 1$. Dit geldt wederom voor alle mogelijke $\beta$'s. ■

Het bovenstaande voorbeeld motiveert de volgende definitie.

**9.3.4** Definitie **Waarheidswaarde van formules**
*Zij $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle$ een interpretatie van $L$. Aan iedere formule $F \in FORM$ van $L$ wordt door de functie $v^{\mathcal{A},\beta} : FORM \to \mathbb{B}$ een* waarheidswaarde *$v^{\mathcal{A},\beta}(F) \in \mathbb{B}$ toegekend in overeenstemming met de volgende recurrente betrekkingen:*

**Atomaire formules**

$$v^{\mathcal{A},\beta}(P(t_1, \ldots, t_n)) = \begin{cases} 1 & \textit{als } ({t_1}^{\mathcal{A},\beta}, \ldots, {t_n}^{\mathcal{A},\beta}) \in P^{\mathcal{A}}, \\ 0 & \textit{in de overige gevallen.} \end{cases}$$

$$v^{\mathcal{A},\beta}(t_1 = t_2) = \begin{cases} 1 & \textit{als } {t_1}^{\mathcal{A},\beta} = {t_2}^{\mathcal{A},\beta}, \\ 0 & \textit{in de overige gevallen.} \end{cases}$$

*Het symbool $=$ zoals het voorkomt in ${t_1}^{\mathcal{A},\beta} = {t_2}^{\mathcal{A},\beta}$, stelt de gelijkheidsrelatie op $|\mathcal{A}|$ voor. Voor de definitie van $P^{\mathcal{A}}$ zie definitie 9.2.1.*

**Niet-atomaire formules**

$$\begin{aligned}
v^{\mathcal{A},\beta}(A \star B) &= f_\star(v^{\mathcal{A},\beta}(A), v^{\mathcal{A},\beta}(B)),\\
v^{\mathcal{A},\beta}(\neg A) &= f_\neg(v^{\mathcal{A},\beta}(A)),\\
v^{\mathcal{A},\beta}(\forall x A) &= \begin{cases} 1 & \textit{als voor alle } a \in |\mathcal{A}| \textit{ geldt } v^{\mathcal{A},\beta[x\mapsto a]}(A) = 1,\\ 0 & \textit{in de overige gevallen.}\end{cases}\\
v^{\mathcal{A},\beta}(\exists x A) &= \begin{cases} 1 & \textit{als er een } a \in |\mathcal{A}| \textit{ is zodat } v^{\mathcal{A},\beta[x\mapsto a]}(A) = 1,\\ 0 & \textit{in de overige gevallen.}\end{cases}
\end{aligned}$$

*De functies $f_\star$ en $f_\neg$ zijn gedefinieerd in paragraaf 3.1.*

Met behulp van stelling 8.3.2 kan men bewijzen dat het hierboven staande stelsel recurrente betrekkingen een unieke oplossing bezit, zijnde een functie $v^{\mathcal{A},\beta} : FORM \to \mathbb{B}$.

Merk op dat de bovenstaande definitie gebruik maakt van definitie 9.3.2.

**9.3.5** Voorbeeld Waarheidswaarde van formules.
Zij $P$ de taal van de rekenkunde en $\mathcal{N}$ de bijbehorende standaardinterpretatie (zie voorbeeld 9.2.2). Dan geldt voor alle bedelingen $\beta$:

$$\begin{aligned}
& v^{\mathcal{N},\beta}(\forall x \neg(\mathbf{s}\,(x) = \mathbf{0})) = 1\\
& \quad\Leftrightarrow \quad \text{voor alle } n \in \mathbb{N} \text{ geldt } v^{\mathcal{N},\beta[x\mapsto n]}(\neg(\mathbf{s}\,(x) = \mathbf{0})) = 1,\\
& \quad\Leftrightarrow \quad \text{voor alle } n \in \mathbb{N} \text{ geldt } v^{\mathcal{N},\beta[x\mapsto n]}(\mathbf{s}\,(x) = \mathbf{0}) = 0,\\
& \quad\Leftrightarrow \quad \text{voor alle } n \in \mathbb{N} \text{ geldt } \mathbf{s}\,(x)^{\mathcal{N},\beta[x\mapsto n]} \neq \mathbf{0}^{\mathcal{N},\beta[x\mapsto n]},\\
& \quad\Leftrightarrow \quad \text{voor alle } n \in \mathbb{N} \text{ geldt } \mathbf{s}^{\mathcal{N}}(x^{\mathcal{N},\beta[x\mapsto n]}) \neq \mathbf{0}^{\mathcal{N}},\\
& \quad\Leftrightarrow \quad \text{voor alle } n \in \mathbb{N} \text{ geldt } S(\beta[x\mapsto n](x)) \neq 0,\\
& \quad\Leftrightarrow \quad \text{voor alle } n \in \mathbb{N} \text{ geldt } S(n) \neq 0.
\end{aligned}$$

Aangezien voor geen enkel natuurlijk getal $n$ de opvolger $S(n)$ van $n$ gelijk is aan 0, volgt hieruit voor alle $\beta$ dat $v^{\mathcal{N},\beta}(\forall x \neg(\mathbf{s}\,(x) = \mathbf{0})) = 1$. ∎

## 9.4 Model en logisch gevolg

De notatie $v^{\mathcal{A},\beta}(F)$ is niet altijd handig. We voeren daarom een andere notatie in.

**9.4.1** Definitie **Vervulbaarheidsrelatie**
*Voor iedere interpretatie $\langle \mathcal{A}, \beta\rangle$ en voor iedere formule $F \in FORM$ definiëren we:*

$$\langle \mathcal{A}, \beta\rangle \models F \quad\Leftrightarrow\quad v^{\mathcal{A},\beta}(F) = 1.$$

*De relatie* $\models$ *wordt de* vervulbaarheidsrelatie *genoemd.* $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models F$ *betekent:* $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle$ vervult $F$.

Bedelingen zijn bedoeld om de vrije variabelen in een term of formule van een denotatie te voorzien. Ze worden ook gebruikt bij de behandeling van de kwantoren. Dit is alleen een technische truc om de betekenis van de kwantoren te relateren aan het domein van een structuur.

Als een formule geen vrije variabelen bevat, is de bedeling irrelevant voor de waarheidswaarde van die formule. Als een formule wel vrije variabelen bevat, heeft de bedeling alleen effect op deze vrije variabelen. Anders gezegd, twee bedelingen die aan de vrije variabelen in een formule dezelfde denotaties toekennen, zijn uitwisselbaar met betrekking tot de waarheidswaarde van die formule. Iets dergelijks geldt natuurlijk ook voor termen.

Het bovenstaande is te generaliseren voor interpretaties. Als twee interpretaties aan alle variabelen en niet-logische symbolen in een term of formule dezelfde betekenis toekennen, dan zal die term of formule dezelfde denotatie, respectievelijk waarheidswaarde, bezitten in deze interpretaties. Dit is de inhoud van de volgende stelling.

**9.4.2** STELLING **Interpretatiestelling**
*Zij* $t \in TERM$ *en* $F \in FORM$ *in een eerste-ordetaal* $L$. *Zij verder* $\langle \mathcal{A}_1, \beta_1 \rangle$ *en* $\langle \mathcal{A}_2, \beta_2 \rangle$ *interpretaties voor* $L$, *zodanig dat* $|\mathcal{A}_1| = |\mathcal{A}_2|$ *en* $\beta_1(x) = \beta_2(x)$ *voor alle* $x \in VV(t) \cup VV(F)$ *en zodanig dat* $S^{\mathcal{A}_1} = S^{\mathcal{A}_2}$ *voor alle niet-logische symbolen* $S$ *in* $F$ *en* $t$, *dan geldt:*

$$\begin{array}{ccc} t^{\mathcal{A}_1,\beta_1} & = & t^{\mathcal{A}_2,\beta_2}, \\ \langle \mathcal{A}_1, \beta_1 \rangle \models F & \Leftrightarrow & \langle \mathcal{A}_2, \beta_2 \rangle \models F. \end{array}$$

BEWIJS *Door middel van structurele inductie over TERM en FORM.* ∎

**9.4.3** COROLLARIUM *Zij* $F \in ZIN$ *een zin in een eerste-ordetaal* $L$ *en* $\mathcal{A}$ *een structuur voor* $L$, *dan geldt ofwel voor alle bedelingen* $\beta$, *ofwel voor geen enkele bedeling* $\beta$ *dat* $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models F$.

De volgende definities komen vrijwel overeen met de definities van de corresponderende begrippen in de propositielogica (zie definitie 3.2.1). We noemen een interpretatie een *model* van een formule (of een verzameling van formules), indien die interpretatie de formule (respectievelijk alle formules in die verzameling) waar maakt. Verder noemt men een formule *waar* in een structuur als het er niet toe doet welke bedeling gekozen wordt. Dit geldt bijvoorbeeld voor de formule $(x = x)$. Hierin is $x$ weliswaar een vrije variabele, maar de keuze van de bedeling is niet van belang. Sterker nog, het maakt zelfs niet uit

welke structuur men neemt: de formule is *algemeen geldig*. Tenslotte zegt men dat een formule het *logisch gevolg* is van een gegeven verzameling formules, als ieder model van die verzameling tevens een model is voor de gegeven formule.

**9.4.4** DEFINITIE **Model, algemene geldigheid en logisch gevolg**

1. *Een* model *voor een formule $F \in FORM$ is een interpretatie $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle$ zodanig dat $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models F$. Men noemt $F$* vervulbaar *indien $F$ een model bezit. Als $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle$ een model is voor $F$, dan zegt men ook dat $F$* vervuld *wordt door $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle$.*

2. *Een* model *van een verzameling $\Gamma \subseteq FORM$ is een interpretatie $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle$ zodanig dat $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models F$ voor alle $F \in \Gamma$. Per definitie is iedere interpretatie een model van de lege verzameling. Men noemt $\Gamma$* vervulbaar *indien $\Gamma$ een model bezit. Als $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle$ een model is voor $\Gamma$, dan zegt men ook dat $\Gamma$* vervuld *wordt door $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle$. Dit noteert men als $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models \Gamma$.*

3. *Een formule $F$ is* waar *in een structuur $\mathcal{A}$, notatie $\mathcal{A} \models F$, indien voor alle bedelingen $\beta$ geldt dat $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models F$.*

4. *Een formule $F$ is* algemeen geldig, *notatie $\models F$, als voor iedere interpretatie $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle$ geldt dat $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models F$.*

5. *Een formule $F$ is het* logisch gevolg *van een verzameling $\Gamma \subseteq FORM$, notatie $\Gamma \models F$, als ieder model van $\Gamma$ tevens een model is voor $F$. Anders gezegd, indien voor alle interpretaties $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle$ geldt:*

$$\langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models \Gamma \quad \Rightarrow \quad \langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models F.$$

Hebben we een redenering van de vorm $\Gamma, \therefore F$, dan noemen we deze *logisch geldig* indien $F$ een logisch gevolg is van $\Gamma$. Niet alle redeneringen zijn logisch geldig. In zo'n geval is er een *tegenvoorbeeld*, een interpretatie die een model is van $\Gamma$, maar geen model van $F$.

**9.4.5** DEFINITIE **Logisch geldige redenering en tegenvoorbeeld**
*Zij $\Gamma \subset FORM$ en $F \in FORM$.*

1. *De redenering $\Gamma, \therefore F$ is* logisch geldig, *dan en slechts dan als $\Gamma \models F$.*

2. *Een* tegenvoorbeeld *voor de redenering $\Gamma, \therefore F$ is een interpretatie $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle$ zodanig dat $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models \Gamma$, maar niet $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models F$.*

Wegens corollarium 9.4.3 en definitie 9.4.4 kunnen we voor zinnen interpretaties identificeren met structuren: de bedelingen doen er niet toe. Dit betekent dat we ook een model voor een zin kunnen identificeren met de structuur van dat model. Een model voor een zin is dus een structuur die de zin waar maakt. Evenzo is een model voor een verzameling zinnen een structuur die alle zinnen uit die verzameling waar maakt.

Dezelfde identificatie is mogelijk bij tegenvoorbeelden voor ongeldige redeneringen waarvan de premissen en de conclusie zinnen zijn: voor de specificatie van een tegenvoorbeeld kan men dan volstaan met een structuur (zie ook hoofdstuk 11).

**9.4.6** DEFINITIE **Universele afsluiting van formules**
*Zij $F \in FORM$ met $VV(F) = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\}$. De* universele afsluiting *van $F$, notatie $U(F)$, is dan gedefinieerd door:*

$$U(F) = \forall x_{i_1} \ldots \forall x_{i_n} F.$$

*De volgorde van de variabelen in de kwantoren $\forall x_{i_1} \ldots \forall x_{i_n}$ mag willekeurig zijn (zie stelling 10.1.10). Voor een zin $F \in ZIN$ geldt per definitie $U(F) = F$.*

**9.4.7** STELLING *Als $F \in FORM$ een formule is uit een eerste-ordetaal $L$ en $\mathcal{A}$ een structuur voor $L$, dan geldt:*

$$\mathcal{A} \models F \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{A} \models U(F).$$

BEWIJS Het bewijs is met inductie naar het aantal vrije variabelen in $F$.

1. Basisstap.
   Als $VV(F) = \emptyset$, dan geldt de stelling aangezien in dat geval $U(F) = F$.
2. Inductiestap.
   De inductiehypothese luidt dat de stelling geldig is voor formules met $n$ vrije variabelen.
   Stel dat het aantal vrije variabelen in $F$ gelijk is aan $n+1$, dat $x \in VV(F)$, en stel dat $\mathcal{A} \models F$. Dit betekent:

   voor alle $\beta$ geldt $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models F$.

   Dit is gelijkwaardig met:

   voor alle $\beta$ en voor alle $a \in |\mathcal{A}|$ geldt $\langle \mathcal{A}, \beta[x \mapsto a] \rangle \models F$,

   hetgeen gelijkwaardig is met:

   voor alle $\beta$ geldt $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models \forall x F$.

   Maar dit betekent dat:

   $$\mathcal{A} \models \forall x F. \tag{9.3}$$

   Hierop mogen we de inductiehypothese toepassen, aangezien $\forall x F$ precies $n$ vrije variabelen bevat. Uitspraak 9.3 is dan gelijkwaardig met:

   $$\mathcal{A} \models U(\forall x F),$$

   hetgeen te schrijven is als $\mathcal{A} \models U(F)$, aangezien $U(\forall x F) = U(F)$. Hiermee is de stelling bewezen. ■

## 9.5 Opgaven

1. Zij $L$ de eerste-ordetaal bestaande uit het tweeplaatsige predicaatsymbool $P$, het éénplaatsige predicaatsymbool $S$, de namen $c$ en $d$, en het gelijkheidssymbool $=$. Zij vervolgens $\mathcal{A}$ de structuur voor $L$ die gedefinieerd is door:

   $$\mathcal{A} = \langle D; R_0, R_1; 1, 2\rangle$$

   waarbij:

   - $D = \{1, 2, 3, 4\}$,
   - $P^{\mathcal{A}} = R_0 = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4)\}$,
   - $S^{\mathcal{A}} = R_1 = \{2\}$,
   - $c^{\mathcal{A}} = 1$, en
   - $d^{\mathcal{A}} = 2$.

   Zij verder gegeven een bedeling $\beta$ die voldoet aan: $\beta(x) = 1$, $\beta(y) = 1$ en $\beta(z) = 2$.

   Ga na voor de volgende formules $F$ of $\langle \mathcal{A}, \beta\rangle \models F$.

   (a) $x = y$.

   (b) $x = z$.

   (c) $\neg S(c) \rightarrow S(d)$.

   (d) $\exists x P(x, x)$.

   (e) $\forall x[\neg S(x) \vee \exists y \exists z[P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge \neg(y = z)]]$.

   (f) $[\forall x S(x) \vee \forall x \forall y P(x, y)] \rightarrow \forall x \forall y[S(x) \vee P(x, y)]$.

2. Beschouw de formules (a), (e) en (f) uit de vorige opgave. Geef, indien mogelijk, voor ieder van deze formules een interpretatie $\langle \mathcal{A}, \beta\rangle$ zodanig dat:

   (a) formule (a) niet vervuld wordt door $\langle \mathcal{A}, \beta\rangle$.

   (b) formule (e) niet vervuld wordt door $\langle \mathcal{A}, \beta\rangle$.

   (c) formule (f) niet vervuld wordt door $\langle \mathcal{A}, \beta\rangle$.

3. Geef een bewijs van de interpretatiestelling (9.4.2).