Hoofdstuk 10

Stellingen over de Predicatenlogica

In dit hoofdstuk zullen we een aantal stellingen bewijzen over de predicatenlogica. Het betreft meta-stellingen die uiteraard geformuleerd zijn in de metataal. In paragraaf 10.1 introduceren we kwantoren voor de metataal, de equivalentierelatie $\approx$ op formules en bespreken we de distributie van de kwantoren over de logische connectieven. Paragraaf 10.2 gaat over de eigenschappen van substitutie en paragraaf 10.3, tenslotte, handelt over normaalvormen voor formules van de predicatenlogica.

10.1 Eigenschappen van kwantoren

In paragraaf 4.1 hebben we metatalige connectieven geïntroduceerd. Nu zullen we metatalige kwantoren invoeren: $\forall$ met de betekenis *voor alle*, en $\exists$ met de betekenis *er bestaat een*. Deze metakwantoren gebruiken we in de onderstaande stelling. Deze legt het verband tussen de connectieven en kwantoren uit de objecttaal en die uit de metataal.

10.1.1 Stelling *Zij $A, B \in FORM$, en zij $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle$ een interpretatie, dan geldt:*

1. $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models A \wedge B \quad \Leftrightarrow \quad \langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models A \quad \& \quad \langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models B,$
2. $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models A \vee B \quad \Leftrightarrow \quad \langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models A \quad \bigvee \quad \langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models B,$
3. $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models A \rightarrow B \quad \Leftrightarrow \quad [\, \langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models A \quad \Rightarrow \quad \langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models B \,],$
4. $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models \neg A \quad \Leftrightarrow \quad \sim \langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models A,$
5. $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models A \leftrightarrow B \quad \Leftrightarrow \quad [\, \langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models A \quad \Leftrightarrow \quad \langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models B \,],$
6. $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models \forall x A \quad \Leftrightarrow \quad \forall a \in |\mathcal{A}| \cdot \langle \mathcal{A}, \beta[x \mapsto a] \rangle \models A,$
7. $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models \exists x A \quad \Leftrightarrow \quad \exists a \in |\mathcal{A}| \cdot \langle \mathcal{A}, \beta[x \mapsto a] \rangle \models A.$

BEWIJS De stelling volgt meteen uit definitie 9.3.4. ■

De bovenstaande stelling geldt ook indien men voor A en B *zinnen* substitueert, en voor een interpretatie $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle$ een structuur $\mathcal{A}$. Dat dit in het algemeen niet geldt voor formules die vrije variabelen bevatten, blijkt uit het volgende voorbeeld.

10.1.2 VOORBEELD Als $A, B \in FORM$ en $\mathcal{A}$ een structuur is, dan geldt in het algemeen niet:

$$\mathcal{A} \models A \rightarrow B \quad \Leftrightarrow \quad [\mathcal{A} \models A \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A} \models B\,].$$

Dit is als volgt in te zien. Laat een eerste-ordetaal L alleen de éénplaatsige predicaatsymbolen P en Q bevatten. Beschouw nu de structuur $\mathcal{Z} = \langle \mathbb{Z}; E, O \rangle$ waarbij E de verzameling der even gehele getallen voorstelt, en O die der oneven. Stel dat $P^{\mathcal{Z}} = E$ en $Q^{\mathcal{Z}} = O$.

Enerzijds geldt nu noch $\mathcal{Z} \models P(x)$, noch $\mathcal{Z} \models Q(x)$. Dit betekent dat de metabewering:

$$\mathcal{Z} \models P(x) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{Z} \models Q(x)$$

geldig is. Anderzijds geldt echter niet dat $\mathcal{Z} \models P(x) \rightarrow Q(x)$. Hiermee is een tegenvoorbeeld gegeven. ■

Zoals we in definitie 4.1.5 hebben gezien, is een equivalentierelatie een reflexieve, symmetrische en transitieve relatie. Net als in de propositielogica kunnen we een equivalentierelatie op formules definiëren.

10.1.3 DEFINITIE **Equivalentie van formules**
Twee formules $A, B \in FORM$ noemt men equivalent, *notatie $A \approx B$, als geldt $\models A \leftrightarrow B$.*

10.1.4 STELLING *De relatie $\approx$ is een equivalentierelatie.*

BEWIJS Analoog aan het bewijs van stelling 4.1.7. ■

Equivalentierelaties geven aanleiding tot zogenaamde *equivalentieklassen* die samen een *partitie* vormen. In het volgende hoofdstuk over de boommethode zullen we van het begrip equivalentieklasse gebruik maken.

10.1.5 DEFINITIE **Equivalentieklasse**
Zij R een equivalentierelatie op D. Als $a \in D$, dan noemt men de verzameling:

$$[a]_R = \{b \in D \mid aRb\}$$

de equivalentieklasse *van a. Men noemt a een* representant *van $[a]_R$.*

Ieder element $b \in [a]_R$ kan als representant van $[a]_R$ worden gekozen. Immers, $[b]_R = [a]_R$ dan en slechts dan als $b \in [a]_R$.

10.1.6 Definitie **Partitie**
Een klasse $\mathcal{C}$ van deelverzamelingen van een gegeven verzameling D is een partitie *van D dan en slechts dan als aan de volgende voorwaarden is voldaan:*

1. $A \in \mathcal{C} \quad \Rightarrow \quad A \neq \emptyset$;
2. $A, B \in \mathcal{C} \quad \Rightarrow \quad [\, A = B \quad \bigvee \quad A \cap B = \emptyset \,]$;
3. $\bigcup \mathcal{C} = D$.

Een partitie van een verzameling D is dus een klasse van niet-lege, disjuncte deelverzamelingen van D waarvan de vereniging gelijk is aan D.

10.1.7 Voorbeeld Partitie.
Beschouw de relatie $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ uit voorbeeld 4.1.6 die als volgt gedefinieerd is: xRy geldt dan en slechts dan als x en y na deling door 7 dezelfde rest hebben. Deze relatie resulteert in de partitie $\{K_0, K_1, \ldots, K_6\}$, waarin $K_i = \{n \in \mathbb{N} \mid n$ modulo 7 is gelijk aan $i\}$. Zo geldt bijvoorbeeld dat $K_3 = \{3, 10, 17, 24, \ldots\}$.

Het is niet moeilijk om de volgende stelling te bewijzen.

10.1.8 Stelling *Als R een equivalentierelatie is op D, dan is:*

$$\{\ [a]_R \mid a \in D\}$$

een partitie van D.

Als de formules A en B equivalent zijn, dus als $A \approx B$, dan geldt voor alle interpretaties $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle$ dat $v^{\mathcal{A},\beta}(A) = v^{\mathcal{A},\beta}(B)$. Dit betekent dat de waarheidswaarde van een formule F met betrekking tot een interpretatie $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle$ niet verandert, als men in A sommige voorkomens van A door B vervangt.

10.1.9 Stelling **Vervangingsstelling**
Zij $F, A, B \in FORM$ en zij A een subformule van F. Als $A \approx B$ en G een formule is verkregen uit F door sommige voorkomens van A door B te vervangen, dan $F \approx G$.

Bewijs *Door middel van structurele inductie over F:*

1. *F is een atomaire formule.*
   Als A een subformule van F is, dan geldt $A = F$. Vervanging van A door B levert $G = B$. Evident geldt dan $F \approx G$. Wordt A niet door B vervangen, dan is $G = F$ en dus $F \approx G$.

2. *$F = \neg C$ voor een $C \in FORM$.*
   Als $F = A$, dan volgt het resultaat op precies dezelfde wijze als bij geval 1 hierboven.
   Als A een subformule is van C en C' is verkregen door in C sommige voorkomens van A door B te vervangen, dan volgt uit de inductiehypothese dat $C \approx C'$. Hieruit volgt voor alle interpretaties $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle$:
   $$v^{\mathcal{A},\beta}(F) = f_\neg(v^{\mathcal{A},\beta}(C)) = f_\neg(v^{\mathcal{A},\beta}(C')) = v^{\mathcal{A},\beta}(G).$$

De overige gevallen worden aan de lezer overgelaten. ■

De volgende stelling drukt uit dat de volgorde van kwantoren die tot dezelfde soort behoren (met de daarbij behorende variabelen), er niets toe doet. Bovendien kunnen kwantoren over variabelen die niet voorkomen in een formule vervallen.

10.1.10 Stelling *Zij $A \in FORM$, dan geldt:*

1. $\forall x \forall y A \approx \forall y \forall x A$,
2. $\exists x \exists y A \approx \exists y \exists x A$,
3. $\forall x A \approx A$ *als* $x \notin VV(A)$,
4. $\exists x A \approx A$ *als* $x \notin VV(A)$.

Bewijs Triviaal. ■

Er bestaat een mooi verband tussen de kwantoren $\forall$ en $\exists$.

10.1.11 Stelling *Zij $A \in FORM$, dan geldt:*

1. $\forall x A \approx \neg \exists x \neg A$,
2. $\exists x A \approx \neg \forall x \neg A$.

Bewijs Triviaal. ■

Kwantoren kunnen soms *gedistribueerd* worden. In de volgende stelling staan deze mogelijkheden opgesomd.

10.1.12 Stelling **Distributie van kwantoren**
Zij $A, B \in FORM$, dan geldt:

1. $\forall x(A \wedge B) \approx (\forall x A \wedge \forall x B)$,
2. $\exists x(A \vee B) \approx (\exists x A \vee \exists x B)$,
3. $\forall x(A \vee B) \approx (\forall x A \vee B)$ *als* $x \notin VV(B)$,

4. $\exists x(A \wedge B) \approx (\exists x A \wedge B)$ *als* $x \notin VV(B)$.

BEWIJS *We bewijzen de beweringen 1 en 4, en laten de overige aan de lezer over.*

1. *Bewijs bewering 1.*
   Zij $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle$ *een model voor* $\forall x(A \wedge B)$. *Dit betekent dat:*
   $$\forall a \in |\mathcal{A}| \cdot v^{\mathcal{A},\beta[x \mapsto a]}(A \wedge B) = 1,$$
   hetgeen equivalent is met:
   $$\forall a \in |\mathcal{A}| \cdot v^{\mathcal{A},\beta[x \mapsto a]}(A) = v^{\mathcal{A},\beta[x \mapsto a]}(B) = 1.$$
   Maar dit betekent dat:
   $$v^{\mathcal{A},\beta}(\forall x A) = v^{\mathcal{A},\beta}(\forall x B) = 1,$$
   ofwel:
   $$v^{\mathcal{A},\beta}(\forall x A \wedge \forall x B) = 1,$$
   zodat $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle$ *een model is voor* $(\forall x A \wedge \forall x B)$.
2. *Bewijs bewering 4.*
   Zij $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle$ *een model voor* $\exists x(A \wedge B)$. *Dit wil zeggen:*
   $$\exists a \in |\mathcal{A}| \cdot v^{\mathcal{A},\beta[x \mapsto a]}(A \wedge B) = 1,$$
   hetgeen equivalent is met:
   $$\exists a \in |\mathcal{A}| \cdot v^{\mathcal{A},\beta[x \mapsto a]}(A) = v^{\mathcal{A},\beta[x \mapsto a]}(B) = 1. \tag{10.1}$$
   Omdat $x \notin VV(B)$, *geldt dat* $v^{\mathcal{A},\beta[x \mapsto a]}(B) = v^{\mathcal{A},\beta}(B)$ *(zie stelling 9.4.2), zodat 10.1 gelijkwaardig is met:*
   $$[\exists a \in |\mathcal{A}| \cdot v^{\mathcal{A},\beta[x \mapsto a]}(A) = 1] \quad \& \quad v^{\mathcal{A},\beta}(B) = 1,$$
   Dit is equivalent met:
   $$v^{\mathcal{A},\beta}(\exists x A) = v^{\mathcal{A},\beta}(B) = 1,$$
   ofwel $v^{\mathcal{A},\beta}(\exists x A \wedge B) = 1$, *dus* $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle$ *is een model voor* $(\exists x A \wedge B)$. ■

Dat we met de distributie van kwantoren moeten oppassen wordt in het volgende voorbeeld duidelijk gemaakt.

10.1.13 VOORBEELD Distributie kwantoren.
De volgende beweringen die 'sprekend' lijken op de beweringen 3 en 4 van de vorige stelling zijn in het algemeen *niet* correct:

1. $\forall x(A \vee B) \approx (\forall x A \vee \forall x B)$,
2. $\exists x(A \wedge B) \approx (\exists x A \wedge \exists x B)$.

Als men in bewering 1 de A en B respectievelijk vervangt door de literalen $P(x)$ en $\neg P(x)$, en als $\mathcal{A}$ een structuur is waarin $P^{\mathcal{A}} \neq \emptyset$ en $P^{\mathcal{A}} \neq |\mathcal{A}|$, dan geldt voor alle β dat $v^{\mathcal{A},\beta}(\forall x[P(x) \vee \neg P(x)]) = 1$ en $v^{\mathcal{A},\beta}(\forall x P(x) \vee \forall x \neg P(x)) = 0$.

Als men in bewering 2 de A en B respectievelijk vervangt door de atomaire formules $P(x)$ en $Q(x)$, en als $\mathcal{A}$ een structuur is waarin $P^{\mathcal{A}} \neq \emptyset$, $Q^{\mathcal{A}} \neq \emptyset$ en $P^{\mathcal{A}} \cap Q^{\mathcal{A}} = \emptyset$, dan geldt voor alle β dat $v^{\mathcal{A},\beta}(\exists x[P(x) \wedge Q(x)]) = 0$ en $v^{\mathcal{A},\beta}(\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)) = 1$. ■

10.2 Eigenschappen van substitutie

In de eerste stelling van deze paragraaf wordt tot uitdrukking gebracht dat de semantiek van de predicatenlogica zodanig is gedefinieerd dat de gelijkheid $=$ een equivalentierelatie voorstelt (zoals men van de gelijkheid gewend is in de wiskunde).

10.2.1 STELLING **Eigenschappen gelijkheid**
De gelijkheid is reflexief, symmetrisch en transitief. Dus voor alle termen $s, t, r \in TERM$ van een eerste-ordetaal L geldt:

$$\begin{aligned} &\models\ t = t, \\ s = t\ &\models\ t = s, \\ s = t,\ t = r\ &\models\ s = r. \end{aligned}$$

BEWIJS Zij $\mathcal{A}$ een structuur voor L. De gelijkheid op $\mathcal{A}$ is reflexief, symmetrisch en transitief (zie definitie 9.3.4). Hieruit kan vrijwel meteen de stelling worden afgeleid. ∎

De volgende twee stellingen hebben betrekking op het substitueren van termen in termen, respectievelijk van termen in formules. Deze stellingen drukken uit dat het resultaat van het eerst uitvoeren van de substitutie $[x{:=}t]$ op een term s of formule F en het vervolgens bepalen van de betekenis van $s[x{:=}t]$ of $F[x{:=}t]$ met betrekking tot een interpretatie $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle$ overeenstemt met het bepalen van de betekenis van s of F met betrekking tot de interpretatie $\langle \mathcal{A}, \beta[x \mapsto t^{\mathcal{A},\beta}] \rangle$ ofwel de interpretatie $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle$ die zodanig is aangepast dat aan de variable x de waarde $t^{\mathcal{A},\beta}$ wordt toegekend. Anders gezegd, substitutie op syntactisch niveau komt overeen met 'substitutie' op semantisch niveau.

10.2.2 STELLING **Substitutiestelling voor termen**
Zij $s, t \in TERM$ in een eerste-ordetaal L, en $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle$ een interpretatie voor L, dan:

$$s[x{:=}t]^{\mathcal{A},\beta} = s^{\mathcal{A},\beta[x \mapsto t^{\mathcal{A},\beta}]}.$$

BEWIJS Het bewijs verloopt via structurele inductie over de term s.

1. $s = c$ waarbij c een naam is.
   Dan geldt de stelling omdat $c[x{:=}t] = c$ en $c^{\mathcal{A},\beta} = c^{\mathcal{A},\beta[x \mapsto t^{\mathcal{A},\beta}]} = c^{\mathcal{A}}$.
2. $s = y$ met $y \in VAR$ en $y \neq x$.
   Dit geval gaat op dezelfde wijze als het vorige.
3. $s = x$.
   Nu volgt de stelling aangezien $x[x{:=}t] = t$ en:
   $$x^{\mathcal{A},\beta[x \mapsto t^{\mathcal{A},\beta}]} = \beta[x \mapsto t^{\mathcal{A},\beta}](x) = t^{\mathcal{A},\beta}.$$
4. $s = f(s_1, \ldots, s_n)$ met $s_1, \ldots, s_n \in TERM$.
   De inductiehypothese luidt dat voor alle $1 \leq i \leq n$:
   $$s_i[x{:=}t]^{\mathcal{A},\beta} = s_i^{\mathcal{A},\beta[x \mapsto t^{\mathcal{A},\beta}]}.$$

Nu volgt:

$$\begin{aligned}
& f(s_1,\ldots,s_n)[x:=t]^{\mathcal{A},\beta} \\
&\quad = \quad f(s_1[x:=t],\ldots,s_n[x:=t])^{\mathcal{A},\beta}, \\
&\quad = \quad f^{\mathcal{A}}(s_1[x:=t]^{\mathcal{A},\beta},\ldots,s_n[x:=t]^{\mathcal{A},\beta}), \\
&\quad = \quad f^{\mathcal{A}}(s_1^{\mathcal{A},\beta[x\mapsto t^{\mathcal{A},\beta}]},\ldots,s_n^{\mathcal{A},\beta[x\mapsto t^{\mathcal{A},\beta}]}) \\
&\qquad\quad \text{(vanwege de inductiehypothese)}, \\
&\quad = \quad f(s_1,\ldots,s_n)^{\mathcal{A},\beta[x\mapsto t^{\mathcal{A},\beta}]}.
\end{aligned}$$

Hiermee is de stelling bewezen. ■

10.2.3 COROLLARIUM *Zij $s, t_1, t_2 \in TERM$ in een eerste-ordetaal L, dan geldt:*

$$t_1 = t_2 \models s[x:=t_1] = s[x:=t_2].$$

BEWIJS Zij $\langle \mathcal{A}, \beta\rangle$ een interpretatie voor L. Neem vervolgens aan dat

$$t_1{}^{\mathcal{A},\beta} = t_2{}^{\mathcal{A},\beta}. \tag{10.2}$$

Volgens de voorgaande stelling geldt voor $i = 1, 2$:

$$s[x:=t_i]^{\mathcal{A},\beta} = s^{\mathcal{A},\beta[x\mapsto t_i{}^{\mathcal{A},\beta}]}.$$

Hieruit en uit 10.2 volgt onmiddellijk het corollarium. ■

Ten behoeve van het bewijs van de volgende stelling definiëren we de *complexiteit* van een formule (zie ook definitie 2.3.3). Dit is een maat voor het aantal syntactische regels dat is toegepast om de formule voort te brengen.

10.2.4 DEFINITIE **Complexiteit van een formule**
De complexiteit *$comp(F)$ van een formule $F \in FORM$ is als volgt gedefinieerd:*

$$\begin{aligned}
comp(t_1 = t_2) &= 0, \\
comp(P(t_1,\ldots,t_n)) &= 0, \\
comp(\neg A) &= comp(A) + 1, \\
comp(A \star B) &= comp(A) + comp(B) + 1, \\
comp(\mathsf{Q}xA) &= comp(A) + 1.
\end{aligned}$$

Stelling 8.3.2 garandeert dat het bovenstaande stelsel recurrente betrekkingen een unieke oplossing $comp : FORM \to \mathbb{N}$ bezit.

10.2.5 STELLING **Substitutiestelling voor formules**
Zij $t \in TERM$ en $F \in FORM$ in een eerste-ordetaal L, dan geldt:

$$\langle \mathcal{A}, \beta\rangle \models F[x:=t] \quad \Leftrightarrow \quad \langle \mathcal{A}, \beta[x\mapsto t^{\mathcal{A},\beta}]\rangle \models F.$$

BEWIJS Het bewijs verloopt door middel van volledige inductie over de complexiteit $comp(F)$ van de formules $F \in FORM$.

1. Basisstap: $comp(F) = 0$, zodat F atomair is.
   Zij $F = (s_1 = s_2)$ met $s_1, s_2 \in TERM$.
   Nu geldt:

$$\begin{array}{ll}
\langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models (s_1 = s_2)[x{:=}t] & \\
\quad \Leftrightarrow & \langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models s_1[x{:=}t] = s_2[x{:=}t], \\
\quad \Leftrightarrow & s_1[x{:=}t]^{\mathcal{A},\beta} = s_2[x{:=}t]^{\mathcal{A},\beta}, \\
\quad \Leftrightarrow & s_1^{\mathcal{A},\beta[x\mapsto t^{\mathcal{A},\beta}]} = s_2^{\mathcal{A},\beta[x\mapsto t^{\mathcal{A},\beta}]} \quad \text{(wegens stelling 10.2.2)}, \\
\quad \Leftrightarrow & \langle \mathcal{A}, \beta[x\mapsto t^{\mathcal{A},\beta}] \rangle \models s_1 = s_2.
\end{array}$$

   Het geval dat $F = P(s_1, \ldots, s_n)$ met $s_1, \ldots, s_n \in TERM$ is op analoge wijze te behandelen.

2. Inductiestap: $comp(F) = n + 1$, zodat F niet-atomair is.
   De inductiehypothese (IH) is dat voor alle formules C met $comp(C) \leq n$ geldt:

$$\langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models C[x{:=}t] \quad \Leftrightarrow \quad \langle \mathcal{A}, \beta[x\mapsto t^{\mathcal{A},\beta}] \rangle \models C.$$

   (a) Zij $F = (A \wedge B)$ met $A, B \in FORM$. Hieruit volgt dat $comp(A) \leq n$ en $comp(B) \leq n$.
   Nu geldt dat:

$$\begin{array}{ll}
\langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models (A \wedge B)[x{:=}t] & \\
\quad \Leftrightarrow & \langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models (A[x{:=}t] \wedge B[x{:=}t]), \\
\quad \Leftrightarrow & \langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models A[x{:=}t] \quad \& \quad \langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models B[x{:=}t] \\
& \text{(wegens stelling 10.1.1)}, \\
\quad \Leftrightarrow & \langle \mathcal{A}, \beta[x\mapsto t^{\mathcal{A},\beta}] \rangle \models A \quad \& \quad \langle \mathcal{A}, \beta[x\mapsto t^{\mathcal{A},\beta}] \rangle \models B \\
& \text{(wegens de inductiehypothese)}, \\
\quad \Leftrightarrow & \langle \mathcal{A}, \beta[x\mapsto t^{\mathcal{A},\beta}] \rangle \models A \wedge B.
\end{array}$$

   De overige connectieven worden op analoge wijze behandeld.

   (b) Zij $F = \forall y A$ met $A \in FORM$. Hieruit volgt dat $comp(A) = n$. We beschouwen de vier gevallen die voortvloeien uit toepassing van definitie 8.4.2.
   Geval 1: $y \neq x$ en $y \notin VV(t)$. We leiden af:

$$\begin{array}{ll}
\langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models (\forall y A)[x{:=}t] & \\
\quad \Leftrightarrow & \langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models \forall y (A[x{:=}t]), \\
\quad \Leftrightarrow & \forall a \in |\mathcal{A}| \cdot \langle \mathcal{A}, \beta[y\mapsto a] \rangle \models A[x{:=}t], \\
\quad \Leftrightarrow & \forall a \in |\mathcal{A}| \cdot \langle \mathcal{A}, \beta[y\mapsto a][x\mapsto t^{\mathcal{A},\beta[y\mapsto a]}] \rangle \models A \\
& \text{(wegens } comp(A) = n \text{ en (IH))}, \\
\quad \Leftrightarrow & \forall a \in |\mathcal{A}| \cdot \langle \mathcal{A}, \beta[y\mapsto a][x\mapsto t^{\mathcal{A},\beta}] \rangle \models A \\
& \text{(aangezien } y \notin VV(t) \text{ en stelling 9.4.2)}, \\
\quad \Leftrightarrow & \forall a \in |\mathcal{A}| \cdot \langle \mathcal{A}, \beta[x\mapsto t^{\mathcal{A},\beta}][y\mapsto a] \rangle \models A \\
& \text{(omdat } x \neq y\text{)}, \\
\quad \Leftrightarrow & \langle \mathcal{A}, \beta[x\mapsto t^{\mathcal{A},\beta}] \rangle \models \forall y A.
\end{array}$$

   Geval 2: $y \neq x$ en $x \notin VV(A)$. Wordt aan de lezer overgelaten.

Geval 3: $y \neq x$, $y \in VV(t)$ en $x \in VV(A)$. Zij z de eerste variabele waarvoor geldt dat $t \notin VV(A) \cup VV(t)$, dan leiden we af:

$$
\begin{array}{ll}
\langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models (\forall y A)[x := t] & \\
\Leftrightarrow & \langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models \forall z (A[y := z][x := t]), \\
\Leftrightarrow & \forall a \in |\mathcal{A}| \cdot \langle \mathcal{A}, \beta[z \mapsto a] \rangle \models A[y := z][x := t], \\
\Leftrightarrow & \forall a \in |\mathcal{A}| \cdot \langle \mathcal{A}, \beta[z \mapsto a][x \mapsto t^{\mathcal{A},\beta[z \mapsto a]}] \rangle \models A[y := z] \\
 & \text{(wegens } comp(A[y := z]) = n \text{ en (IH))}, \\
\Leftrightarrow & \forall a \in |\mathcal{A}| \cdot \langle \mathcal{A}, \beta[z \mapsto a][x \mapsto t^{\mathcal{A},\beta}] \rangle \models A[y := z] \\
 & \text{(aangezien } z \notin VV(t) \text{ en stelling 9.4.2)}, \\
\Leftrightarrow & \forall a \in |\mathcal{A}| \cdot \langle \mathcal{A}, \beta[x \mapsto t^{\mathcal{A},\beta}][z \mapsto a] \rangle \models A[y := z] \\
 & \text{(daar } x \neq z \text{, omdat } x \in VV(A) \text{ en } z \notin VV(A)), \\
\Leftrightarrow & \forall a \in |\mathcal{A}| \cdot \\
 & \langle \mathcal{A}, \beta[x \mapsto t^{\mathcal{A},\beta}][z \mapsto a][y \mapsto z^{\mathcal{A},\beta[x \mapsto t^{\mathcal{A},\beta}][z \mapsto a]}] \rangle \models A \\
 & \text{(nogmaals (IH))}, \\
\Leftrightarrow & \forall a \in |\mathcal{A}| \cdot \langle \mathcal{A}, \beta[x \mapsto t^{\mathcal{A},\beta}][z \mapsto a][y \mapsto a] \rangle \models A, \\
\Leftrightarrow & \forall a \in |\mathcal{A}| \cdot \langle \mathcal{A}, \beta[x \mapsto t^{\mathcal{A},\beta}][y \mapsto a][z \mapsto a] \rangle \models A, \\
\Leftrightarrow & \forall a \in |\mathcal{A}| \cdot \langle \mathcal{A}, \beta[x \mapsto t^{\mathcal{A},\beta}][y \mapsto a] \rangle \models A \\
 & \text{(aangezien } z \notin VV(A) \text{ en stelling 9.4.2)}, \\
\Leftrightarrow & \langle \mathcal{A}, \beta[x \mapsto t^{\mathcal{A},\beta}] \rangle \models \forall y A.
\end{array}
$$

Geval 4: $y = x$. Wordt aan de lezer overgelaten.
Het bewijs voor het geval dat $F = \exists y A$ gaat op precies dezelfde wijze als dat voor $F = \forall y A$. ■

De reden dat we deze stelling hebben aangetoond met behulp van volledige inductie naar de complexiteit van de formules, is gelegen in het feit dat we een geschikte inductiehypothese nodig hadden in het derde geval van $F = \mathsf{Q} y A$. We willen immers de inductiehypothese kunnen toepassen op $A[y := z]$, in plaats van op A. Hadden we structurele inductie over $FORM$ toegepast, dan hadden we een inductiehypothese ter beschikking gehad die alleen op de formule A van toepassing was.

10.2.6 COROLLARIUM *Zij $s, t \in TERM$ en $F \in FORM$ in een eerste-ordetaal L, dan geldt:*

$$s = t \models F[x := s] \leftrightarrow F[x := t].$$

BEWIJS Het bewijs is eenvoudig en lijkt op dat van corollarium 10.2.3. ■

De laatste stelling van deze paragraaf drukt uit dat de semantiek van de predicatenlogica adequaat omgaat met gebonden variabelen: de naam van een gebonden variabele is niet van belang onder de voorwaarde dat deze verschillend is van de vrije variabelen in de betreffende formule. Dit betekent dat gebonden variabelen mogen worden herbenoemd zonder dat de betekenis van de formule verandert.

10.2.7 STELLING **Herbenoemen gebonden variabelen**
Zij $A \in FORM$ en $y \notin VV(A)$, dan geldt:

1. $\exists x A \approx \exists y(A[x := y])$,

2. $\forall x A \approx \forall y(A[x := y])$.

BEWIJS *We bewijzen alleen het eerste geval; het tweede gaat op dezelfde wijze. Neem aan dat $y \notin VV(A)$, we kunnen dan afleiden:*

$$
\begin{array}{ll}
\langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models \exists y(A[x := y]) & \\
\Leftrightarrow & \exists_a \in |\mathcal{A}| \cdot \langle \mathcal{A}, \beta[y \mapsto a] \rangle \models A[x := y], \\
\Leftrightarrow & \exists_a \in |\mathcal{A}| \cdot \langle \mathcal{A}, \beta[y \mapsto a][x \mapsto y^{\mathcal{A}, \beta[y \mapsto a]}] \rangle \models A \\
 & \textit{(wegens stelling 10.2.5)}, \\
\Leftrightarrow & \exists_a \in |\mathcal{A}| \cdot \langle \mathcal{A}, \beta[y \mapsto a][x \mapsto a] \rangle \models A, \\
\Leftrightarrow & \exists_a \in |\mathcal{A}| \cdot \langle \mathcal{A}, \beta[x \mapsto a][y \mapsto a] \rangle \models A, \\
\Leftrightarrow & \exists_a \in |\mathcal{A}| \cdot \langle \mathcal{A}, \beta[x \mapsto a] \rangle \models A \\
 & \textit{(aangezien } y \notin VV(A) \textit{ en stelling 9.4.2)}, \\
\Leftrightarrow & \langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models \exists x A. \quad \blacksquare
\end{array}
$$

10.2.8 VOORBEELD Herbenoemen van variabelen.

1. Een direkte uitvoering van de substitutie $[y := f(x)]$ op de formule $F = \forall x P(x, y)$ geeft een onbedoelde binding van $f(x)$ aan $\forall x$. Door herbenoeming van de gebonden variabele x gaat F over in de variant $G = \forall z P(z, y)$ waarvoor $G \approx F$. Op G mag de substitutie wel uitgevoerd worden.

2. Om stelling 10.1.12 over het distribueren van kwantoren over $\wedge$ en $\vee$ te kunnen toepassen moet men soms eerst de variabelen herbenoemen. In het volgende voorbeeld verloopt de distributie van de $\exists$-kwantoren over het connectief $\wedge$ als volgt:

$$
\begin{aligned}
\exists x P(x) \wedge \exists x \neg Q(x) &\approx \exists x[P(x) \wedge \exists x \neg Q(x)], \\
&\approx \exists x[P(x) \wedge \exists y \neg Q(y)], \\
&\approx \exists x \exists y[P(x) \wedge \neg Q(y)].
\end{aligned}
$$

   In dit voorbeeld is bewering 4 uit stelling 10.1.12 tweemaal toegepast, nadat de gebonden variabele x in $\neg Q(x)$ is herbenoemd tot y. Daarnaast is de vervangingsstelling (10.1.9) gebruikt. $\blacksquare$

10.3 Normaalvormen

Ook in de predicatenlogica kent men normaalvormen. In de volgende definitie introduceren we de zogenaamde *prenexnormaalvorm*. Bij een formule in deze normaalvorm staan alle kwantoren vooraan de formule.

10.3.1 DEFINITIE **Prenexnormaalvorm**
Een formule $F \in FORM$ staat in prenexnormaalvorm *als F de volgende vorm bezit:*

$$\mathsf{Q}_1 x_{i_1} \ldots \mathsf{Q}_n x_{i_n} M.$$

Hierin zijn $\mathsf{Q}_1, \ldots, \mathsf{Q}_n$ universele of existentiële kwantoren en bevat M geen kwantoren. M noemt men de matrix *van de formule F en de rij kwantoren $\mathsf{Q}_1 x_{i_1} \ldots \mathsf{Q}_n x_{i_n}$ de* prenex *van F. De prenex mag eventueel leeg zijn, dus $n = 0$.*

10.3.2 VOORBEELD Prenexnormaalvorm.
De formule $\forall x \exists y[(P(x) \vee Q(x,y)) \rightarrow R(x)]$ staat in prenexnormaalvorm. ■

10.3.3 STELLING *Voor iedere formule $F \in FORM$ bestaat er een formule F^p in prenexnormaalvorm waarvoor geldt dat $F \approx F^p$.*

BEWIJS Het in prenexnormaalvorm brengen van een formule komt in principe neer op het herhaaldelijk toepassen van de stellingen 10.2.7 en 10.1.12 (ga na).

Prenexnormaalvorm-algoritme

1. Elimineer eerst alle voorkomens van $\rightarrow$ en $\leftrightarrow$ door de volgende herschrijvingen toe te passen (van links naar rechts) op subformules van F:

$$\begin{aligned} A \rightarrow B &\approx \neg A \vee B, \\ A \leftrightarrow B &\approx (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A). \end{aligned}$$

2. Distribueer vervolgens $\neg$ over de kwantoren door de volgende herschrijvingen toe te passen (van links naar rechts):

$$\begin{aligned} \neg \forall x A &\approx \exists x \neg A, \\ \neg \exists x A &\approx \forall x \neg A \end{aligned}$$

3. Breng tenslotte alle kwantoren naar buiten door de volgende herschrijvingen toe te passen (van links naar rechts):

$$\begin{aligned} \forall x A \wedge \forall x B &\approx \forall x (A \wedge B), \\ \exists x A \vee \exists x B &\approx \exists x (A \vee B), \\ \mathsf{Q} x A \star B &\approx \mathsf{Q} x (A \star B), \quad \text{als } x \notin VV(B), \\ A \star \mathsf{Q} x B &\approx \mathsf{Q} x (A \star B), \quad \text{als } x \notin VV(A). \end{aligned}$$

   Waarbij $\mathsf{Q} \in \{\forall, \exists\}$ en $\star \in \{\wedge, \vee\}$. Om deze herschrijfregels te kunnen toepassen mogen gebonden variabelen worden herbenoemd. ■

10.3.4 VOORBEELD Prenexnormaalvorm.
We bepalen een prenexnormaalvorm van $F = \forall x P(x) \rightarrow \exists z \forall y R(z, y)$.

$$\begin{aligned} F &\approx \forall x P(x) \rightarrow \exists z \forall y R(z, y), \\ &\approx \neg \forall x P(x) \vee \exists z \forall y R(z, y), \\ &\approx \exists x \neg P(x) \vee \exists z \forall y R(z, y), \\ &\approx \exists x \neg P(x) \vee \exists x \forall y R(x, y), \\ &\approx \exists x [\neg P(x) \vee \forall y R(x, y)], \\ &\approx \exists x \forall y [\neg P(x) \vee R(x, y)]. \end{aligned}$$

Let op hoe in de vierde regel de variabele z wordt herbenoemd tot x om de tweede herschrijvingsregel te kunnen toepassen. Als we het herbenoemen achterwege laten, krijgen we:

$$\begin{aligned} F &\approx \exists x \neg P(x) \vee \exists z \forall y R(z, y), \\ &\approx \exists x [\neg P(x) \vee \exists z \forall y R(z, y)], \\ &\approx \exists x \exists z [\neg P(x) \vee \forall y R(z, y)], \\ &\approx \exists x \exists z \forall y [\neg P(x) \vee R(z, y)]. \end{aligned}$$

De eerste normaalvorm is eenvoudiger dan de tweede, aangezien zij minder kwantoren bevat. Het voorbeeld laat tevens zien dat prenexnormaalvormen niet uniek behoeven te zijn. ■

10.4 Opgaven

1. Bewijs stelling 10.1.8
2. Bewijs stelling 10.1.11.
3. Bewijs de gevallen 2 en 3 van stelling 10.1.12.
4. Voltooi het bewijs van stelling 10.2.5.
5. Breng de volgende formules in prenexnormaalvorm:
   (a) $\forall x [P(x) \vee Q(x)] \wedge \exists x R(x)$.
   (b) $\forall x P(x) \rightarrow [\exists x Q(x) \rightarrow \forall x R(x)]$.
   (c) $\forall x \exists y [R(x, y) \rightarrow \exists z Q(z, y)]$.
   (d) $\exists z [\forall x \exists y R(x, y, z) \leftrightarrow \exists x \forall y S(x, y, z)]$.