Hoofdstuk 11

De Boommethode voor de Predicatenlogica

In hoofdstuk 5 hebben we de boommethode voor de propositielogica geïntroduceerd. Deze methode kan met een aantal regels worden uitgebreid zodanig dat zij bruikbaar wordt voor de predicatenlogica. We spreken over 'uitbreiden' aangezien de regels van de boommethode voor de propositielogica ook mogen worden gebruikt bij de boommethode voor de predicatenlogica. Men kan namelijk voor ieder van de stellingen over vervulbare verzamelingen uit §5.1 een analogon bewijzen voor de predicatenlogica. Dat is niet verwonderlijk als men zich realiseert dat de predicatenlogica een uitbreiding is van de propositielogica. Men verkrijgt deze overeenkomstige stellingen voor de predicatenlogica door in de stellingen in §5.1 overal $PROP$ te vervangen door $FORM$. De bewijzen van deze stellingen laten we aan de lezer over.

De indeling van dit hoofdstuk is als volgt. In §11.1 bewijzen we een aantal stellingen over vervulbare verzamelingen voor de predicatenlogica, terwijl in §11.2 de nieuwe regels voor de boommethode worden geïntroduceerd, waarbij ook voorbeelden van afleidingen worden gegeven. In §11.3 bewijzen we tenslotte de zogenaamde *boomstelling*. Deze stelling zegt dat de boommethode volledig is, dat wil zeggen dat er een sluitende boom voor Γ bestaat als de eindige verzameling Γ onvervulbaar is.

11.1 Theoretische onderbouwing

De volgende stelling is het analogon van stelling 5.1.1 voor de predicatenlogica.

11.1.1 Stelling *Zij $\Gamma \subseteq FORM$ en $F \in FORM$, dan geldt de volgende equivalentie:*

$$\Gamma \models F \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma \cup \{\neg F\} \text{ is niet vervulbaar.}$$

BEWIJS

($\Rightarrow$) Zij $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle$ een interpretatie. Dan zijn er twee mogelijkheden:

- Er is een $A \in \Gamma$ met $v^{\mathcal{A},\beta}(A) = 0$. Maar dan is $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle$ zeker geen model voor $\Gamma \cup \{\neg F\}$.
- Voor alle $A \in \Gamma$ is $v^{\mathcal{A},\beta}(A) = 1$, ofwel $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle$ is een model voor Γ. Uit $\Gamma \models F$ volgt nu dat $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle$ ook een model is voor F. Dit betekent dat $v^{\mathcal{A},\beta}(\neg F) = 0$ en dat wederom $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle$ geen model is voor $\Gamma \cup \{\neg F\}$.

Hieruit volgt dat geen enkele interpretatie $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle$ een model is voor $\Gamma \cup \{\neg F\}$, zodat deze verzameling onvervulbaar is.

($\Leftarrow$) Zij $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle$ een model voor Γ. In combinatie met het gegeven dat $\Gamma \cup \{\neg F\}$ onvervulbaar is, levert dit $v^{\mathcal{A},\beta}(\neg F) = 0$. Dit betekent dat $v^{\mathcal{A},\beta}(F) = 1$, zodat $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle$ een model is voor F. We concluderen dat $\Gamma \models F$. ■

Merk op dat het bewijs van deze stelling bijna identiek is aan dat van stelling 5.1.1. De volgende stellingen geven aan wanneer stellingen vervulbaar zijn die formules bevatten die kwantoren of het gelijkheidssymbool bevatten.

11.1.2 STELLING *Zij $\Gamma \subseteq FORM$, $A \in FORM$ en $t \in TERM$. Zij verder $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle$ een interpretatie. Dan geldt:*

$$\langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models \Gamma \cup \{\forall x A\} \quad \Leftrightarrow \quad \langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models \Gamma \cup \{\forall x A, A[x := t]\}.$$

BEWIJS

($\Rightarrow$) *Als $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models \Gamma \cup \{\forall x A\}$, dan ook $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models \forall x A$, zodat $\langle \mathcal{A}, \beta[x \mapsto a] \rangle \models A$ voor alle $a \in |\mathcal{A}|$. In het bijzonder is $\langle \mathcal{A}, \beta[x \mapsto t^{\mathcal{A},\beta}] \rangle \models A$, aangezien $t^{\mathcal{A},\beta} \in |\mathcal{A}|$. Hieruit volgt met stelling 10.2.5 dat $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models A[x := t]$, zodat $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models \Gamma \cup \{\forall x A, A[x := t]\}$.*

($\Leftarrow$) *Triviaal.* ■

11.1.3 STELLING *Zij $\Gamma \subseteq FORM$, $A \in FORM$ en zij c een naam of een variabele die niet voorkomt, respectievelijk niet vrij voorkomt, in de formules in Γ of in A. Dan geldt:*

$$\Gamma \cup \{\exists x A\} \text{ is vervulbaar} \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma \cup \{A[x := c]\} \text{ is vervulbaar.}$$

BEWIJS *We bewijzen de stelling alleen voor het geval dat c een naam is. De lezer wordt uitgenodigd zelf het onderstaande bewijs aan te passen voor het geval dat c een variabele is.*

($\Rightarrow$) *Stel dat $\Gamma \cup \{\exists x A\}$ vervuld wordt door de interpretatie $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle$. Hieruit volgt dat er een $a \in |\mathcal{A}|$ is zodanig dat $\langle \mathcal{A}, \beta[x \mapsto a] \rangle \models A$. Zij $\langle \mathcal{B}, \beta \rangle$ de interpretatie die gelijk is aan $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle$ behalve dat $c^{\mathcal{B}} = a$. Over $c^{\mathcal{A}}$ weten we niets; misschien is $c^{\mathcal{A}} = a$, misschien niet. Uit de stellingen 9.4.2 en 10.2.5 volgt dat $\langle \mathcal{B}, \beta \rangle$ een model voor $\Gamma \cup \{A[x := c]\}$.*

($\Leftarrow$) *Omgekeerd, als* $\Gamma \cup \{A[x{:=}c]\}$ *vervuld wordt door, laten we zeggen* $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle$*, dan volgt uit stelling 10.2.5 dat* $\langle \mathcal{A}, \beta[x \mapsto c^{\mathcal{A},\beta}] \rangle \models A$*. Aangezien* $c^{\mathcal{A},\beta} \in |\mathcal{A}|$*, betekent dit dat* $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models \exists x A$*. Hieruit volgt dat* $\Gamma \cup \{\exists x A\}$ *vervuld wordt door* $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle$*.* ■

11.1.4 STELLING *Zij* $\Gamma \subseteq FORM$ *en* $t \in TERM$*. Zij verder* $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle$ *een interpretatie. Dan geldt:*

$$\langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models \Gamma \quad \Leftrightarrow \quad \langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models \Gamma \cup \{t = t\}.$$

BEWIJS *Deze eigenschap volgt meteen uit de definities.* ■

11.1.5 STELLING *Zij* $\Gamma \subseteq FORM$*,* $A \in FORM$ *en* $s, t \in TERM$*. Zij verder* $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle$ *een interpretatie. Dan geldt:*

$$\langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models \Gamma \cup \{s = t, A[x{:=}s]\} \quad \Leftrightarrow \quad \langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models \Gamma \cup \{s = t, A[x{:=}t]\}.$$

BEWIJS *Dit volgt uit corollarium 10.2.6 en de definities.* ■

Met behulp van de stellingen uit paragraaf 5.1 die ook, zoals eerder is opgemerkt, voor de predicatenlogica gelden, en de stellingen hierboven kunnen we de formules uit een verzameling $\Gamma \subset FORM$ afbreken tot literalen. Net als in het propositionele geval kunnen we nagaan of Γ vervulbaar is. Hierbij tekenen wij aan dat uit stelling 11.1.2 blijkt, dat een formule van de vorm $\forall x A$ steeds opnieuw gebruikt kan worden voor het genereren van formules door het invullen van steeds andere termen t voor de variabele x. Dit betekent dat niet altijd alle formules uit Γ 'definitief' kunnen worden afgebroken tot literalen.

11.1.6 VOORBEELD Vervulbaarheid en onvervulbaarheid.

1. $\models \forall x P(x) \rightarrow \neg \exists x \neg P(x)$.
   Dit volgt uit het feit dat de verzameling $\Gamma = \{\neg[\forall x P(x) \rightarrow \neg \exists x \neg P(x)]\}$ niet vervulbaar is (zie figuur 11.1). Aangezien de verzameling Γ_5 niet vervulbaar is, volgt door toepassing van de relevante stellingen dat Γ ook niet vervulbaar is.

   Ten aanzien van de a die geïntroduceerd wordt in Γ_4, geldt dat deze niet mag voorkomen in de verzameling Γ_3. Of deze a nu een naam of een variabele van de objecttaal is, doet er eigenlijk niet toe (stelling 11.1.3). In het vervolg zullen we in ieder geval de letters $a, b, c, \ldots$ gebruiken en deze als namen behandelen.

2. $\Gamma = \{\forall x R(x) \rightarrow \exists x R(x)\}$ is vervulbaar.
   Uit figuur 11.2 blijkt dat de verzamelingen Γ_5 en Γ_6 vervulbaar zijn. Hieruit volgt dat ook Γ vervulbaar is.

$$\Gamma = \{\neg[\forall x P(x) \rightarrow \neg\exists x \neg P(x)]\}$$
$$\Gamma_1 = \{\forall x P(x) \wedge \neg\neg\exists x \neg P(x)\}$$
$$\Gamma_2 = \{\forall x P(x), \neg\neg\exists x \neg P(x)\}$$
$$\Gamma_3 = \{\forall x P(x), \exists x \neg P(x)\}$$
$$\Gamma_4 = \{\forall x P(x), \neg P(a)\}$$
$$\Gamma_5 = \{\forall x P(x), P(a), \neg P(a)\}$$

niet vervulbaar

Figuur 11.1: $\Gamma = \{\neg[\forall x P(x) \rightarrow \neg\exists x \neg P(x)]\}$ is niet vervulbaar.

$$\Gamma = \{\forall x R(x) \rightarrow \exists x R(x)\}$$
$$\Gamma_1 = \{\neg\forall x R(x) \vee \exists x R(x)\}$$

of

$\Gamma_2 = \{\neg\forall x R(x)\}$	$\Gamma_3 = \{\exists x R(x)\}$
$\Gamma_4 = \{\exists x \neg R(x)\}$	$\Gamma_6 = \{R(a)\}$
$\Gamma_5 = \{\neg R(a)\}$	vervulbaar
vervulbaar	

Figuur 11.2: $\Gamma = \{\forall x R(x) \rightarrow \exists x R(x)\}$ is vervulbaar.

$\forall$-regels		$\exists$-regels		$=$-regel	sub-regel
$\neg\forall x A$	$*\ \forall x A$	$\neg\exists x A$	$\exists x A$		$s = t$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\boldsymbol{\exists x \neg A}$	$\boldsymbol{A[x := t]}$	$\boldsymbol{\forall x \neg A}$	$\boldsymbol{A[x := c]}$	$\boldsymbol{t = t}$	$A[x := s]$
					$\vdots$
					$\boldsymbol{A[x := t]}$

Tabel 11.1: Aanvullende regels voor de *Boommethode*.

De structuren $\mathcal{A} = \langle D; P; d\rangle$ en $\mathcal{B} = \langle D; Q; d\rangle$ waarbij $D = \{d\}$, $P = \emptyset$ en $Q = \{d\}$, zijn modellen voor de zin $\forall x R(x) \rightarrow \exists x R(x)$.

Immers voor alle bedelingen β geldt $v^{\mathcal{A},\beta}(\forall x R(x)) = 0$, aangezien $R^{\mathcal{A}} = P = \emptyset$ en $D \neq \emptyset$. Hieruit volgt voor alle β dat $\langle \mathcal{A}, \beta\rangle \models \forall x R(x) \rightarrow \exists x R(x)$.

Verder geldt voor alle bedelingen β dat $v^{\mathcal{B},\beta}(\exists x R(x)) = 1$, aangezien $d \in R^{\mathcal{B}} = \{d\}$. Hieruit volgt dat $\langle \mathcal{B}, \beta\rangle \models \forall x R(x) \rightarrow \exists x R(x)$ voor alle bedelingen β. ■

11.2 Bomen voor de predicatenlogica

In deze paragraaf zullen we de uitbreiding van de *boommethode voor de predicatenlogica* bespreken. De regels voor deze boommethode zijn die uit tabel 5.1 (zie §5.2) aangevuld met die uit tabel 11.1. De regels in tabel 5.1 moeten nu gelezen worden met $A, B \in FORM$. Voor de regels in tabel 11.1 geldt het volgende:

1. De eerste formule(s) is (zijn) de premissen, terwijl de laatste formule, die vet gedrukt is, de conclusie is. Verder geldt dat $A \in FORM$.

2. De ster ($*$) bij de tweede $\forall$-regel duidt aan dat men uit de formule $\forall x A$ voor iedere mogelijke keuze van een term $t \in TERM$ de formule $A[x := t]$ mag afleiden. Dit betekent dat de formule $\forall x A$ meerdere keren mag worden toegepast in een boom (cf. stelling 11.1.2).

   De rechtvaardiging hiervoor is dat als $\forall x A$ waar is, de formule A blijkbaar waar moet zijn voor *iedere keuze* van x, zodat alle mogelijke termen op de plaats van x mogen worden gesubstitueerd in A. In de praktijk dient men zinvolle, dus bruikbare termen te kiezen: het doel is namelijk om een afsluitende boom te construeren.

3. Bij toepassing van de tweede $\exists$-regel dient een tot dan toe nog niet gebruikte naam (of niet gebruikte vrij voorkomende variabele) c te worden geïntroduceerd. Dus c mag niet voorkomen (of vrij voorkomen) in de formules die boven de formule $A[x{:=}c]$ in dezelfde tak van de boom staan (cf. stelling 11.1.3).

   Het idee achter deze regel is als volgt. Als men weet dat de formule $\exists x A$ waar is, dan moet er een object o bestaan zodanig dat A waar is als de variabele x wordt gebonden aan object o. Omdat we niet weten wat het object o is, maar er wel over willen kunnen redeneren, geven we het een voorlopige naam. We kiezen dan een naam c die nog niet gebruikt is in de tak. We weten immers niets van object o, behalve dat het de door A uitgedrukte eigenschap bezit. Zouden we een reeds gebruikte naam kiezen voor o, dan zouden we het ons onbekende object o identificeren met het object dat de reeds gebruikte naam draagt. Dat is onwenselijk, omdat we, nogmaals gezegd, hoegenaamd niets weten van o.

   We zullen bij toepassing van de boommethode er steeds vanuit gaan dat c een naam is, omdat dit beter bij de intuïtie aansluit: c is een naam voor een individu met de eigenschap A. We spreken dan over een *nieuwe naam* en we nemen aan dat we bij het construeren van bomen over een voldoende hoeveelheid nieuwe namen kunnen beschikken. Het is echter toegestaan om *nieuwe variabelen* te gebruiken.

4. De $=$-regel heeft geen premissen. Zij geeft aan dat de atomaire formule $t = t$ (voor elke $t \in TERM$) op iedere plaats in de boom mag worden toegevoegd (cf. stelling 11.1.4).

5. Ten aanzien van de sub-regel (cf. stelling 11.1.5) merken we het volgende op. Als F een formule is waarin mogelijk de term s voorkomt, en als G uit F is verkregen door sommige voorkomens van s door t te vervangen, dan is dat een geldige toepassing van deze regel. Men kan namelijk in al deze gevallen een formule A vinden zodanig dat $A[x{:=}s] = F$ en $A[x{:=}t] = G$ voor een geschikte keuze van een variabele x. Laat namelijk x een variabele zijn die niet vrij voorkomt in A, s of t, en kies voor A de formule F waarin de voorkomens van s die door t moeten worden vervangen om G te krijgen, zijn vervangen door x.

   Uit bijvoorbeeld $R(a,a)$ en $(a = b)$, mag niet alleen $R(b,b)$, maar ook $R(b,a)$ en $R(a,b)$ worden afgeleid. In het geval dat $R(b,a)$ wordt afgeleid, kan men bijvoorbeeld voor A de formule $R(x,a)$ kiezen, want $R(x,a)[x{:=}a] = R(a,a)$ en $R(x,a)[x{:=}b] = R(b,a)$.

1. $\forall x R(x) \rightarrow \exists x R(x)$	(gegeven)
2. $\neg \forall x R(x) \vee \exists x R(x)$	($\rightarrow$-regel,1)

(2)

3. $\neg \forall x R(x)$		4. $\exists x R(x)$	
5. $\exists x \neg R(x)$	($\forall$-regel,3)	7. $R(a)$	($\exists$-regel,4)
6. $\neg R(a)$	($\exists$-regel,5)		

Figuur 11.3: $\Gamma = \{\forall x R(x) \rightarrow \exists x R(x)\}$ is vervulbaar.

6. In $\mathcal{PL}$, $\mathcal{PL}^{=}$, $\mathcal{PL}^{f}$ en $\mathcal{PL}^{f=}$ kunnen alle regels voor de kwantoren $\forall$ en $\exists$ uit figuur 11.1 worden toegepast. In $\mathcal{PL}^{=}$ en $\mathcal{PL}^{f=}$ mogen bovendien de $=$-regel en de sub-regel worden gebruikt.

Zoals reeds gezegd, nemen we aan dat we over een voldoende grote hoeveelheid nieuwe namen kunnen beschikken voor het gebruik van de tweede $\exists$-regel. Deze zijn niet altijd in de eerste-ordetaal onder beschouwing aanwezig. Derhalve impliceert het gebruik van de boommethode dat we soms een taal moeten uitbreiden met nieuwe namen, of moeten overgaan op het gebruik van variabelen waarvan er altijd aftelbaar oneindig veel zijn. Het uitbreiden van een taal met nieuwe namen heeft wegens de interpretatiestelling (9.4.2) geen gevolgen voor het vervulbaar of onvervulbaar zijn van de oorspronkelijke verzameling Γ, aangezien deze nieuwe namen niet kunnen voorkomen in Γ.

Indien men uitsluitend met nieuwe variabelen werkt, behoeft men de beschouwde taal nooit uit te breiden bij gebruik van de boommethode. Theoretisch gezien is dit eleganter dan het werken met nieuwe namen, maar het is minder intuïtief. Vandaar onze keuze om met nieuwe namen te werken.

11.2.1 Voorbeeld Toepassingen van de boommethode.

1. $\Gamma = \{\forall x R(x) \rightarrow \exists x R(x)\}$ is vervulbaar.
   In figuur 11.3 vindt men de boom, geconstrueerd volgens de boommethode en overeenkomende met de 'boom' uit figuur 11.2 behorende bij voorbeeld 11.1.6.

   Er is een verschil tussen beide typen bomen. Bij bomen die uit *verzamelingen* van formules zijn opgebouwd, worden in die verzamelingen

1.	$\neg[\exists x\forall yP(x,y)\rightarrow\forall y\exists xP(x,y)]$	($\neg$ conclusie)
2.	$\exists x\forall yP(x,y)\wedge\neg\forall y\exists xP(x,y)$	($\rightarrow$-regel,1)
3.	$\exists x\forall yP(x,y)$	($\wedge$-regel,2)
4.	$\neg\forall y\exists xP(x,y)$	($\wedge$-regel,2)
5.	$\exists y\neg\exists xP(x,y)$	($\forall$-regel,4)
6. *	$\forall yP(a,y)$	($\exists$-regel,3)
7.	$\neg\exists xP(x,b)$	($\exists$-regel,5)
8. *	$\forall x\neg P(x,b)$	($\exists$-regel,7)
9.	$\neg P(a,b)$	($\forall$-regel,8)
10.	$P(a,b)$	($\forall$-regel,6)
X(9,10)		

Figuur 11.4: $\models\exists x\forall yP(x,y)\rightarrow\forall y\exists xP(x,y)$.

steeds alle ongewijzigde formules doorgegeven. Dit in tegenstelling tot bomen die volgens de boomregels zijn geconstrueerd, waarbij alleen de afgebroken formules worden doorgegeven.

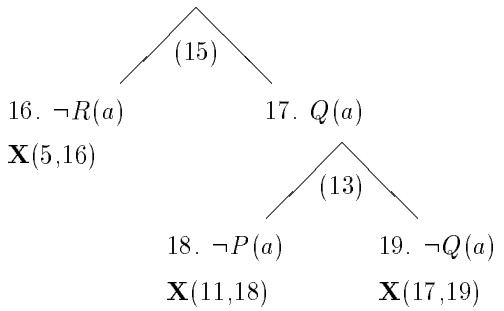
De structuren $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ genoemd in voorbeeld 11.1.6(2) zijn modellen voor Γ. Merk op dat de naam a in beide takken is geïntroduceerd. Dit is toegestaan, immers voor de linker tak geldt dat a niet voorkomt in de formules 1, 2, 3 en 5, en voor de rechter tak geldt dat a niet voorkomt in de formules 1, 2 en 4.

2. $\models\exists x\forall yP(x,y)\rightarrow\forall y\exists xP(x,y)$.
   Dit wordt bewezen door de gesloten boom in figuur 11.4.

3. $\forall x[P(x)\rightarrow\neg Q(x)], a=b\models R(a)\rightarrow[\forall x(R(x)\rightarrow Q(x))\rightarrow\neg P(b)]$.
   De boom in figuur 11.5 laat zien dat de bewering geldig is.

4. *niet* $\forall x\exists yR(x,y)\models\exists y\forall xR(x,y)$.
   De boom voor dit voorbeeld staat in figuur 11.6. Na formule 3 in deze boom, is het alleen mogelijk om de tweede $\forall$-regel toe te passen op formule 1 of 3 (de formules met een $*$). Aangezien bij het gebruik van deze regel iedere term mag worden gesubstitueerd voor x, respectievelijk y, kiezen

1. *	$\forall x[P(x) \to \neg Q(x)]$	(hypothese 1)
2.	$a = b$	(hypothese 2)
3.	$\neg\{R(a) \to [\forall x(R(x) \to Q(x)) \to \neg P(b)]\}$	($\neg$ conclusie)
4.	$R(a) \wedge \neg[\forall x(R(x) \to Q(x)) \to \neg P(b)]$	($\to$-regel,3)
5.	$R(a)$	($\wedge$-regel,4)
6.	$\neg[\forall x(R(x) \to Q(x)) \to \neg P(b)]$	($\wedge$-regel,4)
7.	$\forall x(R(x) \to Q(x)) \wedge \neg\neg P(b)$	($\to$-regel,6)
8. *	$\forall x(R(x) \to Q(x))$	($\wedge$-regel,7)
9.	$\neg\neg P(b)$	($\wedge$-regel,7)
10.	$P(b)$	($\neg$-regel,9)
11.	$P(a)$	(sub,2,10)
12.	$P(a) \to \neg Q(a)$	($\forall$-regel,1)
13.	$\neg P(a) \vee \neg Q(a)$	($\to$-regel,12)
14.	$R(a) \to Q(a)$	($\forall$-regel,8)
15.	$\neg R(a) \vee Q(a)$	($\to$-regel,14)



Figuur 11.5: $\forall x[P(x) \to \neg Q(x)], a = b \models R(a) \to [\forall x(R(x) \to Q(x)) \to \neg P(b)]$.

1. $*$	$\forall x \exists y R(x,y)$	(hypothese)
2.	$\neg \exists y \forall x R(x,y)$	($\neg$ conclusie)
3. $*$	$\forall y \neg \forall x R(x,y)$	($\exists$-regel,2)
4.	$\exists y R(a,y)$	($\forall$-regel,1)
5.	$R(a,b)$	($\exists$-regel,4)
6.	$\neg \forall x R(x,b)$	($\forall$-regel,3)
7.	$\exists x \neg R(x,b)$	($\forall$-regel,6)
8.	$\neg R(c,b)$	($\exists$-regel,7)
	$\vdots$	

Figuur 11.6: *niet* $\forall x \exists y R(x,y) \models \exists y \forall x R(x,y)$.

we er maar één: we substitueren a voor x in formule 1. Deze a kan zowel een naam of een variabele zijn: dat maakt niet uit, zoals we reeds hebben opgemerkt. Omdat vóór formule 4 nog geen nieuwe namen of variabelen zijn geïntroduceerd, is het toevallig dat a nieuw is. Het gebruik van de tweede $\forall$-regel vereist dat niet.

Het is eenvoudig in te zien dat de boom niet sluit. We kunnen weliswaar proberen om de met $*$ gemerkte formules nogmaals te gebruiken, bijvoorbeeld voor de naam c, maar de formules die met $\exists$ beginnen, forceren dan de introductie van weer andere nieuwe namen. Dit voorkomt een afsluiting van de boom.

Om tot een structuur $\mathcal{A}$ te komen zodanig dat $\mathcal{A} \models \forall x \exists y R(x,y)$, maar *niet* $\mathcal{A} \models \exists y \forall x R(x,y)$ 'lezen' we de boom 'af'. Zo'n structuur, wordt een *tegenvoorbeeld* genoemd.

Het 'aflezen' levert op: $R(a,b)$ is waar, en $R(c,b)$ is onwaar. Verder moeten de formules 1 en 3 waar zijn. Dit zijn juist de met $*$ gelabelde formules. Dit levert het volgende tegenvoorbeeld. Zij $\mathcal{A} = \langle D; Q; d_1, d_2, d_3 \rangle$ met d_1, d_2 en d_3 verschillend en $D = \{d_1, d_2, d_3\}$, en zij $Q = \{(d_1,d_2),(d_2,d_2),(d_3,d_3)\}$. Laat nu $R^{\mathcal{A}} = Q$, $a^{\mathcal{A}} = d_1$, $b^{\mathcal{A}} = d_2$ en $c^{\mathcal{A}} = d_3$, dan voldoet $\mathcal{A}$ aan de gestelde eisen: $R(a,b)$ is waar in $\mathcal{A}$ omdat $(d_1,d_2) \in R^{\mathcal{A}}$, en $R(c,b)$ is onwaar in $\mathcal{A}$ omdat $(d_3,d_2) \notin R^{\mathcal{A}}$. Ook moeten we verifiëren dat de formules 1 en 3 waar zijn in $\mathcal{A}$. For-

mule 1 is waar aangezien voor elk element $d \in D = \{d_1, d_2, d_3\}$ er een element $e \in D$ bestaat zodanig dat $(d, e) \in R^{\mathcal{A}}$: voor d_1 voldoet d_2 omdat $(d_1, d_2) \in R^{\mathcal{A}}$, voor d_2 voldoet d_2 zelf aangezien $(d_2, d_2) \in R^{\mathcal{A}}$, en voor d_3 voldoet op dezelfde wijze d_3 ook. Formule 3 is waar omdat het voor alle elementen $e \in D$ niet zo is dat voor alle elementen $d \in D$ geldt dat $(d, e) \in R^{\mathcal{A}}$: voor $e = d_1$ bevat $R^{\mathcal{A}}$ geen enkel paar van de vorm (d, d_1), voor $e = d_2$ geldt dat $(d_3, d_2) \notin R^{\mathcal{A}}$, en voor $e = d_3$ is een dergelijk paar ook gemakkelijk te vinden. Derhalve is $\mathcal{A}$ een tegenvoorbeeld.

Structuur $\mathcal{A}$ is overigens niet het eenvoudigste tegenvoorbeeld. Definieer $\mathcal{B} = \langle B; S; d_1, d_2 \rangle$ met $d_1 \neq d_2$, $B = \{d_1, d_2\}$, $S = \{(d_1, d_1), (d_2, d_2)\}$, en $R^{\mathcal{B}} = S$, dan is het niet moeilijk te verifiëren dat $\mathcal{B}$ ook een tegenvoorbeeld is. ■

In het laatste voorbeeld hebben we laten zien hoe uit een boom die niet afsluit een tegenvoorbeeld kan worden 'afgelezen'. Het construeren van een tegenvoorbeeld in de predicatenlogica is veel lastiger dan in de propositielogica. Dit wordt veroorzaakt door de formules in de boom die met een universele kwantor beginnen. Bij het construeren van een tegenvoorbeeld moeten we namelijk rekening houden met alle formules die met de tweede $\forall$-regel daaruit afleidbaar zijn. Samengevat:

1. Het is vaak niet op het eerste gezicht duidelijk dat een boom *niet* afsluit. Dit geval doet zich in zekere mate voor met betrekking tot de boom in figuur 11.6. Hierbij is het inzicht nodig dat het geen zin meer heeft om de boomregels nog verder toe te passen.

2. Bij het construeren van een tegenvoorbeeld is *creativiteit* nodig. Kon men bij de propositielogica tegenvoorbeelden volledig aflezen uit de boom, in de predicatenlogica kan men slechts de *randvoorwaarden* voor een tegenvoorbeeld uit de boom aflezen. Met name dient bij de constructie van een tegenvoorbeeld rekening te worden gehouden met de universeel gekwantificeerde formules in de openblijvende tak: deze met $*$ gelabelde formules moeten alle waar zijn in het tegenvoorbeeld!

De predicatenlogica is dan ook *niet algoritmisch beslisbaar*. Dit houdt in dat er geen computerprogramma kan worden geschreven dat in eindige tijd voor een willekeurige eindige $\Gamma \subset FORM$ en $F \in FORM$ kan beslissen of $\Gamma \models F$ geldig, dan wel ongeldig is. Dit staat in contrast met de propositielogica die wel algoritmisch beslisbaar is.

De bomen in deze paragraaf hadden alle betrekking op gesloten formules (zinnen). Daarom was het voor het construeren van een tegenvoorbeeld uit

een open blijvende tak voldoende om een structuur te geven in plaats van een interpretatie. Immers, in het geval van zinnen mochten interpretaties worden geïdentificeerd met structuren. Werkt men echter met formules, dan bestaat een tegenvoorbeeld uit een structuur en een bedeling voor de vrije variabelen in de formules. Een tegenvoorbeeld is dan een interpretatie.

11.3 De boomstelling

Evenals in de propositielogica geldt in de predicatenlogica de stelling dat een eindige verzameling Γ van formules onvervulbaar is dan en slechts dan als er een boom voor Γ bestaat die sluit. Men zegt ook wel dat de boommethode *volledig* is. In feite zullen we bewijzen dat de boomstelling zelfs geldt voor oneindige verzamelingen van formules Γ. We moeten dan eerst definiëren wat we onder een boom voor een oneindige verzameling formules verstaan.

Het bewijs van de boomstelling is niet eenvoudig vanwege de complicaties die aan het eind van de vorige paragraaf zijn genoemd. In de propositielogica zijn bomen altijd eindige objecten, in de predicatenlogica behoeft dit niet het geval te zijn. Het is mogelijk dat men bij het zoeken naar een sluitende boom in een oneindig lange tak terecht komt, doordat men de regels (met name die voor de universele kwantor) in de verkeerde volgorde toepast, of doordat de boom eenvoudigweg niet sluit.

11.3.1 Definitie **Boom voor oneindige verzameling**
Een boom $B(\Gamma)$ voor een oneindige verzameling van formules Γ ontstaat door een boom voor een eindige deelverzameling $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ te construeren waarbij het op ieder moment in de constructie van de boom toegestaan is om nog niet gebruikte formules uit Γ in een tak op te nemen.

De eindige verzameling Γ_0 uit de bovenstaande definitie, die gebruikt wordt voor de constructie van van een boom $B(\Gamma)$, dient om een uitgangspunt voor de boom te hebben. Gaandeweg mogen andere formules uit Γ bij de constructie worden betrokken. Op deze wijze wordt voorkomen dat we alle formules uit Γ bovenaan in de boom moeten plaatsen, hetgeen al een oneindige tak zou opleveren indien Γ oneindig is. Deze situatie is onwenselijk omdat we graag willen dat op ieder moment van de constructie van $B(\Gamma)$ het tussenresultaat eindig is. Merk op dat het toegestaan is dat $\Gamma_0 = \emptyset$.

Om de boomstelling te bewijzen gaan we uit van zogenaamde *canonieke bomen*. De intuitie achter dit begrip is dat in een open blijvende tak van een canonieke boom alle regels van de boommethode die kunnen worden toegepast, eens worden toegepast. Zo'n open blijvende tak bevat dan alle informatie die nodig is om een model voor Γ te construeren. Men zou kunnen zeggen dat een open blijvende tak van een canonieke boom 'verstandig' is geconstrueerd, waarmee wordt bedoeld dat de regels in een verstandige volgorde zijn toegepast.

11.3.2 Definitie **Canonieke boom**
Zij $\Gamma \subset FORM$ een verzameling formules en zij $B(\Gamma)$ een boom voor Γ. Dan noemt men $B(\Gamma)$ een canonieke boom*, dan en slechts dan als voor iedere tak van deze boom geldt:*

- *De tak sluit doordat deze een paar complementaire formules F en $\neg F$ bevat, óf*
- *de tak sluit niet en voldoet aan de volgende eigenschap:*

Iedere formule in Γ komt voor in de tak.

Zij $F_0, F_1, F_2, \ldots$ de rij van opeenvolgende formules in deze tak, gerekend vanaf de wortel van $B(\Gamma)$.

Als F_m een formule is waarop een van de regels van de boommethode, met uitzondering van de tweede $\forall$-regel en de $=$-regel, van toepassing is, dan bestaat er een formule F_n $(n > m)$ die het resultaat is van de toepassing van die regel.

Als $F_m = \forall x A$ voor zekere $A \in FORM$ en t een term is die gemaakt kan worden met behulp van de variabelen, functiesymbolen en namen (dus ook de geïntroduceerde nieuwe namen of variabelen) die voorkomen in de formules in de tak, dan moet de formule $A[x{:=}t]$ voorkomen in de tak.

Als t een term is die gemaakt kan worden met behulp van de variabelen, functiesymbolen en namen die voorkomen in de formules in de tak, dan moet de formule $t = t$ voorkomen in de tak.

Het is niet moeilijk in te zien dat men altijd een canonieke boom kan construeren. Dit wordt aan de lezer overgelaten. Merk op dat het mogelijk is dat een open blijvende tak in een canonieke boom aftelbaar oneindig veel formules bevat.

Aan de andere kant, is iedere sluitende boom eindig. Deze eigenschap volgt uit het feit dat in een sluitende boom iedere tak een eindig aantal formules bevat en een tak zich hooguit kan vertakken in twee subtakken (door toepassing van de $\vee$-vertakkingsregel), en uit een toepassing van *König's Lemma*:

11.3.3 STELLING **König's Lemma**
Iedere zich eindig-vertakkende boom die een oneindig aantal knopen bevat, bezit een tak met een oneindig aantal knopen.

BEWIJS We laten zien hoe in een zich eindig-vertakkende boom B met een oneindig aantal knopen een tak k_0, k_1, ..., k_n, k_{n+1}, ... kan worden verkregen met de eigenschap dat voor iedere $n \in \mathbb{N}$ de knoop k_n de wortel is van een subboom van B met een oneindig aantal knopen. Deze reeks knopen representeert dan een oneindige tak van B.

Neem voor k_0 de wortel van de boom B. Wegens het feit dat B een oneindig aantal knopen bevat, voldoet k_0 aan de gestelde eigenschap.

De inductiehypothese is dat k_n aan de genoemde eigenschap voldoet. Aangezien de subboom van B met wortel k_n zich ook eindig vertakt en wegens de inductiehypothese een oneindig aantal knopen bevat, moet minstens één van de opvolgers van k_n de wortel van een oneindige subboom van B zijn. Noem één van deze knopen k_{n+1}. Deze k_{n+1} voldoet derhalve aan de gestelde eigenschap. ∎

11.3.4 STELLING **Boomstelling**
Voor iedere niet-lege verzameling $\Gamma \subset FORM$ geldt:

$$\Gamma \textit{ is onvervulbaar} \quad \Leftrightarrow \quad \textit{er bestaat een boom } B(\Gamma) \textit{ die sluit.}$$

BEWIJS *($\Leftarrow$): Volgt uit de stellingen uit de paragrafen 5.1 en 11.1.*

($\Rightarrow$): Dit bewijzen we met behulp van contrapositie. Stel dus dat er geen sluitende boom voor Γ bestaat. We zullen laten zien hoe we dan een model $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle$ voor Γ kunnen construeren.

Uit het gegeven volgt dat iedere boom voor Γ open blijft. Dit betekent dat ook een canonieke boom voor Γ een niet-sluitende tak T bezit. Formeel zullen we T beschouwen als de verzameling van alle formules in T. We laten zien hoe we een model voor Γ uit T kunnen 'aflezen'. Eerst definiëren we hiertoe een equivalentierelatie R op de verzameling van alle termen die in de formules in T voorkomen. De verzameling van alle equivalentieklassen geïnduceerd door R, wordt het domein $|\mathcal{A}|$ van $\mathcal{A}$. Daarna definiëren we de denotaties van de niet-logische symbolen uit T in overeenstemming met wat we in T 'lezen'. We delen de constructie van het model $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle$ op in verschillende stappen.

a. De definitie van de relatie R.

Zij L_T de eerste-ordetaal met als niet-logische symbolen alle niet-logische symbolen die in de formules in T voorkomen en zij BT de verzameling van alle termen die in de formules in T voorkomen (de boomtermen).

Definieer de relatie R als volgt:

$$R = \{(s,t) \in BT \times BT \mid (s = t) \in T\}$$

b. R is een equivalentierelatie.

We laten zien dat R reflexief, symmetrisch en transitief is. Zij $s \in BT$. Dan is $(s,s) \in R$, omdat de formule $s = s$ in T voorkomt vanwege de canoniciteit van $B(\Gamma)$. Dit betekent dat R reflexief is.

Zij $s, t \in BT$ en $(s,t) \in R$. Dit betekent dat de formule $s = t$ in T voorkomt. Verder is $(s = s) \in T$ vanwege de canoniciteit van $B(\Gamma)$. Maar dan is ook $(t = s) \in T$ omdat de sub-regel vanwege de canoniciteit moet zijn toegepast op $s = s$ en $s = t$. Hieruit volgt dat $(t,s) \in R$, zodat R symmetrisch is.

De transitiviteit van R kan op analoge wijze worden afgeleid.

c. De definitie van een interpretatie $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle$ voor de taal L_T.

Definieer het domein van $\mathcal{A}$ als volgt:

$$|\mathcal{A}| = \{\ [s]_R \mid s \in BT\}.$$

De denotaties van de niet-logische symbolen van L_T kiezen we als volgt:

- *Als P een m-plaatsig predicaatsymbool is, dan*

$$\begin{aligned} P^{\mathcal{A}} \quad = \quad & \{([s_1]_R, \ldots, [s_m]_R) \mid \\ & P(s_1, \ldots, s_m) \in T \text{ voor } s_1, \ldots, s_m \in BT\}. \end{aligned}$$

- *Als f een n-plaatsig functiesymbool is, dan is $f^{\mathcal{A}}$ gedefinieerd door:*

$$f^{\mathcal{A}}([s_1]_R, \ldots, [s_n]_R) = [t]_R,$$

  als $(f(s_1, \ldots, s_n) = t) \in T$ voor $s_1, \ldots, s_n, t \in BT$.

- *Als $a \in BT$ een naam is, dan*

$$a^{\mathcal{A}} \quad = \quad [a]_R.$$

Zij $x \in BT$ een variabele. Definieer β zodanig dat:

$$\beta(x) \quad = \quad [x]_R.$$

d. $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle$ is een interpretatie voor de taal L_T.

Het is niet zonder meer duidelijk dat $\mathcal{A}$ een structuur is. Met name moeten we laten zien dat $|\mathcal{A}| \neq \emptyset$ en dat $f^{\mathcal{A}}$ voor alle functiesymbolen f een functie op $|\mathcal{A}|$ is. Aan de overige vereisten is wegens de definitie van $\mathcal{A}$ voldaan.

Om te beginnen is $|\mathcal{A}| \neq \emptyset$, omdat $BT \neq \emptyset$, hetgeen volgt uit $\Gamma \neq \emptyset$. Het zal nu duidelijk zijn waarom we als elementen van $|\mathcal{A}|$ equivalentieklassen geïnduceerd door R nemen: termen $s, t \in BT$ waarvoor in T is afgeleid dat $s = t$ moeten dezelfde denotatie in $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle$ krijgen.

$f^{\mathcal{A}}$ is een functie als $f^{\mathcal{A}}$ overal gedefinieerd is, en als $f^{\mathcal{A}}$ functioneel is. We laten eerst zien dat $f^{\mathcal{A}}$ functioneel is. Dat wil zeggen dat $[t_1]_R = [t_2]_R$ als:

$$\begin{aligned} f^{\mathcal{A}}([s_1]_R, \ldots, [s_n]_R) \quad &= \quad [t_1]_R \quad \text{en} \\ f^{\mathcal{A}}([s_1]_R, \ldots, [s_n]_R) \quad &= \quad [t_2]_R. \end{aligned}$$

Stel dus dat dit laatste het geval is. Uit de definitie van $f^{\mathcal{A}}$ volgt dan dat er $q_i, r_i \in [s_i]_R$ $(1 \leq i \leq n)$ bestaan zodanig dat:

$$\begin{array}{lll} (f(q_1, \ldots, q_n) = t_1) & \in & T \quad \textit{en} \\ (f(r_1, \ldots, r_n) = t_2) & \in & T. \end{array}$$

Omdat $q_i, r_i \in [s_i]_R$, moet vanwege de definitie van R en de canoniciteit van $B(\Gamma)$ gelden dat $(q_i = r_i) \in T$ $(1 \leq i \leq n)$. Nogmaals gebruik makend van de canoniciteit van $B(\Gamma)$ volgt $(t_1 = t_2) \in T$ door een aantal toepassingen van de sub-regel. Dit betekent dat $[t_1]_R = [t_2]_R$.

Er blijft over om te laten zien dat $f^{\mathcal{A}}$ overal gedefinieerd, dus totaal *is. Wegens de canoniciteit van $B(\Gamma)$, is $(f(s_1, \ldots, s_n) = f(s_1, \ldots, s_n)) \in T$ voor alle termen $s_1, \ldots, s_n \in BT$. Uit de definitie van $f^{\mathcal{A}}$ volgt dan dat $f^{\mathcal{A}}$ gedefinieerd is voor alle $[s_i]_R \in |\mathcal{A}|$ $(1 \leq i \leq n)$.*

e. Voor alle termen $t \in BT$ geldt $t^{\mathcal{A},\beta} = [t]_R$.

Dit bewijzen we met structurele inductie over de term t:

- *$t = x$ voor een variabele $x \in VAR$.*
  Dan geldt dat $x^{\mathcal{A},\beta} = \beta(x) = [x]_R$.
- *$t = c$ voor een naam c.*
  Dan geldt per definitie $c^{\mathcal{A},\beta} = c^{\mathcal{A}} = [c]_R$.
- *$t = f(s_1, \ldots, s_n)$ voor $s_1, \ldots, s_n \in BT$.*
  Volgens de inductieveronderstelling is ${s_i}^{\mathcal{A},\beta} = [s_i]_R$ $(1 \leq i \leq n)$. Uit de canoniciteit van $B(\Gamma)$ volgt dat:

  $$(f(s_1, \ldots, s_n) = f(s_1, \ldots, s_n)) \quad \in \quad T.$$

  Dit betekent dat:

  $$f^{\mathcal{A}}([s_1]_R, \ldots, [s_n]_R) \quad = \quad [f(s_1, \ldots, s_n)]_R.$$

  Hieruit en uit de inductiehypothese volgt:

  $$\begin{array}{rcl} f(s_1, \ldots, s_n)^{\mathcal{A},\beta} & = & f^{\mathcal{A}}({s_1}^{\mathcal{A},\beta}, \ldots, {s_n}^{\mathcal{A},\beta}), \\ & = & f^{\mathcal{A}}([s_1]_R, \ldots, [s_n]_R), \\ & = & [f(s_1, \ldots, s_n)]_R. \end{array}$$

f. Voor alle atomen F geldt: $\quad F \in T \quad \Leftrightarrow \quad \langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models F$.

Er zijn twee mogelijkheden voor F:

- *$F = (s = t)$ voor $s, t \in BT$.*
  Als $(s = t) \in T$, dan is $[s]_R = [t]_R$. Verder geldt dat $s^{\mathcal{A},\beta} = [s]_R$ en $t^{\mathcal{A},\beta} = [t]_R$ wegens bewering (e) hierboven. Nu volgt meteen dat $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models s = t$.
  Omgekeerd, als $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models s = t$, dan $s^{\mathcal{A},\beta} = t^{\mathcal{A},\beta}$, zodat $[s]_R = [t]_R$. Dit laatste is alleen mogelijk als $(s = t) \in T$.
- *$F = P(s_1, \ldots, s_m)$ voor $s_1, \ldots, s_m \in BT$.*
  Als $P(s_1, \ldots, s_m) \in T$, dan is $([s_1]_R, \ldots, [s_m]_R) \in P^{\mathcal{A}}$ wegens de definitie van $\mathcal{A}$. Uit bewering (e) volgt $[s_i]_R = {s_i}^{\mathcal{A},\beta}$ $(1 \leq i \leq m)$, zodat $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models P(s_1, \ldots, s_m)$.
  Omgekeerd, als gegeven is dat$\langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models P(s_1, \ldots, s_m)$, dan leiden we af dat $({s_1}^{\mathcal{A},\beta}, \ldots, {s_m}^{\mathcal{A},\beta}) \in P^{\mathcal{A}}$. Daar ${s_i}^{\mathcal{A},\beta} = [s_i]_R$ $(1 \leq i \leq m)$, moet derhalve $([s_1]_R, \ldots, [s_m]_R) \in P^{\mathcal{A}}$. Hieruit volgt dat $P(s_1, \ldots, s_m) \in T$ aangezien $B(\Gamma)$ canoniek is (ga na).

g. $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle$ is een model voor Γ.
We zullen nu bewijzen dat alle formules $F \in FORM$ de volgende eigenschap bezitten:

$$F \in T \quad \Rightarrow \quad \langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models F. \qquad (*)$$

Als dit is bewezen volgt $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models \Gamma$, aangezien $\Gamma \subseteq T$. Het bewijs verloopt via volledige inductie naar de complexiteit $comp(F)$ van de formules $F \in FORM$. Neem aan dat $F \in T$.

- *Basisstap: $comp(F) = 0$.*
  Dan is F een atoom en geldt eigenschap $(*)$ wegens bewering (f) hierboven.
- *Inductiestap: $comp(F) = n + 1$.*
  De inductiehypothese luidt dat voor alle formules $F \in T$ met complexiteit $comp(F) \leq n$ geldt $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models F$.
  We behandelen alleen het geval dat $F = \neg A$. Dit geval is het meest gecompliceerd. Om de inductiestap te voltooien voor de andere gevallen, behoeft men slechts de verschillende stappen voor het onderhavige geval aan te passen.
  Zij dus $F = \neg A$ voor $A \in FORM$. We onderscheiden de volgende gevallen voor A:
  - *$A \in ATOM$.*
    Als $\neg A \in T$, dan $A \notin T$ omdat T niet sluit. Uit bewering (f) volgt nu niet *$\langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models A$, zodat $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models \neg A$.*
  - *$A = \neg C$ voor $C \in FORM$.*
    Uit de canoniciteit van $B(\Gamma)$ volgt dat $C \in T$. Aangezien $comp(C) \leq n$ kunnen we de inductiehypothese op C toepassen, hetgeen levert $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models C$. Hieruit volgt $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models \neg\neg C$.
  - *$A = (C \vee D)$ voor $C, D \in FORM$.*
    Vanwege de canoniciteit van $B(\Gamma)$ moet $(\neg C \wedge \neg D) \in T$, en ook $\neg C \in T$ en $\neg D \in T$. Omdat $comp(\neg C) \leq n$ en $comp(\neg D) \leq n$, volgt uit de inductiehypothese $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models \neg C$ en $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models \neg D$. Hieruit kan worden afgeleid $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models \neg(C \vee D)$.
  - *$A = (C \wedge D)$ voor $C, D \in FORM$.*
    Uit de canoniciteit van $B(\Gamma)$ volgt dat $(\neg C \vee \neg D) \in T$. Dit betekent dat ofwel $\neg C \in T$, ofwel $\neg D \in T$ (na splitsing van de tak). Hieruit leiden we met behulp van de inductiehypothese af dat ofwel $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models \neg C$, ofwel $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models \neg D$. In beide gevallen volgt $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models \neg(C \wedge D)$.
  - *$A = (C \rightarrow D)$ of $A = (C \leftrightarrow D)$ voor $C, D \in FORM$.*
    Analoog aan de vorige gevallen.
  - *$A = \exists x C$ voor $C \in FORM$.*
    Wederom vanwege de canoniciteit van $B(\Gamma)$ geldt $\forall x \neg C \in T$. Dit betekent dat voor alle termen $t \in BT$ geldt $\neg C[x{:=}t] \in T$. Met behulp van de inductiehypothese leiden we hieruit af dat $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models \neg C[x{:=}t]$ voor alle termen $t \in BT$.
    Passen we op dit laatste de substitutiestelling (10.2.5) toe, dan verkrijgen we:
    $$\forall\, t \in BT \cdot \langle \mathcal{A}, \beta[x{:=}t^{\mathcal{A},\beta}] \rangle \models \neg C.$$
    Aangezien $t^{\mathcal{A},\beta} = [t]_R$ voor alle $t \in BT$, en $[t]_R \in |\mathcal{A}|$ dan en slechts dan als $t \in BT$, volgt:
    $$\forall\, d \in |\mathcal{A}| \cdot \langle \mathcal{A}, \beta[x{:=}d] \rangle \models \neg C,$$
    zodat $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models \forall x \neg C$, waaruit weer volgt $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models \neg \exists x C$.

– $A = \forall x C$ *voor* $C \in FORM$.
Analoog aan het vorige geval.

In alle gevallen geldt dus eigenschap $(*)$ *voor* $F = \neg A$.

Hiermee is aangetoond dat $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models \Gamma$. ■

11.4 Opgaven

1. Zij A, B en C éénplaatsige predicaatsymbolen en R een tweeplaatsig predicaatsymbool. Ga met behulp van de Boommethode voor elk van de volgende metabeweringen na of deze juist dan wel onjuist is. Construeer voor elke onjuiste metabewering een tegenvoorbeeld.

   (a) $\models \exists x \forall y R(x,y) \rightarrow \forall y \exists x R(x,y)$.

   (b) $\models \forall x [C(x) \rightarrow \exists y C(y)]$.

   (c) $\forall x [A(x) \rightarrow B(x)] \models \forall x \{\exists y [A(x) \wedge R(x,y)] \rightarrow \exists y [B(x) \wedge R(x,y)]\}$.

   (d) $\models \forall x [\exists y C(y) \rightarrow C(x)]$.

   (e) $\models \exists x [A(x) \wedge B(x)] \leftrightarrow [\exists x A(x) \wedge \exists x B(x)]$.

   (f) $\models [\forall x A(x) \rightarrow \exists x B(x)] \rightarrow \exists x [A(x) \rightarrow B(x)]$.

   (g) $\models \exists x [A(x) \rightarrow B(x)] \rightarrow [\exists x A(x) \rightarrow \forall x B(x)]$.

   (h) $\models [\forall x A(x) \rightarrow \forall y B(y)] \rightarrow \exists x \forall y [A(x) \rightarrow B(y)]$.

   (i) $\forall x \forall y [R(x,y) \rightarrow A(x)] \models \forall x [\forall y R(x,y) \rightarrow A(x)]$.

   (j) $\forall x \exists y [R(x,y) \rightarrow A(x)] \models \forall x [\exists y R(x,y) \rightarrow A(x)]$.

   (k) $\forall x \forall y [A(x) \vee R(x,y)] \models \forall x A(x) \vee \forall x \forall y R(x,y)$.

2. Beschouw de volgende redenering (zie ook de opgaven van hoofdstuk 8).

   People are prejudiced against anyone who is liked by someone they dislike.
   But nobody is prejudiced against himself.
   So people don't like anyone who dislikes them.

   Ga met behulp van de boommethode na of deze redenering logisch geldig is. Construeer een tegenvoorbeeld als de redenering niet logisch geldig is.

3. Voltooi het bewijs van stelling 11.1.3.

4. Beschrijf een methode voor het produceren van canonieke bomen.

5. Bewijs dat de relatie R uit het bewijs van de boomstelling transitief is.

6. Voltooi het inductiebewijs van de bewering dat $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models \Gamma$ in het bewijs van de boomstelling.