Hoofdstuk 15

Resolutie in de Propositielogica

In dit hoofdstuk geven we een inleiding op het gebied van het automatisch bewijzen van theorema's. Het idee daarbij is dat een computerprogramma nagaat of een bepaalde bewering afleidbaar is of niet. Uiteraard is de constructie van dergelijke programma's, die men theoremabewijzers noemt, niet triviaal. Veel theoretisch onderzoek is en wordt daarom verricht naar de vraag hoe deze te construeren.

De indeling van dit hoofdstuk is als volgt. In paragraaf 15.1 wordt een algemene inleiding gegeven op het gebied van het automatisch bewijzen van theorema's. Daarna wordt in de paragrafen 15.2, 15.3 en 15.4 de zogenaamde *resolutiemethode* voor de propositielogica besproken. Dit is een natuurlijke-deductiemethode die bijzonder geschikt is voor het automatisch bewijzen van stellingen. De resolutiemethode bezit slechts één afleidingsregel: de *resolutie-regel*.

15.1 Automatisch bewijzen van stellingen

Na de Tweede Wereldoorlog is zeer veel onderzoek gedaan naar het automatisch bewijzen van theorema's of stellingen met behulp van een computer. Men onderscheidt *bewijs-checkers* en *theoremabewijzers*. Een bewijs-checker controleert slechts of een gegeven afleiding correct is, terwijl een theoremabewijzer voor een gegeven bewering nagaat of deze afleidbaar is en eventueel een afleiding produceert. In zijn meest ideale vorm 'berekent' een theoremabewijzer in een eindige en liefst niet al te lange rekentijd een afleiding van de betreffende bewering, of stelt vast dat deze niet afleidbaar is. Dit alles relatief ten opzichte van de gebruikte afleidingsregels, axioma's en een eventuele theorie.

Het idee dat redeneren een soort rekenen is in een logische calculus, is al vrij oud. Men vindt dit onder andere in de geschriften van de duitse wiskundige en filosoof Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646 – 1716). Afleidingen zouden in een dergelijke calculus berekend kunnen worden zoals het product van twee getallen in het decimale stelsel. Tot in het begin van deze eeuw geloofden gezaghebbende wiskundigen zoals Guiseppe Peano en David Hilbert, dat er een algoritme zou bestaan waarmee elk wiskundig probleem, mits goed geformuleerd, opgelost of 'uitgerekend' kon worden.

In de dertiger jaren bleek uit de onderzoekingen van Alonzo Church (1936) en Alan Turing (1936) dat zo'n algoritme niet bestaat. Zij bewezen, onafhankelijk van elkaar, dat er geen algoritme bestaat waarmee men de (on)vervulbaarheid van een willekeurige formule F uit de eerste-orde predicatenlogica in een eindig aantal stappen kan bepalen. Men zegt ook wel dat de eerste-orde predicatenlogica *onbeslisbaar* is. Nadere beschouwing van dit resultaat leert dat men wel een algoritme kan maken dat voor iedere onvervulbare formule F in een eindig aantal stappen de onvervulbaarheid vaststelt of bewijst. Is F echter vervulbaar, dan levert dit algoritme geen antwoord op in de zin dat het niet stopt voor de invoer F. Een dergelijke procedure noemt men een *semi-beslissingsprocedure*.

Een voorbeeld van een semi-beslissingsprocedure voor de eerste-orde predicatenlogica is de boommethode. Als F onvervulbaar is dan kan een boom voor F na een eindig aantal reductiestappen gesloten worden. In het geval F vervulbaar is, dan kan men in het algemeen steeds nieuwe reductiestappen uitvoeren, zonder dat de boom voor F gesloten kan worden.

De wiskunde kan beschreven worden in termen van de verzamelingentheorie en de verzamelingentheorie kan geformaliseerd worden in de eerste-orde logica. Dit heeft tot gevolg dat de wiskunde —alhoewel dit niet zo handig is— geformaliseerd kan worden in de eerste-orde predicatenlogica. Dit betekent dat iedere wiskundige stelling geformuleerd kan worden als een formule uit de eerste-orde predicatenlogica en ieder bewijs van een wiskundige stelling opgeschreven kan worden als een afleiding in de in de eerste-orde predicatenlogica. Deze afleiding kan axiomatisch zijn, of volgens een systeem van natuurlijke deductie. Uit de onbeslisbaarheidsresultaten van Church en Turing volgt dat de wiskunde als geheel onbeslisbaar is; anders gezegd, de veronderstelling van Peano en Hilbert dat er een algoritme voor de oplossing van alle 'goed-geformuleerde' wiskundige problemen zou bestaan, is hierdoor weerlegd. Bovenstaand resultaat houdt echter niet in dat alle delen van de wiskunde onbeslisbaar zijn. Zo is bijvoorbeeld door Alfred Tarski (1948) bewezen dat de elementaire vlakke meetkunde beslisbaar is. Hieruit volgt, dat men voor de elementaire vlakke meetkunde een theoremabewijzer kan maken.

Bij de constructie van theoremabewijzers maakt men primair gebruik van bewijsmethoden die ontleend zijn aan de logica. Deze worden meestal aangevuld met allerlei technieken om het bewijs sneller te vinden. Dit noemt men *heuristische methoden*. Theoremabewijzers die worden geconstrueerd in het kader van de kunstmatige intelligentie, maken ook vaak gebruik van theorieën uit de psychologie over het functioneren van het menselijke denken. Daarmee beoogt men de theoremabewijzer het menselijk redeneren te laten imiteren.

Voor de wiskunde bestaan er momenteel diverse theoremabewijzers. De hierin gebruikte logische methoden zijn gebaseerd op natuurlijke deductie, op de zogenaamde stelling van Herbrand op varianten van de resolutieregel (zie dit hoofdstuk en het volgende), en op heuristische methoden om 'overbodig werk' te vermijden. Doorgaans worden in een theoremabewijzer diverse bewijsmethoden gecombineerd. Momenteel kunnen met behulp van theoremabewijzers de meeste wiskunde- en logica-opgaven die men doorgaans aan eerstejaars studenten als oefenmateriaal geeft, bevredigend worden opgelost.

Theoremabewijzers worden toegepast in zogenaamde *kennisverwerkende systemen* en *expert systemen*. Kennisverwerkende systemen worden onder andere gebruikt bij het besturen van technische processen, zoals robotbesturing en besturing van onbemande ruimtevaartuigen. Expert systemen zijn computerprogramma's waarin kennis in de vorm van regels is opgeslagen. Dit soort systemen kan een gebruiker bijstaan bij het oplossen van bijvoorbeeld juridische of medische problemen.

15.2 De resolutieregel

In 1965 presenteerde J.A. Robinson een efficiënte methode om vast te stellen of een verzameling formules onvervulbaar is: de *resolutiemethode*. In feite is dit een *weerleggingsprocedure* net als de boommethode. Een weerleggingsprocedure is een methode om op een systematische wijze de onvervulbaarheid van een verzameling formules aan te tonen. De resolutiemethode is, in tegenstelling tot de boommethode, alleen toepasbaar op proposities die in conjunctieve normaalvorm staan. Daar staat tegenover dat de resolutiemethode slechts één afleidingsregel bezit, de zogenaamde *resolutieregel*.

We zullen aannemen dat propositionele formules steeds in conjunctieve normaalvorm staan en gerepresenteerd worden door verzamelingen van disjuncties van literalen. Een formule $F = D_1 \wedge \ldots \wedge D_n$ zal dus worden weergegeven als $F = \{D_1, \ldots, D_n\}$ waarin de D_i $(1 \leq i \leq n)$ disjuncties zijn van de vorm $L_{i1} \vee \ldots \vee L_{im_i}$. Deze disjuncties zullen we vaak ook voorstellen als verzamelingen: $D_i = \{L_{i1}, \ldots, L_{im_i}\}$. Dit is gerechtvaardigd aangezien iedere disjunctie D waarin een bepaalde literaal L meer dan één keer voorkomt, equivalent is met de disjunctie D' verkregen uit D door daarin op één na alle voorkomens van L te schrappen. We nemen derhalve aan dat geen enkele literaal meer dan één keer in dezelfde disjunctie voorkomt.

15.2.1 DEFINITIE **Complement van een literaal**
Zij L een literaal en p een propositiesymbool. Als $L = p$, dan is het complement *van L, notatie $\overline{L}$, gedefinieerd als $\neg p$; als $L = \neg p$, dan is $\overline{L} = p$.*

In de volgende definitie gebruiken we de volgende notatie: als D een disjunctie is en L een literaal, dan duiden we met $D - L$ de disjunctie aan waaruit L is verwijderd. Als we D als een verzameling opvatten, zou het dus meer correct zijn om te schrijven $D - \{L\}$.

15.2.2 DEFINITIE **Resolvent en resolutieregel**
Zij D_1 en D_2 disjuncties van literalen. Zij verder L een literaal zodanig dat $L \in D_1$ en $\overline{L} \in D_2$. Dan noemt men de verzameling:

$$\mathcal{R}(D_1, D_2) \;=\; (D_1 - L) \cup (D_2 - \overline{L})$$

de resolvent *van D_1 en D_2 naar L. Als $D_1 = \{L\}$ en $D_2 = \{\overline{L}\}$, dan is $\mathcal{R}(D_1, D_2)$ gelijk aan de lege disjunctie, notatie $\Box$. Het voorschrift om de resolvent van twee disjuncties te bepalen wordt de* resolutieregel *genoemd.*

In de notatie $\mathcal{R}(D_1, D_2)$ komt niet tot uitdrukking naar welke literaal geresolveerd wordt. Door D_1, D_2 en $\mathcal{R}(D_1, D_2)$ te vergelijken wordt dit echter altijd duidelijk.

15.2.3 VOORBEELD Bepaling van een resolvent.

1. Zij $D_1 = \{p, q\}$ en $D_2 = \{\neg p, r\}$. De resolvent $\mathcal{R}(D_1, D_2)$ naar p is $\{q, r\}$. In formulevorm betekent dit: als $D_1 = (p \vee q)$ en $D_2 = (\neg p \vee r)$, dan $\mathcal{R}(D_1, D_2) = (q \vee r)$.
2. Voor de disjuncties $D_1 = \{p, q\}$ en $D_2 = \{p, q, \neg r\}$ bestaat geen resolvent.
3. $\mathcal{R}(p, \neg p) = \Box$. ∎

15.2.4 STELLING **Correctheid resolutieregel**
Als $\mathcal{R}(D_1, D_2)$ een resolvent is van de disjuncties D_1 en D_2, dan:

$$D_1, D_2 \models \mathcal{R}(D_1, D_2).$$

BEWIJS Stel $D_1 = (L \vee E_1)$ en $D_2 = (\overline{L} \vee E_2)$, waarin L een literaal is, en E_1 en E_2 disjuncties van literalen zijn. Nu is $\mathcal{R}(D_1, D_2) = E_1 \cup E_2$. Er zijn nu verschillende mogelijkheden.

Stel dat E_1 en E_2 beide niet-leeg zijn. Voor ieder model v voor D_1 en D_2 geldt ofwel $v(L) = 0$, ofwel $v(L) = 1$. In het eerste geval moet gelden $v(E_1) = 1$, en in het tweede geval $v(E_2) = 1$. Hieruit volgt $v(E_1 \cup E_2) = 1$.

Als E_1 en E_2 beide leeg zijn, dan bestaat er geen valuatie v die zowel D_1 als D_2 vervult. Hiermee is dit geval afgehandeld.

Als E_1 leeg is en E_2 niet-leeg, dan geldt voor een model v voor D_1 en D_2 dat $v(L) = 1$. Dit impliceert dat $v(E_2) = 1$, zodat het gestelde volgt. Evenzo voor het geval dat E_2 leeg is en E_1 niet-leeg. ∎

15.2.5 DEFINITIE **Resolutie-afleiding**
Zij D een disjunctie en F een niet-lege verzameling disjuncties. Een afleiding *van D uit F is een rij disjuncties:*

$$R_1, R_2, \ldots, R_n = D,$$

waarin iedere R_i $(1 \leq i \leq n)$ een disjunctie uit F is, òf de resolvent van twee disjuncties R_j en R_k waarvoor $1 \leq j, k \leq i$. Als er een resolutie-afleiding van D uit F bestaat, dan zegt men dat D afleidbaar *is uit F, notatie $F \vdash_{\mathcal{R}} D$. Tenslotte noemt men n de* lengte *van de afleiding.*

15.2.6 VOORBEELD Resolutie-afleiding.
Zij $F = \{\neg p \vee q,\ \neg q,\ p\}$. De rij disjuncties:

1. $\neg p \vee q$ (element F)
2. $\neg q$ (element F)
3. p (element F)
4. $\neg p$ (resolvent 1,2)
5. $\Box$ (resolvent 3,4)

is een afleiding van $\Box$ uit F, zodat $F \vdash_{\mathcal{R}} \Box$. ∎

In de volgende paragraaf zullen we zien dat we vooral geïnteresseerd zijn in afleidingen van $F \vdash_{\mathcal{R}} \Box$. Immers, in dat geval is F onvervulbaar volgens stelling 15.4.2, die we in paragraaf 15.3 zullen aantonen.

15.2.7 STELLING **Correctheid resolutie**
Zij $F \in PROP$ een formule in conjunctieve normaalvorm en D een disjunctie. Dan geldt:

$$F \vdash_{\mathcal{R}} D \quad \Rightarrow \quad F \models D.$$

BEWIJS *Door middel van inductie over de lengte van de afleiding.* ∎

15.3 De resolutiemethode

Bij stelling 15.4.2 zullen we bewijzen dat een formule F onvervulbaar is dan en slechts dan als $F \vdash_{\mathcal{R}} \square$. Op dit resultaat kan een elegant algoritme worden gebaseerd waarmee men in een eindig aantal stappen kan nagaan of een formule F onvervulbaar is of niet. Bovendien bevat het algoritme slechts één gemakkelijk te implementeren afleidingsregel, namelijk de resolutieregel. Het algoritme is als volgt.

Resolutie-algoritme

Stap 1 Genereer, indien mogelijk, een nieuwe resolvent R van disjuncties uit F; anders **Stop**: F is vervulbaar.

Stap 2 Als $R = \square$ dan **Stop**: F is onvervulbaar; anders $F := F \cup \{R\}$ en ga naar **Stap 1**.

Het algoritme stopt in elk geval als de invoer F onvervulbaar is, want dan wordt de lege disjunctie $\square$ gegenereerd (stelling 15.4.2). Als F vervulbaar is, dan stopt het algoritme ook. Immers, aangezien F eindig veel disjuncties bevat, kunnen er bij stap 1 slechts een eindig aantal *nieuwe* resolventen worden gegenereerd. Zodra er geen nieuwe resolventen meer gegenereerd kunnen worden —dit is in een eindig aantal stappen te controleren—, stopt het algoritme en is F vervulbaar.

15.3.1 VOORBEELD Resolutie-afleiding.
We laten met behulp van resolutie zien dat:

$$p \to q, q \to r \vdash p \to r.$$

We moeten dus aantonen dat de verzameling disjuncties:

$$F = \{\neg p \vee q,\ \neg q \vee r,\ p,\ \neg r\}$$

onvervulbaar is. Dit doen we door $F \vdash \square$ af te leiden.

1. $\neg p \vee q$ (element F)
2. $\neg q \vee r$ (element F)
3. p (element F)
4. $\neg r$ (element F)
5. q (resolvent 1,3)
6. r (resolvent 2,5)
7. $\square$ (resolvent 4,6) ∎

15.3.2 VOORBEELD Resolutie-afleiding.
We laten met behulp van resolutie zien dat:

$$(p \to \neg r) \vee (p \to q), r \to p \vdash r \to q.$$

Hiertoe leiden we af dat de verzameling:

$$F = \{\neg p \vee \neg r \vee q,\ \neg r \vee p,\ r,\ \neg q\}$$

onvervulbaar is. Dit doen we weer door $F \vdash_{\mathcal{R}} \square$ af te leiden.

1.	$\neg p \vee q \vee \neg r$	(element F)
2.	$p \vee \neg r$	(element F)
3.	$\neg q$	(element F)
4.	r	(element F)
5.	p	(resolvent 2,4)
6.	$q \vee \neg r$	(resolvent 1,5)
7.	q	(resolvent 4,6)
8.	$\square$	(resolvent 3,7) ■

15.4 Volledigheid van de resolutiemethode

We zullen in deze paragraaf de stelling bewijzen die ten grondslag ligt aan de resolutiemethode.

Eerst introduceren we een algoritme waarmee eindige verzamelingen F van disjuncties kunnen worden 'vereenvoudigd'. Het idee achter dit algoritme is dat alle disjuncties die geen invloed hebben op het (on)vervulbaar zijn van F, uit F worden verwijderd met als resultaat de verzameling F_0.

Vereenvoudigingsalgoritme

Stap 1 $F_0 := F$.

Stap 2 Verwijder uit F_0 alle disjuncties die een paar complementaire literalen L en $\overline{L}$ bevatten.

Stap 3 Verwijder uit F_0 alle disjuncties die een literaal L bevatten waarvan het complement $\overline{L}$ in geen enkele andere disjunctie in F voorkomt.

15.4.1 STELLING *Zij $F \in PROP$ een formule in conjunctieve normaalvorm, en zij F_0 het resultaat van het toepassen van het vereenvoudigingsalgoritme op F, dan geldt:*

$$F_0 \text{ is onvervulbaar} \quad \Leftrightarrow \quad F \text{ is onvervulbaar.}$$

Als $F_0 = \emptyset$ dan wordt hierbij aangenomen dat F_0 vervulbaar is.

BEWIJS Wordt aan de lezer overgelaten. ■

15.4.2 STELLING **Volledigheid resolutie**
Zij $F \in PROP$ een formule in conjunctieve normaalvorm. Dan geldt:

$$F \vdash_{\mathcal{R}} \square \quad \Leftrightarrow \quad F \text{ is onvervulbaar.}$$

BEWIJS

($\Rightarrow$) *We bewijzen de uitspraak met een redenering uit het ongerijmde. Stel dat $F \vdash_{\mathcal{R}} \square$ en dat F vervulbaar is. Omdat $F \vdash_{\mathcal{R}} \square$, bestaat er een afleiding:*

$$R_1, R_2, \ldots, R_n = \square.$$

Uit de definitie van een afleiding volgt dat $F \vdash_{\mathcal{R}} R_i$ voor $1 \leq i \leq n$. Toepassing van stelling 15.2.7 levert dat $F \models R_i$ voor $1 \leq i \leq n$. Als F vervulbaar is, bestaat er een valuatie v zodanig dat $v(F) = 1$. In combinatie met $F \models R_i$ volgt hieruit dat $v(R_i) = 1$ voor alle $1 \leq i \leq n$. Omdat $F \vdash_{\mathcal{R}} \square$, is er een literaal L zodanig dat $L = R_j$ en $\overline{L} = R_k$ voor $1 \leq j < k < n$. Dit betekent dat $v(L) = v(\overline{L}) = 1$, hetgeen onmogelijk is.

($\Leftarrow$) *Eerst passen we het vereenvoudigingsalgoritme toe op F met als resultaat een deelverzameling F_0 van F die aan de volgende eigenschap voldoet:*

$$F_0 \text{ is onvervulbaar} \quad \Leftrightarrow \quad F \text{ is onvervulbaar.}$$

Omdat het evident is dat $F \vdash_{\mathcal{R}} \square$ indien $F_0 \vdash_{\mathcal{R}} \square$, volgt nu dat de stelling bewezen is, als we kunnen aantonen:

$$F_0 \text{ is onvervulbaar} \quad \Rightarrow \quad F_0 \vdash_{\mathcal{R}} \square.$$

Neem aan dat F_0 de propositiesymbolen $q_1, \ldots, q_n$ bevat, waarbij $n \geq 0$. Het bewijs verloopt via volledige inductie naar n.

- *Basisstap: $n = 0$.*
  In dit geval is $F_0 = \emptyset$. De bewering geldt omdat $\emptyset$ per definitie vervulbaar is.
- *Inductiestap: $n > 0$.*
  De inductiehypothese luidt dat de stelling klopt voor alle formules F_0 die minder dan n verschillende propositiesymbolen bevatten.
  We definiëren nu een verzameling G van disjuncties, die aan de volgende eigenschappen voldoet:

$$F_0 \text{ is onvervulbaar} \quad \Rightarrow \quad G \text{ is onvervulbaar,} \tag{15.1}$$
$$G \text{ is onvervulbaar} \quad \Rightarrow \quad G \vdash_{\mathcal{R}} \square, \tag{15.2}$$
$$G \vdash_{\mathcal{R}} \square \quad \Rightarrow \quad F_0 \vdash_{\mathcal{R}} \square. \tag{15.3}$$

  Als dit kan worden aangetoond, dan is de stelling bewezen.
  Het idee is dat G alle disjuncties bevat die in één resolutiestap met betrekking tot q_n uit F_0 kunnen worden verkregen, en alle disjuncties die q_n (of $\neg q_n$) niet bevatten.

  Constructie van G.
  Omdat F_0 het propositiesymbool q_n bevat en vereenvoudigd is, kunnen we F_0 schrijven als:

$$\begin{aligned} F_0 \quad = \quad & \{q_n \vee C_1, \ldots, q_n \vee C_k, \neg q_n \vee D_1, \ldots, \neg q_n \vee D_l, \\ & E_1, \ldots, E_m\}, \end{aligned}$$

  waarbij $C_1, \ldots, C_k, D_1, \ldots, D_l$ en $E_1, \ldots, E_m$ ($k, l \geq 1$ en $m \geq 0$) disjuncties zijn waarin q_n niet voorkomt. Definieer G als de verzameling:

$$G \quad = \quad \{C_i \cup D_j \mid 1 \leq i \leq k \text{ en } 1 \leq j \leq l\} \cup \{E_1, \ldots, E_m\}.$$

  G bestaat dus uit alle resolventen van $q_n \vee E_i$ en $\neg q_n \vee E_j$, en alle disjuncties $E_1, \ldots, E_m$. Dit betekent dat het propositiesymbool q_n niet in G voorkomt.
  Merk op dat $F_0 \vdash_{\mathcal{R}} \square$, als er een i en een j bestaat zodanig dat $C_i \cup D_j = \square$ ($1 \leq i \leq k$ en $1 \leq j \leq l$). In dat geval is de inductiestap voltooid. Neem daarom in het vervolg van het bewijs aan dat dergelijke i en j niet bestaan.

Bewijs van bewering (15.1).

We bewijzen met contrapositie dat G onvervulbaar is, als F_0 dat is. Als G vervulbaar is, dan bestaat er een valuatie v zodanig dat $v(E_1) = \ldots = v(E_m) = 1$, en $v(C_i \cup D_j) = 1$ voor alle $1 \leq i \leq k$ en $1 \leq j \leq l$ (hier maken we gebruik van de aanname dat $C_i \cup D_j \neq \square$, zodat het zinvol is om te praten over $v(C_i \cup D_j)$). Hieruit volgt dat $v(C_i) = 1$ voor alle $1 \leq i \leq k$, of $v(D_j) = 1$ voor alle $1 \leq j \leq l$.

In het geval dat $v(C_i) = 1$ voor alle $1 \leq i \leq k$, dan wordt de verzameling F_0 vervuld door een valuatie w waarvoor geldt dat $w(q_s) = v(q_s)$ voor $1 \leq s \leq n-1$, en $w(q_n) = 0$.

In het geval dat $v(D_j) = 1$ voor alle $1 \leq j \leq l$, dan wordt de verzameling F_0 vervuld door een valuatie w waarvoor geldt dat $w(q_s) = v(q_s)$ voor $1 \leq s \leq n-1$, en $w(q_n) = 1$.

Hieruit volgt dat de verzameling F_0 vervulbaar is.

Bewijs van bewering (15.2).

G is een verzameling van disjuncties waarin het propositiesymbool q_n niet voorkomt. Volgens de inductiehypothese geldt dus voor G:

$$G \text{ is onvervulbaar} \quad \Rightarrow \quad G \vdash_{\mathcal{R}} \square.$$

Bewijs van bewering (15.3).

Als $G \vdash_{\mathcal{R}} \square$, dan is er een afleiding α van $\square$ uit G. De elementen van G die in α voorkomen, zijn of een resolvent van twee elementen uit F_0, of een element uit F_0. Door de disjuncties uit F_0 achter elkaar te zetten en daarachter de rij α verkrijgt men een afleiding van $\square$ uit F_0. Dit betekent dat $F_0 \vdash_{\mathcal{R}} \square$.

Hiermee is de stelling bewezen. ■

15.4.3 COROLLARIUM *Zij $F \in PROP$ een formule in conjunctieve normaalvorm, en zij F_0 het resultaat van het toepassen van het vereenvoudigingsalgoritme op F, dan geldt:*

$$F_0 \vdash_{\mathcal{R}} \square \quad \Leftrightarrow \quad F \vdash_{\mathcal{R}} \square.$$

BEWIJS Wordt aan de lezer overgelaten. ■

Om te bepalen of een eindige verzameling disjuncties F onvervulbaar is, volstaat het dus om te bepalen of voor de vereenvoudiging F_0 van F geldt $F_0 \vdash_{\mathcal{R}} \square$.

15.5 Opgaven

1. Zij p, q en r propositiesymbolen. Bewijs door middel van resolutie dat:

   (a) $\vdash (p \to (q \to r)) \to (q \to (p \to r))$.

   (b) $\vdash ((p \vee (p \to q)) \to q) \to q$.

   (c) $p \leftrightarrow q, (\neg p \wedge \neg q) \to \neg r, r \vdash q$.

   (d) $p \wedge q \to \neg r, \neg(r \to s), q \vee s \vdash \neg p$.

2. Bewijs stelling 15.2.7.
3. Bewijs stelling 15.4.1.
4. Bewijs corollarium 15.4.3.