Hoofdstuk 16

Resolutie in de Predicatenlogica

In dit hoofdstuk zullen we de resolutiemethode generaliseren voor de predicatenlogica. Hierbij moet rekening worden gehouden met het feit dat de predicatenlogica kwantoren bezit en met het feit dat disjuncties variabelen kunnen bevatten. Het eerstgenoemde probleem wordt opgevangen door formules in zogenaamde *Skolemnormaalvorm* (zie paragraaf 16.1) te brengen waardoor de kwantoren worden geëlimineerd. Daarna kan de kwantorvrije formule in conjunctieve normaalvorm worden gebracht. Het probleem van de variabelen wordt opgelost door de resolutieregel uit te breiden met *unificatie*. Met behulp van unificatie kunnen geschikte substituties voor variabelen in disjuncties worden gevonden ter bepaling van resolventen. De theorie van substitutie en unificatie zal worden behandeld in paragraaf 16.2. Voor unificatie bestaan verschillende algoritmen. We behandelen in paragraaf 16.3 het algoritme van Robinson en geven er een correctheidsbewijs voor. Daarna wordt in paragraaf 16.4 de resolutieregel voor de predicatenlogica geformuleerd. Met behulp van deze resolutieregel kan op eenvoudige wijze een resolutie-algoritme worden verkregen. Dit algoritme en voorbeelden van toepassingen ervan zijn het onderwerp van paragraaf 16.5. Het hoofdstuk wordt besloten met het bewijs van de volledigheid van de resolutie (§16.6).

16.1 De Skolemnormaalvorm

Om in de propositielogica de resolutiemethode te kunnen toepassen dienen de formules in conjunctieve normaalvorm te staan. Dat is ook het geval in de predicatenlogica. Bovendien is de resolutiemethode voor de predicatenlogica beperkt tot formules die geen identiteit (=) bevatten. Om een willekeurige formule uit de predicatenlogica te kunnen schrijven als een verzameling disjuncties moeten eerst de kwantoren worden weggewerkt. Dit proces noemt men *skolemiseren*. De uiteindelijke normaalvorm die na het skolemiseren ontstaat, noemt men de *Skolemnormaalvorm*. Deze normaalvorm berust op de volgende ideeën.

Iedere formule $F \in FORM$ kan getransformeerd worden in een prenexnormaalvorm F^p met een prenex bestaande uit een rij kwantoren en een matrix die geen kwantoren bevat (zie hoofdstuk 10). De zo verkregen formule F^p is equivalent met F. De matrix van F^p is een formule zonder kwantoren en kan dus getransformeerd worden in een conjunctieve normaalvorm (zie hoofdstuk 4). De zo verkregen formule $F^{p,c}$ is equivalent met F^p en dus ook met F. Merk op dat zowel de prenexnormaalvorm als de conjunctieve normaalvorm van een formule F niet éénduidig zijn bepaald: bij één formule kan men meerdere formules in prenexnormaalvorm, respectievelijk conjunctieve normaalvorm vinden.

Het idee van de Skolemnormaalvorm is om de formule $F^{p,c}$ om te zetten in een formule F^s die geen existentiële kwantoren meer bevat. We lichten dit toe aan een voorbeeld.

16.1.1 VOORBEELD Skolemnormaalvorm.
Zij $F = \forall x \exists y P(x, y)$ voor een tweeplaatsig predicaatsymbool P. Deze formule brengt tot uitdrukking dat er voor iedere x een y bestaat zodanig dat $P(x, y)$. Het is evident dat deze y over het algemeen afhankelijk is van de x. Met andere woorden: y is een functie van x. Stel $y = f(x)$ en beschouw de formule $F^s = \forall x P(x, f(x))$ voor een nieuw functiesymbool f. De formule F^s noemt men dan de *Skolemnormaalvorm* van F. Het functiesymbool f dat in de formule F^s is geïntroduceerd, noemt men een *Skolemfunctie*. De Skolemfunctie f brengt dus tot uitdrukking dat y afhankelijk is van x.

De formules F en F^s zijn niet equivalent. Immers, zij $\mathcal{A}$ een structuur met $|\mathcal{A}| = \mathbb{N}$, $P^{\mathcal{A}} = <$ en $f^{\mathcal{A}}(n) = n$ voor $n \in \mathbb{N}$, dan geldt evident dat $\mathcal{A} \models F$, maar *niet* $\mathcal{A} \models F^s$.

Gelukkig is er een belangrijke eigenschap die de formules F en F^s beide bezitten:

$$F \text{ is onvervulbaar} \quad \Leftrightarrow \quad F^s \text{ is onvervulbaar.}$$

Dit is de eigenschap van F en F^s die we nodig blijken te hebben.

Zij nu $F = \forall x \forall y \exists z Q(x, y, z)$, dan kan men een Skolemnormaalvorm F^s van F vinden door een tweeplaatsige Skolemfunctie g te introduceren; de variabele z is namelijk afhankelijk van x en y. Dit geeft $F^s = \forall x \forall y Q(x, y, g(x, y))$. Er geldt weer dat F onvervulbaar is dan en slechts dan als F^s onvervulbaar is.

Als er geen universele kwantoren vóór de existentiële kwantor staan, dan introduceert men een *nulplaatsige* functie, ofwel een individuele constante. Als $F = \exists x R(x)$, dan geldt dus dat $F^s = R(a)$. Ook in dit geval noemt men a de Skolemfunctie.

In alle drie de gevallen zegt men dat de existentiële kwantor is *geskolemiseerd* door introductie van een Skolemfunctie. ■

Het idee van de Skolemnormaalvorm moge nu duidelijk zijn. Voor een formule $F \in FORM$ bepaalt men eerst de formule $F^{p,c}$. Daarna verwijdert men één voor één de existentiële kwantoren uit de prenex van $F^{p,c}$ door deze op de wijze die hierboven is geschetst, te skolemiseren. We zetten alles nog eens op een rijtje in de volgende definities.

16.1.2 Definitie **Skolemiseren**
Zij $F \in FORM$ met betrekking tot een eerste-ordetaal L en zij F van de vorm:

$$\forall y_1 \ldots \forall y_{n-1} \exists y_n M,$$

waarin $n \geq 1$ en $M \in FORM$. Zij vervolgens f een individuele constante (als $n = 1$) of een functiesymbool (als $n > 1$) waarvoor geldt dat f niet voorkomt in L. Dan noemt men de formule:

$$\forall y_1 \ldots \forall y_{n-1} M[y_n := f(y_1, \ldots, y_{n-1})]$$

het resultaat van het skolemiseren *van de existentiële kwantor $\exists y_n$. Het symbool f noemt men een* Skolemfunctie.

Uit de bovenstaande definitie blijkt dat een formule F' die het resultaat is van het skolemiseren van een existentiële kwantor uit een formule F uit een eerste-ordetaal L, geen formule is uit L. De formule F' behoort tot de taal L' die de uitbreiding is van L met de Skolemfunctie f.

16.1.3 Definitie **Skolemnormaalvorm**
Zij $F \in FORM$. Een Skolemnormaalvorm *F^s van F is een formule die verkregen wordt door:*

1. *F in een prenexnormaalvorm $F^{p,c}$ te brengen waarvan de matrix in conjunctieve normaalvorm staat, en daarna*

2. *één voor één de existentiële kwantoren in de prenex van $F^{p,c}$ te skolemiseren.*

16.1.4 Voorbeeld Skolemnormaalvorm.

1. Zij $F = \exists x \forall y P(x,y) \rightarrow \exists z Q(z)$. De volgende twee formules zijn prenexnormaalvormen van F:

$$\begin{aligned} F_1^{p,c} &= \forall x \exists y [\neg P(x,y) \vee Q(y)], \\ F_2^{p,c} &= \forall x \exists y \exists z [\neg P(x,y) \vee Q(z)]. \end{aligned}$$

De twee hiermee corresponderende Skolemnormaalvormen zijn:

$$\begin{aligned} F_1^s &= \forall x[\neg P(x, f(x)) \vee Q(f(x))], \\ F_2^s &= \forall x[\neg P(x, f(x)) \vee Q(g(x))]. \end{aligned}$$

Dit illustreert dat zowel prenexnormaalvormen, als Skolemnormaalvormen niet éénduidig bepaald zijn. Verder geldt dat $F_1^{p,c} \approx F_2^{p,c}$, maar *niet* $F_1^s \approx F_2^s$ (ga na).

2. De Skolemnormaalvorm van:

$$\exists x \forall y \exists u \forall v \forall w \exists z M(x, y, u, v, w, z),$$

is gelijk aan:

$$\forall y \forall v \forall w M(a, y, f(y), v, w, g(y, v, w)).$$

Hierin zijn a, f en g de Skolemfuncties. ■

16.1.5 STELLING *Zij $F \in ZIN$ met betrekking tot een eerste-ordetaal L, en zij L' de uitbreiding van L met de Skolemfuncties die in de Skolemnormaalvorm F^s van F voorkomen. Dan geldt voor L' dat:*

$$F \text{ is onvervulbaar} \quad \Leftrightarrow \quad F^s \text{ is onvervulbaar.}$$

BEWIJS *We bewijzen de volgende bewering. Zij $G \in FORM$ een formule in prenexnormaalvorm waarvan de prenex tenminste één existentiële kwantor bevat, en zij G' het resultaat van het skolemiseren van de eerste existentiële kwantor in G. Dan geldt:*

$$G \text{ is vervulbaar} \quad \Leftrightarrow \quad G' \text{ is vervulbaar.}$$

Als dit is bewezen, dan volgt de stelling door volledige inductie naar het aantal existentiële kwantoren in de prenex van de formule $F^{p,c}$ (een prenexnormaalvorm van F waarvan de matrix in conjunctieve normaalvorm staat). Hierbij gebruikt men dat $F \approx F^{p,c}$.

Stel dat voor een $M \in FORM$, $n \geq 1$ en een Skolemfunctie f:

$$\begin{aligned} G &= \forall y_1 \ldots \forall y_{n-1} \exists y_n M, \\ G' &= \forall y_1 \ldots \forall y_{n-1} M[y_n := f(y_1, \ldots, y_{n-1})]. \end{aligned}$$

We zullen nu bewijzen dat G vervulbaar is dan en slechts dan als G' vervulbaar is.

($\Rightarrow$) *Als G vervulbaar is, dan is er een interpretatie $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle$ zodanig dat:*

$$\forall a_1 \in |\mathcal{A}| \ \ldots \ \forall a_{n-1} \in |\mathcal{A}| \ \exists a_n \in |\mathcal{A}| \cdot \\ \langle \mathcal{A}, \beta[y_1 \mapsto a_1] \cdots [y_{n-1} \mapsto a_{n-1}][y_n \mapsto a_n] \rangle \models M.$$

Zij nu $\mathcal{B}$ een structuur die gelijk is aan $\mathcal{A}$, behalve dat voor gegeven $a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathcal{A}$:

$$f^{\mathcal{B}}(a_1, \ldots, a_{n-1}) \quad = \quad a_n,$$

voor een $a_n \in \mathcal{A}$ *zodanig dat:*

$$\langle \mathcal{A}, \beta[y_1 \mapsto a_1] \cdots [y_{n-1} \mapsto a_{n-1}][y_n \mapsto a_n] \rangle \models M.$$

Dan is:

$$f(y_1, \ldots, y_{n-1})^{\mathcal{B}, \beta[y_1 \mapsto a_1] \cdots [y_{n-1} \mapsto a_{n-1}]} \quad = \quad a_n.$$

Uit het bovenstaande en de substitutiestelling volgt dat:

$$\forall a_1 \in |\mathcal{A}| \ \ldots \ \forall a_{n-1} \in |\mathcal{A}| \cdot$$
$$\langle \mathcal{B}, \beta[y_1 \mapsto a_1] \cdots [y_{n-1} \mapsto a_{n-1}] \rangle \models M[y_n := f(y_1, \ldots, y_{n-1})].$$

Hieruit volgt $\langle \mathcal{B}, \beta \rangle \models G'$*, zodat* G' *vervulbaar is.*

($\Leftarrow$) *Als* G' *vervulbaar is, dan is er een interpretatie* $\langle \mathcal{A}, \beta \rangle$ *zodanig dat:*

$$\forall a_1 \in |\mathcal{A}| \ \ldots \ \forall a_{n-1} \in |\mathcal{A}| \cdot$$
$$\langle \mathcal{A}, \beta[y_1 \mapsto a_1] \cdots [y_{n-1} \mapsto a_{n-1}] \rangle \models M[y_n := f(y_1, \ldots, y_{n-1})].$$

Passen we de substitutiestelling (10.2.5) toe, en stellen we:

$$f(y_1, \ldots, y_{n-1})^{\mathcal{A}, \beta[y_1 \mapsto a_1] \cdots [y_{n-1} \mapsto a_{n-1}]} \quad = \quad a,$$

dan verkrijgen we:

$$\forall a_1 \in |\mathcal{A}| \ \ldots \ \forall a_{n-1} \in |\mathcal{A}| \cdot$$
$$\langle \mathcal{A}, \beta[y_1 \mapsto a_1] \cdots [y_{n-1} \mapsto a_{n-1}][y_n \mapsto a] \rangle \models M,$$

Hieruit volgt:

$$\forall a_1 \in |\mathcal{A}| \ \ldots \ \forall a_{n-1} \in |\mathcal{A}| \ \exists a_n \in |\mathcal{A}| \cdot$$
$$\langle \mathcal{A}, \beta[y_1 \mapsto a_1] \cdots [y_{n-1} \mapsto a_{n-1}][y_n \mapsto a_n] \rangle \models M,$$

Dit betekent:

$$\langle \mathcal{A}, \beta \rangle \models \forall y_1 \cdots \forall y_{n-1} \exists y_n M,$$

zodat G *vervulbaar is.*

Hiermee is de stelling bewezen. ■

Een zin F in Skolemnormaalvorm heeft de volgende vorm:

$$F = \forall y_1, \ldots, \forall y_n [D_1 \wedge \ldots \wedge D_n].$$

Hierin zijn de conjunctieleden D_i $(1 \leq i \leq n)$ *disjuncties* van literalen. Vaak wordt deze Skolemnormaalvorm genoteerd als de verzameling van haar disjuncties:

$$F = \{D_1, \ldots, D_n\}.$$

De universele kwantoren worden dan weggelaten. Men kan de vrije variabelen in de disjuncties daarbij zodanig kiezen dat in verschillende disjuncties verschillende variabelen voorkomen. Dit wordt gerechtvaardigd door het feit dat voor alle formules $A, B \in FORM$ het volgende geldt:

$$\begin{aligned} \forall x[A \wedge B] &\approx \forall x A \wedge \forall x B, \\ &\approx \forall x A \wedge \forall y B[x := y], \\ &\approx \forall x \forall y [A \wedge B[x := y]], \end{aligned}$$

voor een geschikte variabele y zodanig dat $y \notin VV(B)$.

16.1.6 Definitie **Disjunctie**
Zij $F = \{D_1, \ldots, D_n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ *een zin in Skolemnormaalvorm. De elementen* D_i $(1 \leq i \leq n)$ *van* F *worden de* disjuncties *van* F *genoemd.*

In Engelstalige literatuur worden disjuncties *clauses* genoemd.

16.1.7 Voorbeeld Disjuncties.
Zij F de formule:

$$\forall x \exists y \exists z [\neg(P(x,z) \rightarrow Q(x,y)) \vee R(x,y,z)].$$

Een Skolemnormaalvorm F^s van F is:

$$\forall x [(P(x,g(x)) \vee R(x,f(x),g(x))) \wedge (\neg Q(x,f(x)) \vee R(x,f(x),g(x)))].$$

Men kan F^s als volgt schrijven als een verzameling disjuncties:

$$\{P(x,g(x)) \vee R(x,f(x),g(x)),\ \neg Q(y,f(y)) \vee R(y,f(y),g(y))\}.$$

Merk op dat de variabele x in de tweede disjunctie is herbenoemd tot y. ■

16.2 Substitutie en unificatie

Bij resolutie in de predicatenlogica beperkt men zich tot zinnen die in Skolemnormaalvorm staan. Hierbij wordt zo'n zin over het algemeen gerepresenteerd als een verzameling van disjuncties. Net als in het hoofdstuk over resolutie voor de propositielogica is gedaan, kunnen disjuncties worden gerepresenteerd als verzamelingen van literalen.

Als een zin in Skolemnormaalvorm uitsluitend gronddisjuncties bevat, dan wordt de resolvent van twee disjuncties op dezelfde manier bepaald als in de propositielogica. Dus de resolvent van $P(f(a))$ en $\neg P(f(a)) \vee Q(a)$ naar $P(f(a))$ is gelijk aan $Q(a)$. Voor disjuncties die variabelen bevatten wordt dit anders. We illustreren dit in het volgende voorbeeld.

16.2.1 Voorbeeld De resolvent van disjuncties met variabelen.
Beschouw de volgende twee disjuncties.

$$\begin{aligned} D_1 &= P(x) \vee Q(x), \\ D_2 &= \neg P(f(y)) \vee R(y). \end{aligned}$$

Deze disjuncties kunnen niet zonder meer geresolveerd worden, want D_1 en D_2 bevatten geen complementaire literalen. Als we echter op D_1 en D_2 de substitutie:

$$\sigma = [x := f(a), y := a]$$

toepassen (dat wil zeggen, $[x{:=}f(a)]$ en $[y{:=}a]$ *simultaan* toepassen), dan resulteert dit in de gronddisjuncties:

$$\begin{aligned} D_1' &= D_1\sigma = P(f(a)) \vee Q(f(a)), \\ D_2' &= D_2\sigma = \neg P(f(a)) \vee R(a), \end{aligned}$$

met de complementaire literalen $P(f(a))$ en $\neg P(f(a))$. D_1' en D_2' zijn grondinstanties van D_1, respectievelijk D_2. D_1' en D_2' kunnen nu geresolveerd worden naar $P(f(a))$ met resolvent:

$$R_1 = Q(f(a)) \vee R(a).$$

Als we echter op D_1 en D_2 de substitutie $\theta = [x{:=}f(y)]$ toepassen, dan verkrijgen we de instanties $D_1'' = D_1\theta$ en $D_2'' = D_2\theta$ met $D_1'' = P(f(y)) \vee Q(f(y))$ en $D_2'' = \neg P(f(y)) \vee R(y)$. Dit betekent dat $D_1\theta$ en $D_2\theta$ resolveerbaar zijn naar $P(f(y))$ met resolvent $R_2 = Q(f(y)) \vee R(y)$.

Merk op dat $R_1 = R_2\lambda$ voor $\lambda = [y{:=}a]$. In resolvent R_2 is nog geen binding gemaakt voor de variabele y, in R_1 wel: daar is y gebonden aan a. We zullen zien dat de keuze voor een substitutie die minder vastlegt en in die zin algemener is, de meest verstandige is. ■

Uit het bovenstaande blijkt, dat we om een resolutieprocedure te verkrijgen voor de predicatenlogica, de resolutieprocedure voor de propositielogica moeten uitbreiden met een manier om geschikte substituties te vinden. Om deze reden zullen we substituties nader onder de loep nemen.

Een substitutie is een afbeelding die termen afbeeldt op termen, en formules op formules (zie ook hoofdstuk 8). Bij een enkelvoudige substitutie van de vorm $[y{:=}t]$ worden alle vrije voorkomens van de variabele y in een term of formule —na eventuele herbenoeming van de gebonden variabelen— vervangen door de term t. De substituties die we hier zullen beschouwen, zijn *simultane* substituties. Hierbij worden alle voorkomens van n verschillende variabelen gelijktijdig vervangen door n termen ($n \geq 0$). Zo'n substitutie noteren we als $[y_1{:=}t_1, \ldots, y_n{:=}t_n]$. Dergelijke simultane substituties zullen we kortweg *substituties* noemen, en aanduiden met Griekse letters. Een substitutie zullen we formeel opvatten als een *verzameling*. Dit betekent dat bijvoorbeeld $[x_3{:=}t_1, x_5{:=}t_2]$ en $[x_5{:=}t_2, x_3{:=}t_1]$ gelijke substituties zijn. Tenslotte nemen we aan dat er in een substitutie geen paren van de vorm $y{:=}y$ voorkomen.

16.2.2 Definitie **Substitutie**
Zij $y_1, \ldots, y_n \in VAR$ en $t_1, \ldots, t_n \in TERM$ ($n \geq 0$), zij $y_i \neq t_i$, en $y_i \neq y_j$ als $i \neq j$ ($1 \leq i, j \leq n$). Dan wordt de verzameling van paren (y_i, t_i) met $1 \leq i \leq n$, notatie $[y_1{:=}t_1, \ldots, y_n{:=}t_n]$, een substitutie *genoemd. Als alle*

termen t_i gesloten zijn, dan spreekt men van een grondsubstitutie. *Als $n = 0$, dan spreekt men van de* lege substitutie, *notatie ϵ.*

Het resultaat van het toepassen van een substitutie op een term of een formule zonder kwantoren noemt men een *instantie*. Men kan ook definiëren wat een instantie is van een formule *met* kwantoren. In dat geval moet rekening gehouden worden met het feit dat de variabelen in de te substitueren termen niet onbedoeld worden gebonden door kwantoren. Dit kan worden voorkomen door een geschikte herbenoeming van gebonden variabelen.

16.2.3 Definitie **Instantie**
Zij $\theta = [y_1 := t_1, \ldots, y_n := t_n]$ een substitutie, en zij E een term of een formule zonder kwantoren. Zij verder $E\theta$ het resultaat van het simultaan vervangen van alle voorkomens van y_i in E door t_i $(1 \leq i \leq n)$. Dan noemt men $E\theta$ een instantie *van E. Als alle termen t_i gesloten zijn, dan noemt men $E\theta$ een* grondinstantie.

Uit bovenstaande definitie volgt dat $E\epsilon = E$ voor alle termen of formules zonder kwantoren E. Ook geldt dat $E\theta = E$ als geen der variabelen y_i in E voorkomt.

16.2.4 Definitie **Compositie van substituties**
Zij $\theta = [v_1 := s_1, \ldots, v_m := s_m]$ en $\sigma = [w_1 := t_1, \ldots, w_n := t_n]$ substituties. Dan wordt de compositie *van θ en σ, notatie $\theta\sigma$, verkregen door uit de verzameling:*

$$[v_1 := s_1\sigma, \ldots, v_m := s_m\sigma, w_1 := t_1, \ldots, w_n := t_n],$$

de volgende paren te verwijderen:

1. *paren van de vorm $v_i := s_i\sigma$, indien $s_i\sigma = v_i$, en*
2. *paren van de vorm $w_j := t_j$, indien $w_j \in \{v_1, \ldots, v_m\}$.*

De bovenstaande definitie impliceert dat $\theta\sigma$ een substitutie is, als θ en σ dat zijn. Verder is de compositie zo gedefinieerd, dat de volgende gelijkheid geldt:

$$E(\theta\sigma) \quad = \quad (E\theta)\sigma.$$

Ook kan men bewijzen dat, als λ, θ en σ substituties zijn:

$$(\lambda\theta)\sigma \;=\; \lambda(\theta\sigma),$$
$$\epsilon\theta \;=\; \theta\epsilon \;=\; \theta.$$

Met andere woorden, de compositie van substituties is *associatief*, en ϵ is een zogenaamd linker en rechter *eenheidselement*. Het bewijs van de bovenstaande eigenschappen wordt aan de lezer overgelaten.

16.2.5 VOORBEELD Compositie van substituties.
Zij $\theta = [x{:=}f(y), y{:=}a, z{:=}y]$ en $\sigma = [x{:=}g(a), y{:=}z, w{:=}b]$. De compositie $\theta\sigma$ is gelijk aan de substitutie:

$$[x{:=}f(z), y{:=}a, w{:=}b],$$

terwijl de compositie $\sigma\theta$ gelijk is aan:

$$[x{:=}g(a), w{:=}b, z{:=}y].$$

Hieruit volgt dat $\theta\sigma \neq \sigma\theta$. Dit betekent dat de compositie van substituties niet commutatief is. ■

In voorbeeld 16.2.1 hebben we gezien dat we bij het resolveren van disjuncties die variabelen bevatten, vaak eerst een substitutie moeten toepassen om complementaire literalen te verkrijgen. Een substitutie die twee literalen aan elkaar gelijk maakt, noemt men een *unificator*, en het zoeken naar een dergelijke substitutie *unificatie*.

16.2.6 DEFINITIE **Unificator en mgu**
Zij $V = \{E_1, \ldots, E_n\}$ $(n \geq 2)$ een verzameling van termen of formules zonder kwantoren.

1. *Een substitutie θ is een* unificator *van V als $E_1\theta = \ldots = E_n\theta$. Een verzameling V wordt* unificeerbaar *genoemd als er een unificator voor V bestaat.*

2. *Een substitutie θ wordt de* meest algemene unificator *of* mgu *(Engels:* most general unifier*) van V genoemd als er voor iedere unificator σ van V een substitutie λ bestaat zodanig dat $\sigma = \theta\lambda$.*

16.2.7 VOORBEELD Unificators en mgu's.
Zij $V = \{P(y, f(x, b)),\ P(a, z)\}$. De substituties $\theta = [y{:=}a, z{:=}f(x, b)]$ en $\sigma = [x{:=}a, y{:=}a, z{:=}f(a, b)]$ zijn unificators van V. De unificator θ is de mgu van V. Merk op dat $\sigma = \theta[x{:=}a]$. ■

16.3 Het unificatie-algoritme

Er bestaat een algoritme om de meest algemene unificator van een verzameling termen of formules zonder kwantoren te vinden. Het bestaat eruit dat de symbolen in de termen of formules symbool voor symbool worden vergeleken tot er een verschil is gevonden. Dit verschil wordt door een substitutie teniet gedaan indien mogelijk, waarna weer wordt verder gegaan met vergelijken.

16.3.1 DEFINITIE **Verschilverzameling**
Zij $V = \{E_1, \ldots, E_n\}$ $(n \geq 2)$ een verzameling van termen of formules zonder kwantoren, en zij j het grootste natuurlijke getal zodanig dat de eerste j symbolen van $E_1, \ldots, E_n$ gelijk zijn. Zij verder s_i de subterm of subformule van E_i zodanig dat het eerste symbool van s_i gelijk is aan het symbool op positie $j+1$ van E_i $(1 \leq i \leq n)$. Dan noemt men $\{s_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ de verschilverzameling *van V.*

16.3.2 VOORBEELD Verschilverzamelingen.

1. Voor de verzameling $\{P(x, f(a,x)),\ P(x,b),\ P(x, g(x,y))\}$ is de verschilverzameling gelijk aan $\{f(a,x),\ b,\ g(x,y)\}$.

2. Voor $W = \{P(x),\ Q(y)\}$ is de verschilverzameling gelijk aan W. ■

Met behulp van het volgende, zogenaamde *unificatie-algoritme* kan de mgu van een gegeven eindige, niet-lege verzameling V van termen of formules zonder kwantoren worden bepaald. Het algoritme is afkomstig van Robinson (1965). De invoer is de verzameling V, en de uitvoer is de mgu σ_V van V, of de mededeling dat V niet unificeerbaar is.

Unificatie-algoritme

Stap 1 $k := 0$ en $\sigma_k := \epsilon$.

Stap 2 Als $V\sigma_k$ precies één element bevat, dan **Stop**: $\sigma_V = \sigma_k$ is een mgu van V.

Stap 3 Als de verschilverzameling van $V\sigma_k$ een variabele v_k bevat en een term t_k waarin v_k niet voorkomt, dan $\sigma_{k+1} := \sigma_k[v_k := t_k]$, $k := k+1$ en ga naar **Stap 2**; anders **Stop**: V is niet unificeerbaar.

Merk op dat het algoritme niet deterministisch is. In stap 3 wordt een willekeurige keuze gemaakt voor een variabele v_k en een term t_k in de verschilverzameling van $V\sigma_k$. Het algoritme kan op eenvoudige wijze deterministisch worden gemaakt door de elementen in de verschilverzamelingen te ordenen, en dan voor v_k de eerste variabele in de verschilverzameling van $V\sigma_k$ te nemen, en voor t_k de eerste term waarin v_k niet voorkomt.

16.3.3 VOORBEELD Bepaling van mgu.
We zullen laten zien hoe het unificatie-algoritme werkt aan de hand van een voorbeeld. Zij $V = \{P(x, y, f(x, g(x,a))),\ P(a, h(z), f(a,z))\}$. De mgu van V wordt als volgt door het algoritme bepaald:

1. Stap 1: $\sigma_0 := \epsilon$.
2. Stap 2: $V\sigma_0 = V$ bevat meer dan één element.
3. Stap 3: De verschilverzameling van $V\sigma_0$ is $\{x,\ a\}$. Neem $v_0 = x$ en $t_0 = a$, zodat:

$$\sigma_1 := \epsilon[x{:=}a] = [x{:=}a].$$

4. Stap 2: $V\sigma_1 = \{P(a, y, f(a, g(a, a))),\ P(a, h(z), f(a, z))\}$ bevat meer dan één element.
5. Stap 3: De verschilverzameling van $V\sigma_1$ is $\{y,\ h(z)\}$. Neem $v_1 = y$ en $t_1 = h(z)$, zodat:

$$\sigma_2 := \sigma_1[y{:=}h(z)] = [x{:=}a, y{:=}h(z)].$$

6. Stap 2: $V\sigma_2 = \{P(a, h(z), f(a, g(a, a))),\ P(a, h(z), f(a, z))\}$ bevat meer dan één element.
7. Stap 3: De verschilverzameling van $V\sigma_2$ is $\{z,\ g(a, a)\}$. Neem $v_2 = z$ en $t_2 = g(a, a)$, zodat:

$$\sigma_3 = \sigma_2[z{:=}g(a, a)] = [x{:=}a, y{:=}h(g(a, a)), z{:=}g(a, a)].$$

8. Stap 2: $V\sigma_3 = \{P(a, h(g(a, a)), f(a, g(a, a)))\}$ bevat precies één element. Stel $\sigma_V = \sigma_3$ en stop.

De mgu van V is dus gelijk aan $\sigma_V = [x{:=}a, y{:=}h(g(a, a)), z{:=}g(a, a)]$. ■

Uit de omschrijving blijkt dat het algoritme voor iedere eindige invoerverzameling V termineert. Was dat namelijk niet het geval, dan zou er een oneindige rij $V\sigma_0, V\sigma_1, V\sigma_2, \ldots$ worden gegenereerd met de eigenschap dat iedere verzameling uit deze rij één variabele minder bevat dan zijn voorganger. Immers, voor iedere $k \in \mathbb{N}$ geldt dat v_k voorkomt in $V\sigma_k$, maar niet in $V\sigma_{k+1}$. Omdat de verzameling V slechts een eindig aantal verschillende variabelen bevat, kan een dergelijke oneindige rij niet worden voortgebracht.

16.3.4 STELLING **Correctheid unificatie-algoritme**
Zij V een eindige, niet-lege verzameling van termen of formules zonder kwantoren. Als V unificeerbaar is, dan stopt het unificatie-algoritme in stap 2 en is σ_V de mgu van V.

BEWIJS *Stel dat V unificeerbaar is, en dat θ een unificator is van V. Stel verder dat stap 3 van het algoritme n keer wordt uitgevoerd wanneer het wordt toegepast op V. We laten zien dat het algoritme stopt in stap 2, en dat er voor iedere k waarvoor $0 \leq k \leq n$ een substitutie λ_k bestaat zodanig dat:*

$$\theta \;=\; \sigma_k \lambda_k.$$

Dit laatste bewijzen we met volledige inductie naar k. Als het bovenstaande is bewezen, volgt dat na terminatie van het algoritme $\sigma_V = \sigma_n$ een mgu van V is.

1. *Basisstap: $k = 0$.*

   Aangezien $\sigma_0 = \epsilon$, kan $\lambda_0 = \theta$ worden genomen. Omdat stap 3 nog geen enkele keer is uitgevoerd, kan het algoritme niet zijn gestopt in stap 3. Als $V\sigma_0$ precies één element bevat, dat stopt het algoritme in stap 2, en is σ_0 een mgu van V.

2. *Inductiestap: $k > 0$.*

   De inductiehypothese is dat $\theta = \sigma_i \lambda_i$ voor alle $0 \leq i \leq k$.

   Als $k = n$ en $V\sigma_k$ precies één element bevat, dan stopt het algoritme in stap 2, en is wegens de inductiehypothese $\sigma_V = \sigma_k$ een mgu van V.

   Als $k < n$, of $V\sigma_k$ bevat meer dan één element, dan wordt stap 3 van het algoritme uitgevoerd. Zij W_k de verschilverzameling van V_k. Omdat θ een unificator is van V, is volgens de inductiehypothese $\sigma_k\lambda_k$ ook een unificator van V. Omdat W_k de verschilverzameling is van $V\sigma_k$, moet λ_k een unificator zijn van W_k. Dit betekent dat W_k een variabele v_k moet bevatten. Zij nu t_k een ander element van W_k dat verschillend is van v_k. Omdat λ_k een unificator is van W_k moet er gelden:

   $$v_k\lambda_k \;=\; t_k\lambda_k.$$

   Omdat v_k en t_k verschillende elementen zijn van W_k, volgt hieruit dat het onmogelijk is dat v_k voorkomt in t_k. Het bovenstaande impliceert dat het algoritme niet in stap 3 termineert, maar teruggaat naar stap 2. Alvorens dit te doen krijgt σ_{k+1} de waarde $\sigma_k[v_k := t_k]$. Zij nu:

   $$\lambda_{k+1} \;=\; \lambda_k - [v_k := t_k\lambda_k],$$

   dan kunnen we afleiden:

   $$\begin{aligned} \lambda_k &= [v_k := t_k\lambda_k] \cup \lambda_{k+1}, \\ &= [v_k := t_k\lambda_{k+1}] \cup \lambda_{k+1}, \\ &= [v_k := t_k]\lambda_{k+1}. \end{aligned}$$

   Hieruit volgt tenslotte:

   $$\begin{aligned} \theta &= \sigma_k\lambda_k, \\ &= \sigma_k[v_k := t_k]\lambda_{k+1}, \\ &= \sigma_{k+1}\lambda_{k+1}. \end{aligned}$$

Hiermede is de stelling bewezen. ∎

16.4 De resolutieregel

In paragraaf 16.1 hebben we gezien, dat we in een zin in Skolemnormaalvorm $\{D_1, \ldots, D_n\}$ de variabelen in verschillende disjuncties verschillend kunnen kiezen. We zullen er in het vervolg vanuit gaan, dat dit inderdaad is gebeurd.

Voordat we de resolutieregel definiëren, introduceren we een aantal begrippen die we daarbij nodig hebben.

16.4.1 DEFINITIE **Factor**
Als twee of meer literalen in een disjunctie D een mgu σ bezitten, dan noemt men $D\sigma$ een factor *van D. Als $D\sigma$ precies één literaal bevat, dan noemt men $D\sigma$ een* eenheidsfactor.

16.4.2 DEFINITIE **Complement van een literaal**
Zij L een literaal en A een atoom. Als $L = A$, dan is het complement *van L, notatie $\overline{L}$, gedefinieerd als $\neg A$; als $L = \neg A$, dan is $\overline{L} = A$.*

16.4.3 DEFINITIE **Binaire resolvent**
Zij D_1 en D_2 disjuncties die geen gemeenschappelijke variabelen bezitten, en zij L_i een literaal in D_i $(i = 1, 2)$. Als L_1 en $\overline{L_2}$ een mgu σ bezitten, dan noemt men de disjunctie:

$$(D_1\sigma - L_1\sigma) \cup (D_2\sigma - L_2\sigma)$$

een binaire resolvent *van D_1 en D_2. Als $D_1 = \{L_1\}$ en $D_2 = \{L_2\}$, dan is de binaire resolvent gelijk aan de lege disjunctie $\square$.*

16.4.4 VOORBEELD Factor en binaire resolvent.

1. Zij $D = P(x, a) \vee P(f(y), z) \vee R(z)$. De substitutie $\sigma = [x := f(y), z := a]$ is een mgu van de eerste twee literalen. Dit betekent dat $D\sigma = P(f(y), a) \vee R(a)$ een factor is van D.

2. Zij $D_1 = P(x, f(x)) \vee Q(x)$ en $D_2 = \neg P(a, y) \vee R(z)$. Een mgu van $P(x, f(x))$ en $P(a, y)$ is $[x := a, y := f(a)]$. Hieruit volgt dat $Q(a) \vee R(z)$ een binaire resolvent van D_1 en D_2 is. ■

16.4.5 DEFINITIE **Resolvent en resolutieregel** *Zij D_1 en D_2 disjuncties. Dan is een* resolvent *van D_1 en D_2:*

- *òf een binaire resolvent van D_1 en D_2,*
- *òf een binaire resolvent van D_1 en een factor van D_2,*
- *òf een binaire resolvent van een factor van D_1 en D_2,*
- *òf een binaire resolvent van een factor van D_1 en een factor van D_2.*

Het voorschrift om een resolvent van twee disjuncties te bepalen wordt de resolutieregel *genoemd.*

Net als voor de propositielogica kunnen we definiëren wat we onder een *resolutie-afleiding* verstaan.

16.4.6 DEFINITIE **Resolutie-afleiding**
Zij F een zin in Skolemnormaalvorm, zodat F een eindige verzameling van disjuncties is, en zij D een disjunctie. Een afleiding *van D uit F is een rij disjuncties:*

$$R_1, R_2, \ldots, R_n = D,$$

waarin iedere R_i $(1 \leq i \leq n)$ een disjunctie uit F is, òf een resolvent van twee disjuncties R_j en R_k waarvoor $1 \leq j, k \leq i$. Als er een resolutie-afleiding van D uit F bestaat, dan zegt men dat D afleidbaar *is uit F, notatie $F \vdash_{\mathcal{R}} D$. Tenslotte noemt men n de* lengte *van de afleiding.*

We zijn, wederom net als in de propositielogica, vooral geïnteresseerd in afleidingen van $F \vdash_{\mathcal{R}} \Box$. In dat geval is F onvervulbaar zoals we in paragraaf 16.6 zullen zien.

16.5 De resolutiemethode

Er is een simpel algoritme om na te gaan of een zin F in Skolemnormaalvorm onvervulbaar is. Namelijk, genereer net zolang resolventen totdat de lege disjunctie $\Box$ wordt voortgebracht. In dat geval luidt de conclusie dat F onvervulbaar is. Dit is het zelfde algoritme als voor de propositielogica, dat we hier herhalen.

Resolutie-algoritme

Stap 1 Genereer, indien mogelijk, een nieuwe resolvent R van disjuncties uit F; anders **Stop**: F is vervulbaar.

Stap 2 Als $R = \Box$, dan **Stop**: F is onvervulbaar; anders $F := F \cup \{R\}$ en ga naar **Stap 1**.

Dit algoritme is nu een semi-beslissingsprocedure. Het algoritme behoeft namelijk niet voor alle invoer te stoppen. Als de invoer onvervulbaar is, dan zal het algoritme ooit stoppen. Als de invoer echter vervulbaar is, dan zal het algoritme in sommige gevallen steeds weer nieuwe resolventen genereren, door steeds andere substituties te proberen.

16.5.1 VOORBEELD Resolutie-afleiding.
Bewijs $P_1, P_2 \vdash C$ met:

$$\begin{aligned} P_1 &= \forall x[M(x) \rightarrow S(x)], \\ P_2 &= M(a), \\ C &= \exists x S(x). \end{aligned}$$

Hiertoe brengen we de formule $P_1 \wedge P_2 \wedge \neg C$ eerst in Skolemnormaalvorm. Dit levert:

$$F \;=\; \{\neg M(x) \vee S(x),\; M(a),\; \neg S(y)\}.$$

De afleiding van $\Box$ uit F verloopt als volgt:

1.	$\neg M(x) \vee S(x)$	(element F)
2.	$M(a)$	(element F)
3.	$\neg S(y)$	(element F)
4.	$S(a)$	(resolvent 1,2 met mgu $[x{:=}a]$)
5.	$\Box$	(resolvent 3,4 met mgu $[y{:=}a]$) ■

16.5.2 Voorbeeld Resolutie-afleiding.
Bewijs $P \vdash C$ met:

$$\begin{aligned} P &= \forall x[P(x) \rightarrow D(x)], \\ C &= \forall x[\exists y(P(y) \wedge S(x,y)) \rightarrow \exists y(D(y) \wedge S(x,y))]. \end{aligned}$$

(Dit is een formalisering van de redenering: *Als paarden dieren zijn, dan zijn paardestaarten dierestaarten.*)

We laten het aan de lezer over om te verifiëren dat de onderstaande verzameling F een Skolemnormaalvorm van de zin $P \wedge \neg C$ is:

$$F \;=\; \{\neg P(x) \vee D(x),\; P(b),\; S(a,b),\; \neg D(y) \vee \neg S(a,y)\}.$$

De afleiding van $\Box$ uit F verloopt als volgt:

1.	$\neg P(x) \vee D(x)$	(element F)
2.	$P(b)$	(element F)
3.	$S(a,b)$	(element F)
4.	$\neg D(y) \vee \neg S(a,y)$	(element F)
5.	$D(b)$	(resolvent 1,2 met mgu $[x{:=}b]$)
6.	$\neg S(a,b)$	(resolvent 4,5 met mgu $[y{:=}b]$)
7.	$\Box$	(resolvent 3,6 met mgu ϵ) ■

16.5.3 Voorbeeld Resolutie-afleiding.
We zullen bewijzen dat een driehoek met gelijke basishoeken gelijkbenig is. Het idee van het bewijs is dat voor een driehoek $\triangle ABC$ waarvan $\angle CAB = \angle CBA$, geldt dat $\triangle CAB \cong \triangle CBA$ (het symbool $\cong$ staat voor *is congruent met*). Hieruit volgt dan dat $AC = BC$.

Ten behoeve van het bewijs introduceren we vier predicaten:

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &: xyz \text{ is een driehoek,} \\ C(u,v,w,x,y,z) &: \triangle uvw \cong \triangle xyz, \\ L(u,v,x,y) &: uv = xy, \\ H(u,v,w,x,y,z) &: \angle uvw = \angle xyz. \end{aligned}$$

De predicaten T, C, L en H voldoen aan de volgende axioma's die als disjuncties worden gegeven. Hierbij hebben we niet steeds verse variabelen gebruikt, vanwege het grote aantal verschillende variabelen dat nodig zou zijn. In dit geval levert dat geen problemen.

1. $\neg T(x,y,z) \vee T(y,z,x)$.
2. $\neg T(x,y,z) \vee T(y,x,z)$.

3. $L(x,y,x,y)$.
4. $\neg L(u,v,x,y) \vee L(x,y,u,v)$.
5. $\neg L(u,v,x,y) \vee L(v,u,x,y)$.

6. $H(x,y,z,x,y,z)$.
7. $\neg H(u,v,w,x,y,z) \vee H(w,v,u,x,y,z)$.
8. $\neg H(u,v,w,x,y,z) \vee H(x,y,z,u,v,w)$.

9. $\neg C(u,v,w,x,y,z) \vee H(u,v,w,x,y,z)$.
10. $\neg C(u,v,w,x,y,z) \vee H(v,w,u,y,z,x)$.
11. $\neg C(u,v,w,x,y,z) \vee H(w,u,v,z,x,y)$.

12. $\neg C(u,v,w,x,y,z) \vee L(u,v,x,y)$.
13. $\neg C(u,v,w,x,y,z) \vee L(v,w,y,z)$.
14. $\neg C(u,v,w,x,y,z) \vee L(u,w,x,z)$.

15. $\neg T(u,v,w) \vee \neg T(x,y,z) \vee \neg L(u,v,x,y)$
$\vee \neg H(w,u,v,z,x,y) \vee \neg H(w,v,u,z,y,x) \vee C(u,v,w,x,y,z)$.

Niet al deze axioma's worden gebruikt in de afleiding. Ook is het niet zo dat de bovenstaande axioma's volledig zijn. Axioma 15 brengt tot uitdrukking dat $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ als $AB = DE$, $\angle CAB = \angle FDE$ en $\angle CBA = \angle FED$ (het zogenaamde HZH-geval). Uiteraard zijn er nog andere axioma's nodig om alle gevallen van congruentie te dekken. Verder ontbreken er ook axioma's voor de transitiviteit van gelijkheid van hoeken en lijnstukken.

We moeten uitgaande van het gegeven dat in $\triangle ABC$ de basishoeken $\angle CAB$ en $\angle CBA$ gelijk zijn, bewijzen dat $\triangle ABC$ gelijkbenig is ofwel $AC = BC$. Dit wordt als volgt opgeschreven.

16. $T(a, b, c)$.
17. $H(c, a, b, c, b, a)$.
18. $\neg L(a, c, b, c)$.

De afleiding van $\square$ uit de disjuncties 1 t/m 18 verloopt als volgt:

19. $T(b, a, c)$,
    resolvent van 2 en 16 met mgu $[x := a, y := b, z := c]$.
20. $\neg T(x, y, z) \vee \neg L(b, a, x, y) \vee \neg H(c, b, a, z, x, y) \vee \neg H(c, a, b, z, y, x)$
    $\vee C(b, a, c, x, y, z)$,
    resolvent van 15 en 19 met mgu $[u := b, v := a, w := c]$.
21. $\neg L(b, a, a, b) \vee \neg H(c, b, a, c, a, b) \vee \neg H(c, a, b, c, b, a)$
    $\vee C(b, a, c, a, b, c)$,
    resolvent van 16 en 20 met mgu $[x := a, y := b, z := c]$.
22. $L(y, x, x, y)$,
    resolvent van 3 en 5 met mgu $[u := x, v := y]$.
23. $\neg H(c, b, a, c, a, b) \vee \neg H(c, a, b, c, b, a) \vee C(b, a, c, a, b, c)$,
    resolvent van 21 en 22 met mgu $[x := a, y := b]$.
24. $H(c, b, a, c, a, b)$,
    resolvent van 8 en 17 met mgu
    $[x := c, y := b, z := a, u := c, v := a, w := b]$.
25. $\neg H(c, a, b, c, b, a) \vee C(b, a, c, a, b, c)$,
    resolvent van 23 en 24 met mgu ϵ.
26. $C(c, a, b, a, b, c)$,
    resolvent van 17 en 25 met mgu ϵ.
27. $L(a, c, b, c)$,
    resolvent van 13 en 26 met mgu
    $[x := a, y := b, z := c, u := c, v := a, w := b]$.
28. $\square$,
    resolvent van 18 en 27 met mgu ϵ.

Hiermee is de stelling bewezen. ■

16.6 Volledigheid van de resolutiemethode

De volgende stelling maakt gebruik van de *universele afsluiting* $U(F)$ van een formule F. In hoofdstuk 9 hebben we gezien dat $U(F)$ uit F verkregen wordt door voor iedere vrije variabele in F een universele kwantor voor die variabele vóór F te plaatsen.

16.6.1 STELLING **Correctheid resolutieregel**
Als R een resolvent is van twee disjuncties D_1 en D_2, dan geldt:

$$U(D_1), U(D_2) \models U(R).$$

BEWIJS Wordt aan de lezer overgelaten. ■

16.6.2 STELLING **Correctheid resolutie**
Zij $F \in ZIN$ een zin in Skolemnormaalvorm, en D een disjunctie. Dan geldt:

$$F \vdash_{\mathcal{R}} D \quad \Rightarrow \quad F \models U(D).$$

BEWIJS *Door middel van inductie over de lengte van de afleiding met gebruikmaking van stelling 16.6.1.* ■

Merk op dat in de bovenstaande stelling de formule F zoals genoemd in $F \vdash_{\mathcal{R}} D$, wordt voorgesteld als een niet-lege, eindige verzameling van disjuncties, terwijl deze in $F \models U(D)$ wordt gedacht als een zin zonder vrije variabelen.

De volgende stelling staat in de Engelstalige literatuur bekend als het *lifting lemma*. De inhoud ervan is dat een binaire resolvent R' van grondinstanties van disjuncties D_1 en D_2 zelf een instantie is van een resolvent R van D_1 en D_2. Anders gezegd, R' kan worden 'opgetild' tot R.

16.6.3 STELLING **Lifting lemma**
Zij D_1 en D_2 disjuncties die geen gemeenschappelijke variabelen bezitten. Als D_1' en D_2' grondinstanties zijn van D_1 en D_2, en R' een resolvent is van D_1' en D_2', dan bestaat er een resolvent R van D_1 en D_2 zodanig dat R' een instantie is van R.

BEWIJS Omdat D_1' een instantie is van D_1 en D_2' van D_2, en omdat D_1 en D_2 verschillende variabelen bevatten, bestaat er een substitutie θ zodanig dat $D_1' = D_1\theta$ en $D_2' = D_2\theta$. Omdat R' een resolvent is van D_1' en D_2', bevat D_1' een literaal L_1 en D_2' een literaal L_2 zodanig dat $L_2 = \overline{L_1}$. Zij V_i $(i = 1, 2)$ de verzameling van literalen in D_i die door θ op L_i worden afgebeeld.

Zij λ_i een mgu van V_i $(i = 1, 2)$, en zij $\lambda = \lambda_1 \cup \lambda_2$. Omdat de variabelen in V_1 en V_2 verschillend zijn, is λ een mgu van V_1 en V_2. Hieruit volgt dat L_1 een instantie is van $V_1\lambda$, en L_2 van $V_2\lambda$, zodat $V_1\lambda$ en $\overline{V_2\lambda}$ unificeerbaar zijn. Zij nu σ een mgu van $V_1\lambda$ en $\overline{V_2\lambda}$, dan kan men bewijzen (zie opgave 4) dat $\lambda\sigma$ een mgu is voor de verzameling bestaande uit de literalen in V_1 en de complementen van de literalen in V_2.

Nu geldt dat:

$$R = (D_1\lambda\sigma - V_1\lambda\sigma) \cup (D_2\lambda\sigma - V_2\lambda\sigma)$$

een resolvent is van D_1 en D_2. Voor de resolvent R' geldt:

$$R' \;=\; (D_1\theta - V_1\theta) \cup (D_2\theta - V_2\theta).$$

Omdat θ een unificator is van de literalen in V_1 en de complementen van de literalen in V_2, en omdat $\lambda\sigma$ hiervoor een mgu is, bestaat er een substitutie δ zodanig dat $\theta = \lambda\sigma\delta$. Hieruit en uit de gevonden uitdrukkingen voor R en R' volgt dat R' een instantie is van R. ■

16.6.4 STELLING **Volledigheid resolutie** *Zij $F \in ZIN$ een zin in Skolemnormaalvorm. Dan geldt:*

$$F \vdash_{\mathcal{R}} \Box \quad \Leftrightarrow \quad F \text{ is onvervulbaar.}$$

BEWIJS

($\Rightarrow$) *Uit het ongerijmde. Stel dat $F \vdash_{\mathcal{R}} \Box$ en dat F vervulbaar is. Dan bestaat er een afleiding*

$$R_1, R_2, \ldots, R_n = \Box.$$

Uit de definitie van een afleiding volgt dat $F \vdash_{\mathcal{R}} R_i$ voor $(1 \leq i \leq n)$. Toepassing van stelling 16.6.2 levert dat $F \models U(R_i)$ voor $(1 \leq i \leq n)$. Als F vervulbaar is, dan bestaat er een structuur $\mathcal{A}$ zodanig dat $\mathcal{A} \models F$. In combinatie met $F \models U(R_i)$ volgt hieruit dat dat $\mathcal{A} \models U(R_i)$ voor alle $(1 \leq i \leq n)$. Omdat $F \vdash_{\mathcal{R}} \Box$, zijn er disjuncties R_j en R_k, en een mgu σ zodanig dat $R_j\sigma = \overline{R_k\sigma}$ voor $1 \leq j < k < n$. Maar dan moet gelden $\mathcal{A} \models U(R_j\sigma)$ en $\mathcal{A} \models U(R_k\sigma)$, wat onmogelijk is.

($\Leftarrow$) *Stel dat F onvervulbaar is. Uit de stelling van Herbrand volgt, dat er een eindige verzameling E van grondinstanties van disjuncties uit F bestaat die onvervulbaar is. Uit de volledigheid van de resolutie voor de propositielogica volgt nu dat er een afleiding:*

$$R_1, R_2, \ldots, R_n = \Box$$

van $\Box$ uit E bestaat. Uit het lifting lemma volgt dat deze afleiding kan worden 'opgetild' tot een afleiding

$$S_1, S_2, \ldots, S_n = \Box$$

van $\Box$ uit F, waarbij R_i een grondinstantie is van S_i $(1 \leq i \leq n)$. ■

16.7 Opgaven

1. Breng de volgende zinnen in Skolemnormaalvorm:

   (a) $\neg[\forall x P(x) \rightarrow \exists y \forall z Q(y,z)]$.

   (b) $\forall x[\forall y P(x,y) \rightarrow \forall y \neg \forall z Q(y,z)]$.

2. Bepaal, indien mogelijk, een mgu voor elk van de volgende verzamelingen:

   (a) $\{P(f(x)),\ P(f(y))\}$,

   (b) $\{P(f(x,a)),\ Q(f(b,y))\}$,

   (c) $\{P(x, f(x,a,y)),\ P(y, f(b,z,z))\}$,

(d) $\{P(x, f(x, y), g(x, b, z)),\ P(h(y, a), f(h(y, z), b), g(w, y, a))\}$.

3. Bewijs met behulp van resolutie dat:

   (a) $\forall x[A(x) \rightarrow B(x)] \vdash \exists x A(x) \rightarrow \exists x B(x)$.

   (b) $\forall x \exists y R(x, y), \forall x \forall y[R(x, y) \rightarrow S(x, y)] \vdash \forall x \exists y S(x, y)$.

   (c) $\exists x[A(x) \wedge \forall y(B(y) \rightarrow R(y, x))] \vdash \forall x[B(x) \rightarrow \exists y(A(y) \wedge R(x, y))]$.

4. Bewijs stelling 16.6.1.

5. Bewijs de bewering uit het bewijs van het lifting lemma dat $\lambda\sigma$ een mgu is voor de verzameling bestaande uit de literalen in V_1 en de complementen van de literalen in V_2.